$\boxed{\text{Correction de la feuille\_Act\_15 : Géométrie.}}$

Ex 1. 1) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. $D : 3x + 2y = 1$ sous cette forme on lit les coordonnées : $\boxed{\vec{n}(3,2) \text{ est un vecteur normal à } D}$

b. On réécrit $D : 2x - y = -1$ et ainsi $\boxed{\vec{n}(2,-1) \text{ est un vecteur normal à } D}$

c. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1, -5)$, on cherche un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, $\boxed{\vec{n}(5,1) \text{ est un vecteur normal à } D}$

d. on cherche un vecteur orthogonal à $\vec{v}(1,2)$, $\boxed{\vec{n}(2,-1) \text{ est un vecteur normal à } D}$

2) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. on cherche (x, y) vérifiant $-x + 3y = 0$, $\boxed{\vec{v}(3,2) \text{ est un vecteur directeur de } D : -x + 3y = 4}$

b. on cherche (x, y) vérifiant $2x + y = 0$, $\boxed{\vec{v}(1,-2) \text{ est un vecteur directeur de } D : y = -2x + 3}$

c. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3, -3)$, $\boxed{\vec{v}(1,-1) \text{ est un vecteur directeur de } (AB)}$

d. *Question surprenante* : $\boxed{\vec{v}(-1,2) \text{ est un vecteur directeur de } D}$

3) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. Une représentation paramétrique de $D : -x + 2y + 4 = 0$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})}$$

b. Une représentation paramétrique de $D : y = -x + 3$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})}$$

c. Un vecteur directeur de D est :

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1),\ 0 - 1) = (3, -1).$$

La droite passe par $A(-1, 1)$ et est dirigée par $(3, -1)$, donc :

$$(AB) : \boxed{\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})}$$

d. D passe par $A(0, 3)$ et dirigé par $\vec{v}(1, 2)$

$$D : \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})}$$

Ex 2. 1) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. $P : -x + 2y + 4z = 1$ sous cette forme on lit les coorodonnées $\boxed{\vec{n}(-1,2,4) \text{ est un vecteur normal à } P}$

b. $P : 0x + y + 2z = 2$ sous cette forme on lit les coorodonnées $\boxed{\vec{n}(0,1,2) \text{ est un vecteur normal à } P}$

c. Le plan P est engendré par $\vec{AB} = (2, 1, 0)$ et $\vec{BC} = (0, 0, 1)$.
on cherche $\vec{n} = (a, b, c)$ orthogonal à $\vec{AB} = (2, 1, 0)$ et $\vec{BC} = (0, 0, 1)$. $\boxed{\vec{n}(1,-2,0) \text{ est un vecteur normal à } P}$

d. on cherche $\vec{n} = (a, b, c)$ orthogonal à $\vec{u}(1, 2, 1)$ et $\vec{v}(1, -1, 0)$ $\boxed{\vec{n}(1,1,-3) \text{ est un vecteur normal à } P}$

2) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. On résout le système : $(x, y, z) = (-1, 0, 0) + y(2, 1, 0) + z(4, 0, 1)$.
Ainsi, une base de P est $\boxed{\big((2,1,0),(4,0,1)\big)}$

b. On résout le système : $(x, y, z) = (2, 0, 0)+y(-2, 1, 0)+z(0, 0, 1)$. Ainsi, une base de P est $\boxed{\big((-2,1,0),(0,0,1)\big)}$

c. $P = (ABC)$ où $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 2, 0)$ et $C(1, 2, 1)$. $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 1)$.
Ainsi, une base de P est $\boxed{\big((2,1,0),(2,1,1)\big)}$

d. P passant par $A(1,0,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-1,0)$
On cherche deux vecteurs orthogonaux à $(1,-1,0)$.
Une base de P est $\boxed{\big((1,1,0),(0,0,1)\big)}$

3) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. D passant par $A(1,0,3)$ et dirigée par $\vec{v}(1,-1,0)$ $\boxed{\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})}$

b. D définie par $2x+3y-z=1$ et $x+y+z=2$ $\boxed{D : \begin{cases} x = 1-4t \\ y = 3t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}}$

4) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. On peut prendre comme vecteur normal $\vec{n} = (1,-2,0)$. donc $\boxed{P : x-2y=-3}$

b. P passant par $A(1,4,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3,-1,2)$ donc $\boxed{P : 3x-y+2z-5=0}$

c. P passant par $A(1,0,3)$ et de base $(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}(1,2,1)$ et $\vec{v}(1,-1,0)$
Un vecteur normal est $\vec{n} = (1,1,-3)$. donc $\boxed{x+y-3z=-8}$

5) *Plusieurs approches et réponses possibles.*

a. P passant par $A(1,0,3)$ et de base $(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}(1,2,1)$ et $\vec{v}(1,-1,0)$
$\boxed{\begin{cases} x = 1+s+t \\ y = 2s-t \\ z = 3+s \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2}$

b. $\overrightarrow{AB} = (2,1,0)$, $\overrightarrow{AC} = (2,1,1)$, on obtient $\boxed{\begin{cases} x = -1+2s+2t \\ y = 1+s+t \\ z = t \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2}$

c. P passant par $A(1,4,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3,-1,2)$
On peut prendre comme base deux vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$, par exemple $\vec{u} = (1,3,0)$, $\vec{v} = (0,2,1)$.
on obtient : $\boxed{\begin{cases} x = 1+s \\ y = 4+3s+2t \\ z = 3+t \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2}$

Ex 3. 1) $\boxed{A(0,1,0) \in P}$ et $\boxed{(u,v) = \big((-1,2,0),(1,0,2)\big) \text{ est une base de } P}$

2) on lit directement un vecteur normal de $P : 2x+y-z=1$ $\boxed{\vec{n}(2,1,-1) \text{ est un vecteur normal à } P}$

3) Le projeté orthogonal H de M sur P est sur la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}(2,1,-1)$.
Donc H a des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 2+t \\ z = 1-t \end{cases}$ avec t un réel à déterminer.
Comme $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan : $2(3+2t)+(2+t)-(1-t)=1$. ce qui équivaut à $t=-1$ et qui entraine $\boxed{\text{le projeté orthogonal de } M \text{ sur } P \text{ est } H(1,1,2)}$

4) La distance de M au plan P est $d(M,P) = MH$. or $\overrightarrow{MH} = (1-3, 1-2, 2-1) = (-2,-1,1)$, donc $MH = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$.
Finalement

$$\boxed{d(M,P) = \sqrt{6}.}$$