Correction de la feuille Cours_12 : Théoréme central limite (première forme).

Ex 1 : 1) $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et les X_k sont indépendantes donc $\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$

2) Les X_k sont des gaussiennes indépendantes donc $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est une gaussienne,

de plus $E(Y_n) = 0$ *(linéarité)* et $V(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ *(indépendance)* donc $\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{N}(0,n)}$

Ex 2 : $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ donc *(linéarité)* $E(M_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ $\boxed{E(M_n) = \mu}$

et *(indépendance)* $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ $\boxed{E(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}}$

Ex 3 : 1) On connait l'espérance et la variance de Y donc $\boxed{Y^* = \dfrac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}}$

2) *(stabilité des lois normales)* $\boxed{M_n^* \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)}$

3) a. Avec les résultats de l'Ex 2. $\boxed{M_n^* = \dfrac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}}$

b. *(Réfléchir avant de se lancer, raisonnement classique ; utiliser $Y_n = nM_n$.)*

$$\begin{aligned}
Y_n^* &= \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{V(Y_n)}} \\
&= \frac{nM_n - nE(M_n)}{\sqrt{n^2 V(M_n)}} \qquad \text{(propriétés de l'espérance et de la variance).} \\
&= \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}} = M_n^*
\end{aligned}$$

$$\boxed{Y_n^* = M_n^*}$$

Dans les théorèmes suivant on peut remplacer M_n^* et Y_n^*. (Par exemple dans le TCL)

Ex 4 : 1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance μ et une variance σ^2. On note M_n

2) Pour $a < b$, $\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant M_n^* \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

3) $\lim_{n\to+\infty} P\left(|M_n - \mu| \leqslant \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$

4) En prenant $\alpha = 0{,}05$: on sait que $\Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{0{,}05}{2}\right) \approx 1{,}96$ *(Voir la table donnant les valeurs de Φ)*

On obtient alors $\lim_{n\to+\infty} P\left(|M_n - \mu| \leqslant 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$

Autrement dit :
$\left[M_n - 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; M_n + 1{,}96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ un intervalle de confiance asymptotique de μ au niveau de confiance de 95%.

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}}_{\textit{asymptotique}} P\left(\mu \in \underbrace{\left[M_n - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ M_n + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}_{\text{Intervalle de confiance de } \mu \text{ à } 95\%}\right) = 0{,}95$$

Ex 5 : 1) On se place dans la situation Y_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p mutuellement indépendantes.

On a bien $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et ainsi $Y_n^* = \dfrac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Le théorème central limite permet d'affirmer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(M_n^* \leqslant x) = \Phi(x)$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

et comme $Y_n^* = M_n^*$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n^* \leqslant x) = \Phi(x)$

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N},\ Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) \quad \text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right) = \Phi(x)}$$

2) Pour n assez grand, la loi de $\dfrac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ peut être approchée par la loi $\mathscr{N}(0,1)$ donc

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, la loi de } Y_n \text{ peut être approchée par la loi normale } \mathscr{N}\big(np, np(1-p)\big)}$$

3) On reprend le résutat de l'Ex 5 : $\left[F_n - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; F_n + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ un intervalle de confiance asymptotique de μ au niveau de confiance de 95%.

or on sait que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

donc

$$\boxed{\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } p \text{ au seuil de confiance de } \textit{(au moins)}\ 95\%}$$

Ex 6 : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200; 0{,}4)$.

1) Loi usuelle : $\boxed{E(X) = 80,\ V(X) = 48}$.

2) En considérant $n = 200$ suffisamment grand, sachant que $np \geqslant 10$ et $np(1-p) \geqslant 10$

$$\boxed{\text{on peut approcher la loi de } X \text{ par une loi normale } \mathcal{N}(80, 48)}$$

3)

$$\mathbb{P}(70 \leqslant X \leqslant 90) = P(X \leqslant 90) - P(X \leqslant 69) = P\left(X^* \leqslant \frac{10}{\sqrt{48}}\right) - P\left(X^* \leqslant \frac{-11}{\sqrt{48}}\right) \approx \phi\left(\frac{10}{\sqrt{48}}\right) - \phi\left(\frac{-11}{\sqrt{48}}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(70 \leqslant X \leqslant 90) \approx 0{,}87}$$