Regroupement de tous les programmes de colle de l'année

- **Révisions suites numériques.**

  Suites usuelles. Limites d'une suite réelle.
  Passage à la limite sur une égalité ou sur une inégalité large. Théorèmes de comparaison.
  Croissances comparées des suites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ $(a > 1$ et $\alpha > 0)$. Recherche d'équivalents.
  Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ *(aucun résultat n'est au programme, on redémontre tout)*

- **Révisions : Nombres complexes et trigonométrie.**

  Forme algébrique d'un nombre complexe. Représentation graphique. Affixe d'un point ou d'un vecteur.
  Conjugué, module, arguments. Interprétation graphique.
  Ecriture exponentielle. Notation $e^{i\theta}$, propriétés. Formule d'Euler. Linéarisation.
  Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.
  Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.
  Propriétés de $\cos(\theta)$, de $\sin(\theta)$ et de $\tan(\theta)$. Périodicités et symétries.
  Formules de trigonométrie : $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
  Résolution d'équations trigonométriques simples. $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$ et $a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi) = c$
  Transformation de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$.
  Notation arcsin et arccos. Fonction arctan.

- **Révisions sur les sommes.**

  Révisions sur les sommes. Changement d'indice (*decalage, inversion*). Télescopage.
  Sommes usuelles. *(géométriques, arithmétiques)*
  Propriété de linéarité. Inégalité triangulaire.
  Sommes doubles. Inversion de l'ordre de sommation.

- **Séries numériques.**

  Notation. Série $\sum\limits_{n\geqslant m} u_n$, sommes partielles $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ et en cas de convergence la somme $\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k$.
  Définition de : "La série $\sum u_n$ est convergente" et définition de "$\sum u_n$ est absolument convergente".

  Séries usuelles : $\sum \dfrac{1}{n}$ $\sum \dfrac{1}{n^2}$ $\sum q^n$ $\sum nq^{n-1}$ $\sum n(n-1)q^{n-2}$ $\sum \dfrac{x^n}{n!}$

  La nature des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *n'est pas au programme de BCPST.*
  Valeur de la somme des séries géométriques, géométriques dérivées (d'ordre 1 ou 2), exponentielles. *(démonstrations faites en classe)*
  Condition nécessaire de convergence : si $\sum u_n$ est convergente alors (u_n) converge vers 0. (*Démonstration*)

  Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge.
  Théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs. *(démonstration faite en classe)*
  Théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs. *(démonstration faite en classe)*
  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. *(démonstration faite en classe)*
  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est commutativement convergente. *(admis)*

  Le théorème des séries alternées n'est pas au programme.

- **Révision sur les fonctions polynomiales réelles.**

  Toute fonction polynomiale réelle de degré impair a au moins une racine réelle. *(Démonstration)*
  Fonction polynomiale dérivée.
  Un réel α est une racine multiple d'une fonction polynomiale P si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$ *(Démonstration)*

- **Polynômes.**

  Polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Notation $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
  Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.
  Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
  Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
  Coefficient dominant et degré d'un polynôme. Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.
  Notations $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X], \mathbb{R}_n[X], \mathbb{C}_n[X]$.
  Définition d'une racine α. Théorème : $P(\alpha) = 0 \iff \quad Q \in \mathbb{C}[X] : \; P = (X - \alpha)Q$. *(Démonstration)*
  (La division euclidienne de polynômes est hors programme).
  Généralisation à plusieurs racines distinctes deux à deux.
  Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
  Ordre de multiplicité d'une racine.
  La caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés n'est pas un attendu du programme. *(Le polynôme dérivé n'est pas dans le programme de BCPST, mais on en retrouve au concours.)*

  Cas des polynômes réels : si α est racine, $\overline{\alpha}$ est aussi racine. *(Démonstration)*

  Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. *Ce théorème est admis.*
  La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est hors programme.

- **Python.**

  Etude de suites. Calcul de sommes.

  Méthode des rectangles.

  Représentation graphique avec et sans `numpy`. *(comprendre comment faire une subdivision d'un segment $[a, b]$)*

- **Révision sur les fonctions.**

  Fonctions usuelles. Propriétés, représentations graphiques.
  Définitions : Majorée, bornée, croissante, strictement croissante, ... Définition d'un intervalle.
  Limite d'une fonction. Passage à la limite sur les inégalités larges. Théorèmes de comparaison.
  Croissances comparées des fonctions.
  Théorème de limite monotone.
  Définition d'une fonction continue en x_0. Prolongement par continuité.
  Définition d'une fonction dérivable en x_0. Equation de la tangente.
  Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit et d'un quotient de fonctions dérivables.
  Dérivée d'une composée de fonctions dérivables. Dérivée de la fonction réciproque d'une bijection dérivable.
  Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection.
  L'image continue d'un segment est un segment.
  Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.
  Dérivée et sens de variations.

- **Python.**

  Représentation graphique avec et sans `numpy`.
  Slicing sur les listes et listes en compréhension.

- **Développements limités.**

  Définition. Unicité. Partie régulière.
  Lorsque $a \neq 0$, $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} ax^n + o(x^n) \iff f(x) \underset{x\to 0}{\sim} ax^n$
  Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels. Primitivation.

- **Révisions : Systèmes linéaires.**

  Résolution de système par la méthode du pivot. Notion d'inconnues principales et d'inconnues secondaires.
  Théorème : Un système triangulaire a une unique solution si, et seulement si, il n'a pas de zéro sur sa diagonale.

- **Révisions : Matrices.**

  Opérations sur les matrices. Propriétés. Matrice inversible. Matrice transposée.
  Matrices colonnes, lignes, triangulaires, diagonales ...
  Rang d'une matrice.

- **Espaces vectoriels.**

Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.
Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$
Sous-espace vectoriel. Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
Définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Propriétés. ***Démonstration*** *de* $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ *est un sous-espace vectoriel.*
Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice.
Théorème : Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre. ***(Démo.)***
Base d'un espace vectoriel. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. *(Nous utilisons les notations* $Coord_B(u)$ *pour un vecteur u et* $Mat_B(u_1, ..., u_n)$ *pour une famille.)*
Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$.

On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E. Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$
Dans un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$:
- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Une famille libre ayant n éléments est une base.
- Une famille génératrice ayant n éléments est une base.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
si de plus les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.

Rang d'une famille finie de vecteurs,
il peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Définition du rang d'une matrice A : dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

$\text{rg}(M) = \text{rg}(M^\top)$, donc c'est aussi la dimension de l'espace engendré par les lignes de A.

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M inversible si, et seulement si, $\text{rg}(M) = n$.

Dans un espace vectoriel E de base $\mathscr{B}$,
une famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est une base si, et seulement si sa matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

- **Révisions : Dénombrement.**

Définition d'un ensemble fini et de son cardinal. Propriétés.
Nombre des p-listes. Tirages successifs avec remise.
Nombre des p-listes sans répétitions. Tirages successifs sans remise. Nombre des permutations.
Nombre des p-combinaisons. Tirages simultanés. Dénombrement des parties d'un ensemble fini.
Dénombrement des anagrammes. Somme sur un ensemble fini.

- **Révisions : Probabilité sur un univers fini.**

Quand Ω est fini, on prend $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.

Propriétés et vocabulaire des événements. Définition d'une probabilité. Propriétés.

Cas d'équiprobabilité. Modèles classiques de tirages dans des urnes. Lien avec le dénombrement.

Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales. *(2 versions)*

Formule de Bayes.

Indépendance.

- **Probabilités sur un univers quelconque.**

Ensemble des événements sur un ensemble quelconque : Notion de tribu.

Définition des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et propriétés.

Définition d'un système complet d'événements.

Définition d'une probabilité. (*Axiome de σ-additivité*).

Evénements négligeables, presque sûrs et système quasi-complet d'événements.

Formule des probabilités totales. (*avec un système complet ou un système quasi-complet*) . *(Les deux versions)*

Définition d'une variable aléatoire quelconque.

Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle quelconque.

Propriétés communes à toutes les fonctions de répartition.

Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles, de n VAR, d'une suite de VAR.

Lemme de coalition.

- **Python.**

  Algorithme de Dichotomie. Méthode de Newton. Python et les polynômes.

- **Révisions : Equations différentielles linéaires.**

  Solution de $y'+a(t)y=0$. *(Un espace vectoriel de dimension* 1. *Conséquence : si* $f\neq 0$ *et* $f\in S_0$ *alors* $S_0=\text{Vect}(f)$*)*
  Remarque : La fonction nulle est la seule solution de $y'+a(t)y=0$ qui s'annule sur I.
  Résolution de $y'+a(t)y=f(t)$.
  Principe de superposition. Méthode de variations de la constante.
  Solution de $ay''+by'+cy=0$. (Un espace vectoriel de dimension 2)
  Résolution de $ay''+by'+cy=f(t)$ avec $a\neq 0$.
  Principe de superposition. Conditions initiales.
  La forme d'une solution particulière est donnée lorsque f n'est pas une fonction constante.

- **Variables aléatoires réelles discrètes.**

  Condition d'existence et définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.
  Linéarité. Croissance.
  Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète.
  Condition d'existence et définition de la variance d'une variable aléatoire discrète, de l'écart-type.
  Proposition : $V(aX+b)=a^2\,V(X)$. Formule de Kœnig-Huygens. *(Attention aux conditions d'utilisation)*
  Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X+Y$.
  Généralisation n VAR discrètes indépendantes ou à une suite de VAR discrète.
  Lois usuelles avec $X(\Omega)$ fini : Variable certaine, loi de Bernoulli, uniforme, binomiale. *(Pas hypergéométrique)*
  Lois usuelles avec $X(\Omega)$ dénombrable : Loi géométrique, loi de Poisson.
  Situations types (*pour la binomiale et la géométrique*). (*bien distinguer la définition et les situations types !!*)
  Connaître l'espérance et la variance de ces lois. (*sauf la variance de l'uniforme*)
  Invariance temporelle des lois géométriques. *(démonstration à connaître)*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. ($n\geqslant 30$ et $p\leqslant 0{,}1$)

- **Maximum, minimum et somme de variables aléatoires discrètes.**

  Loi du maximum ou du minimum de deux variables aléatoires indépendantes.
  Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes *(VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$).*
  Loi de la somme de deux VAR discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson. *(Stabilité des lois de Poisson).*
  Généralisation au cas de n variables aléatoires suivant une loi de Poisson.
  Lois de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

- **Python.**

  Simulation des tirages successifs dans des urnes.
  Simulation d'une loi discrète finie quelconque.
  Récupération du nombre d'occurences des valeurs prises par une VAR discrètes au cours de simulations.
  Estimation de l'espérance et de la loi d'une VAR discrète par des séries de simulations.

- **Applications linéaires.**

  Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.
  Notation $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$. Notation f^n pour $n\in\mathbb{N}$.
  Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque.
  Propriétés de ces opérations.
  Noyau. Lien avec l'injectivité. Image. Lien avec la surjectivité.
  On montre que le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

- **Révision sur les applications linéaires.**

  Etude d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ définie par sa matrice dans les bases canoniques

- **Python.**

  Méthode d'Euler. *Equation du premier ordre d'inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$. Système différentiel. Equation du second ordre d'inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

- **Application linéaire en dimension finie.**

Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. *(Contre-exemple en dimension infinie)*

Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des endomorphismes bijectifs.

Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

L'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ v & \longmapsto & \text{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \end{array}$ est un isomorphisme.

Matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, une base ayant été choisie pour chacun d'eux.

Théorème : $\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\ \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque d'un isomorphisme.

Matrice de f^n.

Les démonstrations ont été faites avec la proposition :

Si on trouve une matrice A vérifiant $\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\ \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$ alors $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = A$

Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible,

Matrice vue comme une application linéaire.

La matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est canoniquement associée à $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$

Changement de base. Matrice de changement de base. (notation $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$)

Action sur les coordonnées d'un vecteur. Action sur la matrice d'un endomorphisme.

"Toute identification entre vecteur de $\mathbb{K}^n$ et sa représentation matricielle dans une base, même canonique, est à éviter".

Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Théorème du rang pour une matrice.

Matrices semblables. *(Utilisation pour le calcul des puissances de matrices).*

Extrait du programme : *"On ne parlera pas de matrices équivalentes".*

- **Diagonalisation.**

Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Définition du spectre.
Différentes caractérisations des valeurs propres.
Définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme, d'une matrice.
Définition du sous-espace propre (noté $E_\lambda(f)$ ou $E_\lambda(M)$).
Spectre d'une matrice triangulaire.

En dimension finie,

lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.

En dimension quelconque :

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

En dimension n :

Un endomorphisme a au plus n valeurs propres distinctes, *même proposition pour une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure à n.

Définition d'un endomorphisme diagonalisable. Définition d'une matrice carrée diagonalisable.

(Condition suffisante)

Un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. *(et alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1)*

(Condition nécessaire et suffisante)

Un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de leurs sous-espaces propres est égale à n.

"Diagonaliser un endomorphisme f" signifie déterminer une base de E pour laquelle $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

"Diagonaliser une matrice carrée M" signifie déterminer deux matrices : $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

Calcul de puissances de matrice. Système différentiel.

- **Python.**
  Module `numpy`, incluant le sous-module `linalg` avec les fonctions `eig` et `eigvals`

- **Révisions : Intégrales d'une fonction continue sur un segment.**
  Somme de Riemann, linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, primitives,
  Théorème fondamental de l'Analyse.
  Parité, périodicité et intégration.
  Intégration par parties. Changement de variable de classe C^1. *(Doit être donné sauf dans le cas affine.)*

- **Intégrales généralisées.**
  Convergence d'une intégrale impropre pour une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
  Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
  Cas d'une fonction continue sur un intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  Propriétés. Linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, stricte positivité.
  Cas des fonctions paires et des fonctions impaires.
  Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \leqslant g$.
  Théorème de convergence pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \sim g$.
  Définition d'une intégrale absolue convergente. Théorème : $\int f$ ACV $\Rightarrow \int f$ CV.
  Intégrales généralisées usuelles : ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $a < b$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\ \mathrm{d}t = b - a \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ \mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}$$

  Adaptation de la formule d'intégration par parties aux intégrales généralisées.
  On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.
  Théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

- **Variables aléatoires réelles à densité.**
  Définition d'une densité de probabilité. Définition d'une variable aléatoire réelle à densité.
  Caractérisation des variables à densité (*CNS permettant de dire qu'une variable aléatoire est à densité*).
  Savoir passer d'une densité à la fonction de répartition ou de la fonction répartition à une densité.
  Dans ce contexte, pour répondre à "Donner la loi de X" :
  ① on détermine la fonction de répartition de X.
  ② on justifie (*si c'est le cas*) que X est une variable aléatoire à densité.
  ③ on détermine une densité de X.
  Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
  Loi du maximum ou du minimum de variables aléatoires indépendantes.
  Espérance d'une variable à densité, propriétés. Théorème de transfert. Variance, écart-type.

  Lois usuelles à densité :
  Loi uniforme sur $[a, b]$. Densité. Fonction de répartition, espérance, variance, écart-type, simulation.
  Stabilité de l'ensemble des lois uniformes par transformation affine.
  Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in]0; +\infty[$) .
  Densité. Fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.
  Loi sans mémoire. (*à savoir redémontrer*)
  Simulation de la loi exponentielle.
  Loi normale centrée réduite. Densité, allure des courbes. Propriété de la fonction de répartition. (notée Φ)
  Fonction des quantiles (*réciproque de* Φ). Notée $\alpha \longmapsto u_\alpha$.
  Lecture d'une table donnant les valeurs de Φ sur $[0, 3]$ et/ou utilisation de la calculatrice et/ou Python.
  (Savoir trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ pour $x \in [-3, 3]$ et un encadrement de u_α pour $\alpha \in]0, 1[$).
  Loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  Stabilité de l'ensemble des lois normales par transformation affine.
  En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
  Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité. *(Produit de convolution)*
  Somme (combinaison linéaire) de gaussiennes indépendantes.

- **Informatique.**

  Fonction de calcul de la moyenne et l'écart-type d'une série statistique.

  Fonction qui renvoie le tableau de valeurs des fréquences cumulées d'une série statistique.

  Simulation de la réalisation d'une variable aléatoire X suivant une loi usuelle discrète ou continue.

  Avec une longue série de simulations :

  - Estimation d'une probabilité. *(fréquence des réalisations)*
  - Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire *(moyenne arithmétique des réalisations)*
  - Estimation de la fonction de répartition *(Courbe des fréquences cumulées)*

- **Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.**

  Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Ecriture matricielle. Bilinéarité.
  Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Cas d'égalité.
  Vecteurs orthogonaux. de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  Théorème de Pythagore. *(Enoncés et démonstrations)*
  Base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
  Le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales.
  Savoir trouver une base orthonormale d'une droite ou d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

  On admet qu'il existe une base orthonormale de tout sous-espace F dès que F n'est pas réduit au vecteur nul.

  Si P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales alors P est inversible et $P^{-1} = P^\top$

  Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. *(Démonstration)*

  Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale.

  L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, noté $F^\perp$
  L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$.
  x_F est alors le projeté orthogonal de x sur F et $x_{F^\perp}$ est alors le projeté orthogonal de x sur $F^\perp$
  On appelle projection orthogonale sur le sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ l'application p qui à tout $x \in \mathbb{R}^n$ associe x_F.
  Propriétés : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. $(F^\perp)^\perp = F$
  La projection orthogonale sur le sous-espace F est l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

  $$p \circ p = p, \qquad \mathrm{Im}(p) = F \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(p) = F^\perp.$$

  Relation : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

  Écriture du projeté orthogonal d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans une base orthonormale de F.
  La diagonalisation d'une projection orthogonale a été vue en exercice, mais n'est pas un objectif du programme.

  Distance entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
  Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
  Théorème : distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, interprétation en termes de projection orthogonale.

- **Couples de variables aléatoires discrètes.**

  Loi conjointe. Lois marginales. Lois conditionnelles.

  Théorème de transfert : espérance de $u(X,Y)$. *(on ne traitera que le cas $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis).*

  Exemples de recherche de la loi de $u(X,Y)$, le couple ayant une loi conjointe connue.
  En particulier $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$, $X+Y$.

  Somme de deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. *(pas nécessairement indépendantes).*

  Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.

  Covariance. Propriétés. Variance de $X+Y$.

- **Statistiques.**

  Principe de la régression linéaire. Meilleure approximation affine par la méthode des moindres carrées.
  Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2 .
  La démonstration n'est pas exigible.
  Les coefficients de la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés devront être rappelés.

- **Théorèmes limites.**

  Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

  Loi faible des grands nombres. *(La notion de convergence en probabilité n'est pas au programme de BCPST)*

  Les notions d'échantillons, de biais, d'estimateurs ne sont plus au programme.
  Mais ces notions ont été systématiquement rappelées et utilisées dans les exercices.

  Définition de la moyenne empirique : $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, de l'écart-type empirique $S_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2}$

  (*savoir montrer que* $E(M_n) = \mu$, $E(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ et $E(S_n^2) = \sigma^2 - \dfrac{\sigma^2}{n}$)

  Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires (X_n) vers une variable aléatoire X.

  Cas particulier où X et les X_n prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$.

  Convergence en loi d'une suite de VAR de lois binomiales vers une variable aléatoire de loi de Poisson.

  Approximation d'une loi par la loi de la variable limite. *(Les critères d'approximation devront être explicités)*

  Théorème central limite (*première forme*). *(Pour la somme et la moyenne empirique)*

  Cas de la loi binomiale. (*Théorème de Moivre-Laplace.*)

  Théorème central limite (*deuxième forme*). $\left(\dfrac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\geqslant 1} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  l'écart-type empirique corrigé $S'_n = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2}$ (*savoir montrer que* $E(S_n'^2) = \sigma^2$)

  Théorème central limite (*deuxième forme, deuxième version*). $\left(\dfrac{M_n - \mu}{\frac{S'_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\geqslant 1} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  (Nous avons fait le lien avec la loi de Student et les intervalles de confiance)

  Nous avons vu la notion d'intervalle de confiance asymptotique, mais elle n'apparaît pas dans le programme de BCPST.

  Test de conformité à la moyenne.

- **Révisions : Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.**

  Sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ demi-plan, disque, pavé. Ensemble de définition.
  Fonctions partielles. Surface représentatives). Courbes ou lignes de niveau.
  Continuité.
  Dérivées partielles. Fonction C^1 sur un pavé ouvert du plan.
  Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe C^1 découlant de petites variations sur les variables.
  Gradient.
  Dérivation de $t \longmapsto f(x(t), y(t))$
  Définition de point critique. Lien avec l'éventuelle existence d'un extremum.

  Application à l'ajustement affine par les moindres carrés.

  Dérivées partielles d'ordre 2. Le théorème de Schwartz est admis.