Correction de la feuille Cours_13_2 : Distance d'un vecteur à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Ex 1 : 1) Pour $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 2)$, on a $d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{5}$.
Pour $u = (1, 0, 0, 4)$ et $v = (1, 1, 0, 2)$, on a aussi $d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{5}$.

2) Quels que soient les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, on a $u-w = (u-v)+(v-w)$ donc avec l'inégalité triangulaire *(pour $||.||$)* on a : $||u - w|| = ||u - v|| + ||v - w||$ donc

$$\boxed{d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)}$$

Ex 2 : 1) $(0, 0) \notin D$ donc D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = t \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de D.

3) Pour $v = (1 - 2t, t)$ un vecteur quelconque de D, $d(u, v) = \sqrt{(2 + 2t)^2 + (1 - t)^2}$
On cherche t qui minimise le polynôme $(2 + 2t)^2 + (1 - t)^2 = 5t^2 + 6t + 5$
C'est juste le minimum d'un trinôme on trouve $t = \dfrac{3}{5}$ et alors $d(u, v) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$$\boxed{\text{La distance de } u \text{ à } D \text{ esr égale à } \frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

Ex 3 : Dans tous les cas suivants déterminer la distance de u à F.

1) $(e_1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right)$ est une base orthonormale de $F^\perp$

$$\begin{array}{rcl} p_{F^\perp}(u) & = & < u|e_1 > e_1 \\ & = & \dfrac{1}{2}(1, -1) \end{array}$$

donc

$$\boxed{d(u, F) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Remarque : Ce résultat est facile à vérifier en faisant une figure.

2) *(non corrigé)*
3) *(non corrigé)*
4) *(non corrigé)*
5) *(non corrigé)*
6) *(non corrigé)*
7) *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : *(non corrigé)*

Extrait du programme : Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2.
La démonstration n'est pas exigible. Les coefficients de la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés devront être rappelés.

Voir la feuille consacrée à la régression linéaire.