

Correction de la feuille Exo_26 : Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et projection orthogonale.

Ex 1 : 1) on cherche $v = (x, y)$ tel que $u - v \in F^\perp$ et $v \in F$ ce qui équivaut au système :
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{or } \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{13} \\ y = \frac{2}{13} \end{cases}$$

Le projeté orthogonal de $u = (1, 2)$ sur F est le vecteur $v = \left(-\frac{3}{13}; \frac{2}{13}\right)$

2) (non corrigé) La réponse est : $\frac{1}{3}(-1, 2, -1)$

Ex 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

1) D'une part : le théorème du rang donne $\dim(\text{Im}(A)) + \dim((\text{Ker}(A))) = n$

D'autre part : une propriété de l'orthogonal donne $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim((\text{Ker}(A))^\perp) = n$
par soustraction membre à membre on obtient bien :

$$\dim(\text{Im}(A)) = \dim((\text{Ker}(A))^\perp)$$

2) (non corrigé)

3) (non corrigé)

Ex 3 : 1) Dans la base canonique $\text{Mat}(f \circ f) = \text{Mat}(f)\text{Mat}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}(f)$
donc

$$f \circ f = f$$

$\text{Im}(f)$ est l'espace engendré par l'image d'une base donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\frac{1}{2}(1, 1); \frac{1}{2}(1, 1)\right)$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1)) \quad \text{on note } F = \text{Im}(f)$$

$F^\perp$ est l'ensemble des (x, y) orthogonal à $(1, 1)$ donc $F^\perp = \text{Vect}((1, -1))$
 $u = (x, y)$ appartient $\text{ker}(f)$ équivaut à $f(x, y) = (0, 0)$ ou encore $x + y = 0$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((-1, 1)) \quad \text{on remarque } F^\perp = \text{Ker}(f)$$

En conclusion :

$$f \text{ est la projection orthogonale sur } F = \text{Vect}((1, 1))$$

2) Dans la base canonique :

$$\text{Mat}(f \circ f) = \text{Mat}(f)\text{Mat}(f) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \text{Mat}(f)$$

donc

$$f \circ f = f$$

$\text{Im}(f)$ est l'espace engendré par l'image d'une base donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\frac{1}{9}(5, 4, -2), \frac{1}{9}(4, 5, 2), \frac{1}{9}(-2, 2, 8)\right)$$

et en simplifiant, on obtient :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$$

$$\boxed{\text{Im}(f) = F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))}$$

$F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc :

$$F^\perp = \text{Vect}((1, -1, 0))$$

$u = (x, y, z)$ appartient à $\ker(f)$ équivaut à $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ou encore :

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ 4x + 5y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 8z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\ker(f) = \text{Vect}((1, -1, 0))$$

$$\boxed{\ker(f) = F^\perp}$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est la projection orthogonale sur } F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))}$$

Ex 4 : (*non corrigé*)

Ex 5 : Soit p une projection orthogonale sur F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que $p \circ p = p$, $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = F^\perp$.

1) Soit $\lambda \in \text{sp}(p_F)$, et u un vecteur propre de p_F associé à λ

on a donc $p_F(u) = \lambda u$ et $p_F(p_F(u)) = \lambda^2 u$,

comme $p_F \circ p_F = p_F$, il vient $\lambda u = \lambda^2 u$ ou encore $(\lambda^2 - \lambda)u = 0_E$

on sait de plus que $u \neq 0_E$, donc $\lambda^2 - \lambda = 0$ et ainsi $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

$$\boxed{\text{sp}(p_F) \subset \{0, 1\}}$$

Dans la suite on considère que $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq \mathbb{R}^3$ de sorte que : $\text{sp}(p_F) = \{0, 1\}$

2) D'une part : $\ker(p_F) = E_0(p_F)$

d'autre part : $\forall u \in F, p_F(u) = u$ on a : $\text{Im}(p_F) \subset E_1(p_F)$ et $\dim(\text{Im}(p_F)) \leq \dim(E_1(p_F))$

donc $\dim(E_0(p_F)) + \dim(E_1(p_F)) \geq n$

or on sait que : $\dim(E_0(p_F)) + \dim(E_1(p_F)) \leq n$

donc $\dim(E_0(p_F)) + \dim(E_1(p_F)) = n$ et ainsi : $\boxed{p_F \text{ est diagonalisable}}$

Remarque : on a montré ci-dessus que $\text{Im}(p_F) = E_1(p_F)$

En notant $\mathcal{B}_1$ une base orthonormale de $\text{Im}(p_F)$ et $\mathcal{B}_2$ une base orthonormale de $\ker(p_F)$

sachant que $\ker(p_F) = \text{Im}(p_F)^\perp$, on obtient $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

dans cette base la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{p_F \text{ est diagonalisable dans une base orthonormale.}}$$

3) M est diagonalisable dans une base orthonormale donc $\boxed{M \text{ est symétrique}}$.

(En effet : Si $M = P\Delta P^T$ alors $M = M^T$)

et on a $p_F \circ p_F = p_F$ donc $\boxed{M^2 = M}$

On peut remarquer que la trace de M est égale à la dimension de F .

Ex 6 : • F_1

1) $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \} = \{ (-y + z, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect} \langle (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$
 or $((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une famille libre donc :

$\boxed{((-1, 1, 0), (1, 0, 1)) \text{ est une base de } F}$

$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \} = (\text{Vect} \langle (1, 1, -1) \rangle)^\perp$ et $(1, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$ donc

$\boxed{((1, 1, -1)) \text{ est une base de } F^\perp}$

2) $F = \text{Vect} \langle \underbrace{(-1, 1, 0)}_{u_1}, \underbrace{(1, 0, 1)}_{u_2} \rangle = \text{Vect} \langle u_1, u_2 - \alpha u_1 \rangle$ et $u_1 \perp (u_2 - \alpha u_1) \iff \alpha = \frac{\langle u_1 | u_2 \rangle}{\langle u_1 | u_1 \rangle} = -\frac{1}{2}$

$((-1, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1))$ est une base orthogonale de F

$\boxed{(e_1, e_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2) \right) \text{ est une base orthonormale de } F}$

$F^\perp = \text{Vect} \langle (1, 1, -1) \rangle$

$\boxed{(e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \right) \text{ est une base orthonormale de } F^\perp}$

3) **Première approche.** En utilisant la base orthonormale de $F^\perp$.

Pour tout $u = (x, y, z)$,

$$\begin{aligned} p_{F^\perp}(u) &= \langle u ; e_3 \rangle e_3 \\ &= \left\langle (x, y, z); \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \\ &= \frac{x + y - z}{3}(1, 1, -1) \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}_c}(p_{F^\perp}((x, y, z))) = \begin{pmatrix} \frac{x + y - z}{3} \\ \frac{x + y - z}{3} \\ \frac{-x - y + z}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de plus $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F) = I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_{F^\perp})$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Deuxième approche. En utilisant la base orthonormale de F .

Pour tout $u = (x, y, z)$,

$$\begin{aligned} p_F(u) &= \langle u ; e_1 \rangle e_1 + \langle u ; e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{1}{2} \langle (x, y, z); (-1, 1, 0) \rangle (-1, 1, 0) + \frac{1}{6} \langle (x, y, z); (1, 1, 2) \rangle (1, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}_c}(p_F((x, y, z))) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + y + 2z \\ 2x + 2y + 4z \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Troisième approche. (colonne par colonne)

$$\begin{aligned} p_F((1, 0, 0)) &= \langle (1, 0, 0) ; e_1 \rangle e_1 + \langle (1, 0, 0) ; e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{1}{2} \langle (1, 0, 0) ; (-1, 1, 0) \rangle (-1, 1, 0) + \frac{1}{6} \langle (1, 0, 0) ; (1, 1, 2) \rangle (1, 1, 2) \\ &= -\frac{1}{2}(-1, 1, 0) + \frac{1}{6}(1, 1, 2) \\ &= \frac{1}{3}(2, -1, 1) \end{aligned}$$

donc la première colonne de la matrice est $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{de même } p_F((0, 1, 0)) = \frac{1}{3}(-1, 2, 1) \quad \text{et} \quad p_F((0, 0, 1)) = \frac{1}{3}(1, 1, 2)$$

on peut alors conclure :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) En juxtaposant les bases de la question 1) on obtient une base de $\mathbb{R}^3$

(On pourrait être amené à le démontrer)

$$\text{En notant } \mathcal{B}_1 = \left(\underbrace{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)}_{(u_1, u_2) \text{ base de } F}, \underbrace{(1, 1, -1)}_{(u_3) \text{ base de } F^\perp} \right),$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet : comme u_1 et $u_2 \in F$ donc $p_F(u_1) = u_1$ et $p_F(u_2) = u_2$ et $u_3 \in F^\perp$ donc $p_F(u_3) = 0_E$

5) En juxtaposant les bases orthonormales de la question 2) on obtient une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$

$$\text{En notant } \mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \right),$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P_F est diagonalisable dans une base orthonormale.

- F_2 (Je ne réponds qu'aux questions 3) et 5) comme si on nous les avait posés directement).

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \right)$ est une base orthonormale de F .

$$\text{Pour tout } (x, y, z), \quad p_F((x, y, z)) = \left\langle (x, y, z); \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) = \frac{x + 2y + z}{6}(1, 2, 1)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\} = \text{Vect} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)}_{\text{base orthonormale de } F^\perp} \right)$$

En juxtaposant les bases orthonormales on obtient une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de p_F ,

$$\text{en notant } \mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \right), \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 7 : (non corrigé)

Ex 8 :

$$\begin{aligned}
 av_1 + bv_2 = p_F(u) &\iff u - (av_1 + bv_2) \in F^\perp \\
 &\iff \begin{cases} u - (av_1 + bv_2) \perp v_1 \\ u - (av_1 + bv_2) \perp v_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \langle u - (av_1 + bv_2) | v_1 \rangle = 0 \\ \langle u - (av_1 + bv_2) | v_2 \rangle = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \langle u | v_1 \rangle = a \langle v_1 | v_1 \rangle + b \langle v_2 | v_1 \rangle \\ \langle u | v_2 \rangle = a \langle v_1 | v_2 \rangle + b \langle v_2 | v_2 \rangle \end{cases} \\
 &\iff \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u | v_1 \rangle \\ \langle u | v_2 \rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

on remarque que

$$\langle v_1 | v_1 \rangle = n \quad \langle v_1 | v_2 \rangle = n\bar{x} \quad \langle v_2 | v_2 \rangle = n\bar{x}^2 \quad \langle u | v_1 \rangle = n\bar{y} \quad \langle u | v_2 \rangle = n\bar{x}\bar{y}$$

on obtient le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n\bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ n\bar{x}\bar{y} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a + \bar{x}b = \bar{y} \\ \bar{x}a + \bar{x}^2b = \bar{x}\bar{y} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a + \bar{x}b = \bar{y} \\ (\bar{x}^2 - (\bar{x})^2)b = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \bar{x}L_1
 \end{aligned}$$

on définit : $\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$ (variance empirique de la série (x_i))

et $\text{cov}(x, y) = \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}$ (covariance empirique de la série double (x_i, y_i))

comme on a supposé que la famille (v_1, v_2) est libre on peut montrer que $\sigma_x^2 \neq 0$

On obtient alors :

$$av_1 + bv_2 = p_F(u) \iff \begin{cases} a + \bar{x}b = \bar{y} \\ b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \end{cases}$$

Ex 9 : (non corrigé)