

- 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto 3xy^2 - 2x^2y$
déterminer les dérivées partielles premières de f .
- 2) Soit $f : (x, y) \mapsto \ln(1 - x^2 - y^2)$
Représenter dans le plan l'ensemble de définition de f , puis calculer les dérivées partielles premières de f .
- 3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$.
- Calculer les dérivées partielles de f .
 - Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées $(1, 2, f(1, 2))$.
 - Donner un vecteur normal à ce plan.
- 4) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $(x, y) \mapsto y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Représenter cet ensemble de définition dans le plan.
 - Calculer les dérivées partielles de f .
- 5) Soit u une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $f(t, x) = u(t, x + t^2)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$.
- 6) a) Soit u une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} et $f(t, x) = u(x - ct)$.
- Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$.
 - Montrer que $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -c \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$.
- b) Réciproquement, soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 vérifiant $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -c \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$
- Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t, ct + \lambda)$ est constante.
 - En déduire qu'il existe une fonction u de classe C^1 sur \mathbb{R} telle que
$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad f(t, x) = u(x - ct).$$
- 7) Soit u une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $f(t, x) = u(t - x, t + x)$.
- Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$.
 - Montrer que $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}(t - x, t + x) + \frac{\partial u}{\partial y}(t - x, t + x)$.
- 8) On considère une fonction u de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $f : (t, x) \mapsto u(t, x + ct)$
Remarque : c est une constante.
Déterminer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de u .
- 9) On note f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$
- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
 - Montrer que $(1, 2)$ est l'unique point critique de f .
 - Développer pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'expression $f(1 + a, 2 + b)$.
 - Expliquer pourquoi dans l'expression précédente il n'y a pas de terme en a et en b .
(Il n'y a que des termes d'ordre 2 : a^2 , b^2 et ab).
 - Montrer que f admet un minimum en $(1, 2)$.

- 10) On note f la fonction : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x$
- Déterminer son unique point critique.
 - Ce point critique est-il un extremum? (*On précisera s'il s'agit d'un minimum ou un maximum*)
- 11) On note f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + y^2 + 2y + 1$
- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
 - Montrer que $(-1, 1)$ est le seul point critique de f .
 - on note f_1 et f_2 les deux fonctions partielles en $(-1, 1)$: $f_1 : t \mapsto f(t, 1)$ $f_2 : t \mapsto f(-1, t)$
 Montrer que f_1 admet un minimum en -1 et que f_2 admet un minimum en 1 .
 - Montrer que $f_3 : t \mapsto f(-t, t)$ admet un maximum en 1 .
 - En déduire que f ne possède aucun extremum local.

12) Déterminer les points critiques de la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par : $f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$.

13) Déterminer les dérivée partielles d'ordre 2 de la fonction f définie par $f(x, y) = xe^{xy}$.

14) Déterminer les fonctions F de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et vérifiant : $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x^2 + y$

15) Déterminer les fonctions F de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et vérifiant : $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x^2 + y$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - y$

16) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par : $f(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial f}{\partial t}(y, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, t)$

17) Dans cet exercice, on fixe $m \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux fonctions u de $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} , de classe C^2 et solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = m \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1)$$

$$\text{avec les conditions au bord : } \forall t \geq 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2)$$

On cherche les solutions u non nulles qui peuvent se décomposer en un produit de deux fonctions d'une seule variable.

Soient donc $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2 . On suppose que la fonction $u : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x, t) = f(x)g(t)$ est non nulle et solution de (1) et (2).

- Vérifier que les fonctions f et g sont alors non nulles.
- Montrer qu'il existe un réel λ tel que la fonction g vérifie l'équation différentielle : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = \lambda g(t)$ puis résoudre cette équation différentielle.
- Montrer que pour cette même valeur de λ , la fonction f vérifie l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{2} f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x) \quad \text{avec les conditions au bord : } f(0) = f(1) = 0$$

d) On suppose dans cette question $\lambda > -\frac{m^2}{2}$.

- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = ae^{r_+x} + be^{r_-x} \quad \text{pour des réels } r_+ \text{ et } r_- \text{ que l'on précisera.}$$

- Montrer que a et b sont nécessairement nuls, et obtenir une contradiction.

e) En procédant comme dans la question précédente, obtenir une contradiction si l'on suppose $\lambda = -\frac{m^2}{2}$.

f) On suppose dans cette question $\lambda < -\frac{m^2}{2}$.

- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = (a \cos(\pi l x) + b \sin(\pi l x))e^{-mx}, \quad \text{où } l = \frac{1}{\pi} \sqrt{-2\lambda - m^2}.$$

- Montrer que l'on a nécessairement $a = 0$, $b \neq 0$ et $l \in \mathbb{N}^*$.

g) Déterminer tous les couples (f, g) de fonctions C^2 tels que la fonction $u : (x, t) \mapsto u(x, t) = f(x)g(t)$ soit non nulle et solution de (1) et (2).