

## Feuille Calcul.9 : Révisions.

*Vous trouverez ici des exercices d'entraînement. Les calculs dans les épreuves de concours peuvent parfois être plus difficiles, mais il est bon de s'entraîner à faire des calculs relativement simples pour se préparer. Cette liste ne prétend pas recouvrir l'ensemble du programme. Elle peut être complétées par le cahier de calcul.*

- 1) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$
- 2) Simplifier la somme double :  $S = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \binom{j}{i}$
- 3) Calculer l'intégrale suivante :  $\int_0^1 \ln(x + 1) dx$ .
- 4) Développer  $(X - 1)^5$ .
- 5) Déterminer le rang de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix}$
- 6) Quel est le degré du polynôme :  $P = (X + 2)^3 - (X^3 - 3)$  ?
- 7) Quelles sont les solutions complexes de  $z^n = 1$  ?
- 8) Justifier l'équivalent  $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$
- 9) Quelle est la dimension de  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0\}$  ?
- 10) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + y = 3$
- 11) On tire au hasard un numéro dans l'ensemble  $\{-1, 0, 2, 3\}$  On note  $X$  le nombre obtenu. Quelle est la variance de  $X$  ?
- 12) Quelle est la dimension de  $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$  ?
- 13) Factoriser le polynôme  $P(X) = 2X^2 + X - 1$
- 14) Donner la nature de la série :  $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{1 + 3^n}$
- 15) Déterminer une densité associée à la fonction de répartition suivante : 
$$\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in ]-\infty, 1] \\ F_X(t) = \frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } t \in ]1, 9] \\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in ]9, +\infty[ \end{cases}$$

16) Résoudre le système 
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

17) Calculer pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , 
$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n$$

18) Quelle est la dimension de  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$  ?

19) Déterminer la fonction de répartition de la densité suivante : 
$$\begin{cases} f(t) = e^t & \text{si } t \in ]-\infty, 0[ \\ f(t) = 0 & \text{si } t \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

20)  $X \mapsto \mathcal{E}(1/3)$  Donner l'espérance et la variance de  $X$ .

21) Calculer si elle existe l'intégrale : 
$$\int_0^1 \ln(t) dt$$

22) Calculer l'intégrale suivante : 
$$\int_0^1 x e^{(x^2)} dx.$$

23) Calcul de la limite de  $\frac{\ln(x) + x^2}{x + e^{2x}}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

24) Calculer si elle existe la somme suivante : 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{4^n}$$

25) Déterminer les valeurs propres de la matrice 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

26) Calculer 
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt.$$

27) On note  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donner la matrice de  $f$  dans les bases canoniques.  

$$(x, y) \mapsto (x + y, -x - y, 2x + 2y)$$

28)  $X \mapsto \mathcal{G}(1/3)$  Donner l'espérance et la variance de  $X$ .

29) Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.  
 On tire simultanément 2 jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs ?

30) Calculer la dérivée de  $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  sur  $\mathbb{R}$

31) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , calculer la limite de  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

32) Calculer la limite  $x e^{\frac{1}{x}}$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .

33) Etude de la fonction  $x \mapsto xe^{-x}$ .

34) Calculer si elle existe la somme suivante :  $\sum_{n=1}^{+\infty} (0,5)^n$

35) Calculer l'intégrale suivante :  $\int_1^2 \frac{6}{(2+x)^2} dx$

36) Calculer si elle existe l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

37) Déterminer une densité associée à la fonction de répartition suivante : 
$$\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in ]-\infty, 0] \\ F_X(t) = \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in ]0, \sqrt{3}[ \\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in ]\sqrt{3}; +\infty[ \end{cases}$$

38) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

39) Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

40) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y''(t) - y(t) = t$

41) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'(t) + 2y(t) = 3$

42) Déterminer une primitive de  $x \mapsto \exp(-x) \exp(-\exp(-x))$ .

43) Déterminer une équation de la droite passant par les points  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

44)  $X \mapsto \mathcal{B}(5, 1/3)$  Donner l'espérance et la variance de  $X$ .

45) Calculer si elle existe la somme suivante :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

46) Calculer l'intégrale suivante :  $\int_0^1 te^{2t} dt$

47) Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.  
On tire successivement et sans remise 2 jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs ?

48) Calculer la dérivée de  $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$

49) Calculer l'intégrale suivante :  $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$

50) Simplifier  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda}$

51) Calculer si elle existe l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$

52) Quelle est la dimension de  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$  ?

53) Calculer l'intégrale suivante :  $\int_0^1 3e^{-t} dt$ .

54) Calculer si elle existe l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$

55) On tire au hasard un numéro dans l'ensemble  $\{-1, 0, 2, 3\}$  On note  $X$  le nombre obtenu. Quelle est l'espérance de  $X$  ?

56) Calculer la limite  $\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))$  quand  $x$  tend vers  $1^+$ .

57) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

58) Déterminer la fonction de répartition associée à la densité suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in ]-\infty, -1[ \\ t+1 & \text{si } t \in ]-1, 0[ \\ 1-t & \text{si } t \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } t \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

59) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$ , montrer que :  $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$

60) Quelle est la dimension de  $F = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$  ?

61) Déterminer le signe de la fonction  $x \mapsto xe^{-x} - 1$

62) Calculer l'intégrale suivante :  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$  avec le changement de variable  $t = \sin(\theta)$

63) Calculer la dérivée de  $f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

64) Donner la nature de la série :  $\sum_{n \geq 4} \frac{1}{n-3}$

65) Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle :  $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 2$

- 66) Déterminer une base orthonormale de  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0\}$ .
- 67) Déterminer les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- 68) Quelle est la dimension de  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y + 2z = 0 \text{ et } x + 2y + 2z = 0\}$  ?
- 69) Déterminer la matrice des coordonnées de  $u = (3, 1, -2)$  dans la base  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- 70) Calculer si elle existe la somme suivante :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$
- 71) Déterminer le signe de l'expression de  $\frac{x \ln(x) - 2x}{x^2 - 3x + 2}$  suivant les valeurs du réel  $x$ .
- 72) Simplifier la somme double :  $S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$ .
- 73) Déterminer une base de  $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 3x + y + 3z + t = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\}$
- 74) Calcul de la limite en 0 de  $x \mapsto \frac{1 - e^x}{\sqrt{x}}$ .
- 75) Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.  
On tire successivement et avec remise 2 jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs ?
- 76) Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme :  $5X^3 - 2X + 3$
- 77) Quelles sont les racines (*complexes*) de  $X^3 - 1$  ?
- 78) Déterminer le DL<sub>3</sub>(0) de  $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
- 79) Calculer si elle existe la somme suivante :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$
- 80) On considère  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^T A$ .
- 81) Donner la nature de la série :  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$
- 82)  $X \mapsto \mathcal{G}(1/3)$ . Donner l'espérance et la variance de  $X$ .