

Correction de la feuille Act_16 : Fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1) La fonction f est polynomiale en x et y , elle possède des dérivées partielles par rapport à ses deux variables.

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y^2 - 4xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 2x^2$$

2) (*non corrigé*)

3) a) La fonction f est polynomiale en x et y , elle possède des dérivées partielles par rapport à ses deux variables.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y + 1.$$

b) $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 + 1 \times 2 + 1 + 2 = 1 + 4 + 2 + 1 + 2 = 10.$

En $(1, 2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \times 1 + 2 + 1 = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1 + 2 \times 2 + 1 = 6.$$

Une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est :

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ici : $z = 5(x - 1) + 6(y - 2) + 10.$

Une équation du plan tangent est $z = 5x + 6y - 7$

c) En écrivant le plan tangent sous la forme :

$$5x + 6y - z = 7,$$

on lit immédiatement un vecteur normal.

Un vecteur normal à ce plan est $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$

4) (*non corrigé*)

5) On applique ici la formule donnant la dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x + t^2) + 2t \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + t^2)$$

6) (*non corrigé*)

7) (*non corrigé*)

8) (*non corrigé*)

9) La fonction f est polynomiale en x et y , elle possède des dérivées partielles par rapport à ses deux variables.

a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x - 6y + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6x + 4y - 2 \end{cases}$$

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x - 6y = -2 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases} \\ \iff (x, y) = (1, 2)$$

f possède un unique point critique : $(1, 2)$

c) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(1+a, 2+b) &= 5(1+a)^2 - 6(1+a)(2+b) + 2(1+a) + 2(2+b)^2 - 2(2+b) + 1 \\ &= 5a^2 - 6ab + 2b^2 + (10+2-12)a + (-6+8-2)b + (5-12+2+8-4+1) \end{aligned}$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(1+a, 2+b) = 5a^2 - 6ab + 2b^2$

Personne ne m'a donné ce résultat, on a vu $f(1+a, 2+b) = 5a^2 - 6ab + 2b^2 + 2$ puis $f(1+a, 2+b) = 5a^2 - 6ab + 2b^2 - 2$

d) En développant on peut écrire pour des réels c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(1+a, 2+b) = c_0 + c_1a + c_2b + c_3ab + c_4a^2 + c_5b^2$$

en dérivant par rapport a et b en $(0, 0)$ on a $c_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ et $c_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$

et comme $(1, 2)$ est un point critique donc $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$

Dans le calcul précédent il était prévisible que les termes en a et b soient nuls.

e) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(1+a, 2+b) &= 5a^2 - 6ab + 2b^2 \\ &= 5 \left(a^2 - \frac{6}{5}ab + \frac{2}{5}b^2 \right) \\ &= 5 \left(\left(a - \frac{3}{5}b \right)^2 - \frac{9}{25}b^2 + \frac{2}{5}b^2 \right) \\ &= 5 \left(a - \frac{3}{5}b \right)^2 + \frac{1}{5}b^2 \end{aligned}$$

et ainsi $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(1+a, 2+b) \geq 0$ on remarque que $f(1, 2) = 0$

Au tableau on avait $f(1, 2) = -2$

on en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq f(1, 2)$

f possède un minimum en $(1, 2)$