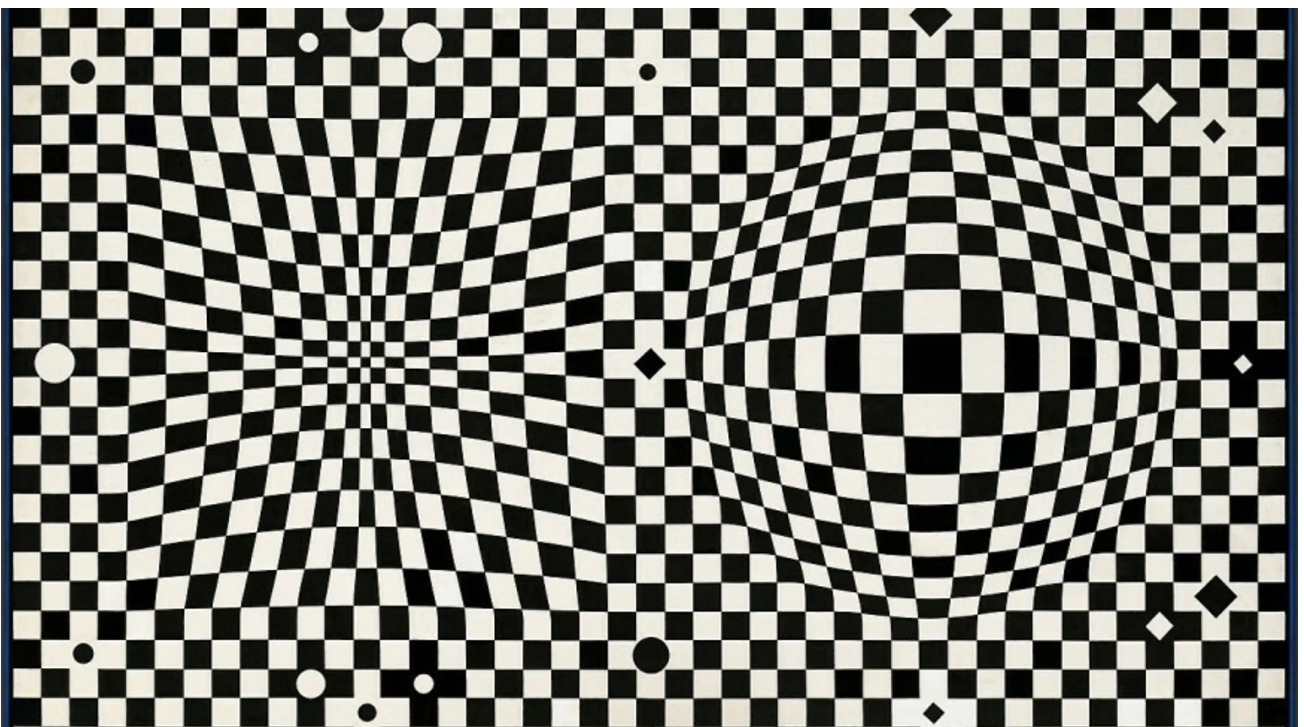


# Cours de BCPST 1

Mathématiques

BCPST 2A (*Marcelin Berthelot*)



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Outils</b>	<b>5</b>
1.1	Vocabulaire de la logique et des ensembles.	6
1.2	Nombres.	11
1.3	Trigonométrie.	23
1.4	Méthodes de calcul.	27
1.5	Vocabulaire des applications.	33
1.6	Ensembles finis. Dénombrement.	38
<b>2</b>	<b>Suites réelles.</b>	<b>45</b>
2.1	Suites réelles.	45
2.2	Limite de suite réelle.	46
2.3	Convergence et inégalités.	47
2.4	Opérations et limites.	48
2.5	Conséquences de la propriété de la borne supérieure.	49
2.6	Echelle de comparaison.	49
2.7	Suites équivalentes.	50
<b>3</b>	<b>Fonctions</b>	<b>51</b>
3.1	Généralités	51
3.2	Limite d'une fonction.	52
3.3	Continuité sur un intervalle.	56
3.4	Dérivation.	58
<b>4</b>	<b>Intégrales d'une fonction continue sur un segment.</b>	<b>69</b>
4.1	Définitions	69
4.2	Sommes de Riemann	70
4.3	Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue.	71
4.4	Théorème fondamental	73
4.5	Parité et périodicité.	74
4.6	Positivité stricte.	77
4.7	Calculs d'intégrales.	77
<b>5</b>	<b>Systèmes, matrices</b>	<b>79</b>
5.1	Systèmes linéaires.	79
5.2	Systèmes triangulaires sans zéro sur la diagonale.	81
5.3	Systèmes sous forme échelon.	82
5.4	Méthode du pivot.	82
5.5	Matrices.	83
5.6	Opérations.	84
5.7	Matrice inversible.	88
5.8	Matrice transposée.	91
<b>6</b>	<b>Espaces vectoriels <math>\mathbb{K}^n</math></b>	<b>93</b>
6.1	Structure vectorielle.	93
6.2	Sous-espace vectoriel	94
6.3	$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$	94
6.4	Familles libres.	96
6.5	Bases.	97
6.6	Coordonnées dans une base.	97
6.7	Dimension d'un sous-espace vectoriel	99
6.8	Famille libre, famille génératrice et dimension.	100
6.9	Systèmes linéaires homogènes et dimension.	101

6.10	Rangs. . . . .	101
<b>7</b>	<b>Application linéaires</b>	<b>103</b>
7.1	Applications linéaires. . . . .	103
7.2	Opérations et applications linéaires. . . . .	105
7.3	Noyau et Image. . . . .	106
7.4	Image d'une base. . . . .	108
7.5	Représentation matricielle. . . . .	109
7.6	Rang d'une application linéaire. . . . .	110
<b>8</b>	<b>Probabilité sur un univers fini.</b>	<b>113</b>
8.1	Probabilité sur un univers fini. . . . .	113
8.2	Conditionnement et indépendance. . . . .	116
<b>9</b>	<b>Variables aléatoires finies.</b>	<b>121</b>
9.1	Définitions. . . . .	121
9.2	Ensemble des valeurs prises. . . . .	122
9.3	Variables aléatoires et événements. . . . .	122
9.4	Système complet associé à une variable aléatoire. . . . .	122
9.5	Loi de probabilité. . . . .	122
9.6	Fonction de répartition. . . . .	123
9.7	Indépendance . . . . .	126
9.8	Lois usuelles. . . . .	127
<b>10</b>	<b>Equations différentielles.</b>	<b>129</b>
10.1	Equations différentielles homogènes. . . . .	129
10.2	Equation avec second membre. . . . .	130
10.3	Principe de superposition. . . . .	132
10.4	Méthode de variation de la constante. . . . .	133
10.5	Condition initiale. . . . .	133
<b>11</b>	<b>Géométrie dans le plan et dans l'espace.</b>	<b>135</b>
11.1	Introduction. . . . .	135
11.2	Produit scalaire. . . . .	138
11.3	Droites et cercles du plan. . . . .	139
11.4	Droites et plans de l'espace. . . . .	140
11.5	Projection orthogonale . . . . .	143
<b>12</b>	<b>Fonctions réelles de deux variables réelles.</b>	<b>145</b>
12.1	Surface représentative. . . . .	145
12.2	Courbes (lignes) de niveaux. . . . .	145
12.3	Dérivées partielles du premier ordre. . . . .	146
12.4	Fonctions de classe $C^1$ . . . . .	146
12.5	Développement limité d'ordre 1 . . . . .	147
12.6	Gradient. . . . .	147
12.7	Dérivation de $t \mapsto f(x(t), y(t))$ . . . . .	148
12.8	Dérivées partielles de $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ . . . . .	148
12.9	Condition nécessaire pour avoir un extremum local. . . . .	148
12.10	Dérivée partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz. . . . .	149
<b>13</b>	<b>Statistique.</b>	<b>151</b>
13.1	Statistique univariée. . . . .	151
13.2	Statistique bivariée. . . . .	153
<b>Annexes</b>		<b>157</b>
<b>A</b>	<b>Suites usuelles.</b>	<b>157</b>
A.1	Suites arithmétiques. . . . .	157
A.2	Suites géométriques. . . . .	157
A.3	Suites arithmético-géométriques. . . . .	158
A.4	Réurrence linéaire d'ordre 2. . . . .	158

<b>B</b>	<b>Suites <math>u_{n+1} = f(u_n)</math>.</b>	<b>161</b>
B.1	Intervalle stable. . . . .	161
B.2	Que dire des limites possibles de $(u_n)$ ? . . . . .	162
B.3	Comment étudier la monotonie de $(u_n)$ ? . . . . .	162
B.4	Des représentations graphiques. . . . .	164
<b>C</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>165</b>
C.1	Polynômes du second degré. . . . .	165
C.2	Fonction $x \mapsto x^n$ . $n \in \mathbb{Z}^*$ . . . . .	166
C.3	Fonction valeur absolue. . . . .	167
C.4	Fonction racine carrée. . . . .	167
C.5	Exponentielle. . . . .	168
C.6	Logarithme népérien. . . . .	169
C.7	Lien entre exp et ln. . . . .	170
C.8	Logarithme décimal. . . . .	171
C.9	Fonctions cosinus et sinus. . . . .	172
C.10	Fonction tangente. . . . .	173
C.11	Fonction partie entière. . . . .	173
C.12	$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . . . . .	174
C.13	$x \mapsto a^x$ ( $a$ un réel strictement positif) . . . . .	175
C.14	Fonction racine $n$ -ième. . . . .	175
C.15	Fonction arctangente. . . . .	176
C.16	Graphes des fonctions associées. . . . .	177
C.17	Symétries des courbes représentatives. . . . .	179
<b>D</b>	<b>Fonctions à valeurs complexes</b>	<b>181</b>
<b>E</b>	<b>Fonctions polynomiales.</b>	<b>183</b>
E.1	Généralités. . . . .	183
E.2	Racine d'une fonction polynomiale. . . . .	185
<b>F</b>	<b>Développements limités</b>	<b>187</b>
F.1	Définition, notation, unicité. . . . .	187
F.2	Troncature. . . . .	188
F.3	Lien avec les équivalents. . . . .	188
F.4	Formule de Taylor-Young. . . . .	188
F.5	DL usuels en 0. . . . .	188
F.6	Sommes et produits. . . . .	189
F.7	Primitivation d'un DL. . . . .	189
F.8	Lien avec la régularité de $f$ . . . . .	189
<b>G</b>	<b>Raisonnements. Rédaction.</b>	<b>191</b>
G.1	Pour montrer $A = B$ . . . . .	191
G.2	Démontrer une implication. . . . .	192
G.3	Démontrer une équivalence. . . . .	192
G.4	Raisonnement par disjonction des cas. . . . .	193
G.5	Raisonnement par contraposée. . . . .	193
G.6	Raisonnement par l'absurde. . . . .	193
G.7	Raisonnement par analyse-synthèse. . . . .	193
G.8	Résoudre une équation. . . . .	194

# Outils

## Plan du chapitre

1.1	Vocabulaire de la logique et des ensembles. . . . .	<b>6</b>
1.1.1	Logique élémentaire. . . . .	6
1.1.2	Quantificateurs universel et existentiel : . . . . .	6
1.1.3	Implication et équivalence. . . . .	7
1.1.4	Vocabulaire des ensembles. . . . .	8
1.2	Nombres. . . . .	<b>11</b>
1.2.1	Nombres entiers. . . . .	11
1.2.2	Nombres réels. . . . .	12
1.2.3	Nombres complexes. . . . .	17
1.2.4	Interprétations graphiques des nombres complexes. . . . .	20
1.2.5	Trinôme à coefficients réels. . . . .	22
1.3	Trigonométrie. . . . .	<b>23</b>
1.3.1	Dans le triangle rectangle. . . . .	23
1.3.2	Dans le cercle trigonométrique. . . . .	23
1.3.3	Périodicités. . . . .	24
1.3.4	Symétries. . . . .	24
1.3.5	Valeurs remarquables. . . . .	25
1.3.6	Formules. . . . .	25
1.3.7	Equations. . . . .	25
1.3.8	Arcsinus, arccosinus et arctangente. . . . .	26
1.3.9	Transformation d'une expression de la forme : $a \cos(x) + b \sin(x)$ . . . . .	26
1.3.10	Linéarisation . . . . .	26
1.4	Méthodes de calcul. . . . .	<b>27</b>
1.4.1	Sommes. . . . .	27
1.4.2	Produits, factorielles. . . . .	28
1.4.3	Coefficients binomiaux. . . . .	29
1.4.4	Sommes doubles. . . . .	32
1.5	Vocabulaire des applications. . . . .	<b>33</b>
1.5.1	Introduction. . . . .	33
1.5.2	L'application composée. . . . .	34
1.5.3	Injections, surjections. . . . .	34
1.5.4	Bijection et application réciproque. . . . .	36
1.5.5	Fonctions indicatrices. . . . .	38
1.6	Ensembles finis. Dénombrement. . . . .	<b>38</b>
1.6.1	Généralités . . . . .	38
1.6.2	Propriétés du cardinal. . . . .	39
1.6.3	Dénombrement des ensembles classiques. . . . .	40
1.6.4	Nombre d'anagrammes. . . . .	42
1.6.5	Applications et cardinal. . . . .	42
1.6.6	Somme sur un ensemble fini. . . . .	43

## 1.1 Vocabulaire de la logique et des ensembles.

### 1.1.1 Logique élémentaire.

#### Définition : Négation, et/ou

Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions :

- $(\text{NON } P)$  qui est vraie si  $P$  est fausse et fausse sinon.
- $(P \text{ ou } Q)$  qui est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie, et fausse sinon.
- $(P \text{ et } Q)$  qui est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  sont vraies, et fausse sinon.

#### Remarques :

- Vrai et Faux les deux "valeurs de vérités".
- On dit que  $P$  équivaut à  $Q$  quand ils ont même valeur de vérité.

#### Propriétés.

$(P \text{ et Vrai})$ équivaut à $P$	$(P \text{ ou Vrai})$ équivaut à Vrai
$(P \text{ et Faux})$ équivaut à Faux	$(P \text{ ou Faux})$ équivaut à $P$
$(P \text{ et } P)$ équivaut à $P$	$(P \text{ ou } P)$ équivaut à $P$
$(P \text{ et } Q)$ équivaut à $(Q \text{ et } P)$	$(P \text{ ou } Q)$ équivaut à $(Q \text{ ou } P)$
$P \text{ et } (Q \text{ et } R)$ équivaut à $(P \text{ et } Q) \text{ et } R$	$P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$ équivaut à $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$

**Remarque :** Quand il n'y a que des "et" ou que des "ou", on peut enlever les parenthèses.

#### (Négation du "et" et du "ou")

$$\begin{aligned} \text{Non}(P \text{ et } Q) &\text{ équivaut à } \text{Non}(P) \text{ ou } \text{Non}(Q) \\ \text{Non}(P \text{ ou } Q) &\text{ équivaut à } \text{Non}(P) \text{ et } \text{Non}(Q) \end{aligned}$$

**Remarque :** La négation d'un "et" est un "ou"; La négation d'un "ou" est un "et".

#### Distributivité du "et" sur le "ou" et du "ou" sur le "et"

$$\begin{aligned} P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &\text{ équivaut à } (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R) \\ P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &\text{ équivaut à } (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R) \end{aligned}$$

**Remarque :** Faire bien attention à l'usage des parenthèses quand il y a des "et" et des "ou".

### 1.1.2 Quantificateurs universel et existentiel :

#### Définitions

$P(x)$  désigne une proposition dépendant d'une variable  $x$  élément un ensemble  $E$  :

- $\forall x \in E, P(x)$  qui signifie : pour chaque  $x$  élément de  $E$  la proposition  $P(x)$  est vraie.
- $\exists x \in E, P(x)$  qui signifie : il existe au moins un  $x$  de  $E$  pour lequel  $P(x)$  est vraie
- $\exists! x \in E, P(x)$  qui signifie : il existe un unique  $x$  de  $E$  pour lequel  $P(x)$  est vraie

Autrement dit cela signifie que :

$$\underbrace{(\exists x \in E, P(x))}_{\text{existence}} \text{ et } \underbrace{\forall (x_1, x_2) \in E^2, (P(x_1) \text{ et } P(x_2)) \implies x_1 = x_2}_{\text{unicité}}$$

On dit aussi :  $\forall x \in E, P(x)$  signifie : **pour tout**  $x$  élément de  $E$  la proposition  $P(x)$  est vraie.  
 $\forall x \in E, P(x)$  signifie : **quel que soit**  $x$  élément de  $E$  la proposition  $P(x)$  est vraie.

**Négation de proposition avec des quantificateurs**

$$\begin{aligned} \text{Non}[\forall x \in E, P(x)] &\text{ équivaut à } \exists x \in E : \text{Non}[P(x)] \\ \text{Non}[\exists x \in E : P(x)] &\text{ équivaut à } \forall x \in E, \text{Non}[P(x)] \end{aligned}$$

**Chaines de quantificateurs**

Les quantificateurs, s'écrivent toujours à gauche des propositions, l'ordre dans lequel ils sont écrits à en général une importance, en enlève les parenthèses quand il n'y a pas d'ambiguïté.

**Exemple :**

La proposition  $\forall x \in E, \underbrace{(\exists y \in F : R(x, y))}_{P(x)}$ , s'écrit  $\forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y)$

Il faut bien distinguer les deux propositions suivantes :

$$\forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y) \quad \text{et} \quad \exists y \in F : \forall x \in E, R(x, y)$$

Dans la proposition  $\forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y)$ ,  $y$  peut être différent pour chaque  $x$  de  $E$ .

Dans la proposition  $\exists y \in F : \forall x \in E, R(x, y)$ , on doit avoir un  $y$  qui ne dépend pas de  $x$ .

Quand on nie une proposition de ce type on remplace les  $\exists$  par des  $\forall$  et inversement les  $\forall$  par des  $\exists$  puis on nie la proposition  $R(x, y)$ .

**Exemple :**

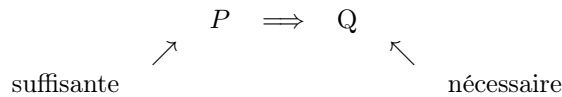
La négation de la proposition  $\forall x \in E, \exists y \in F : R(x, y)$  est :  $\exists x \in E : \forall y \in F, \text{Non}(R(x, y))$

**1.1.3 Implication et équivalence.**

**Définition formelle.**

On note  $P \implies Q$  la proposition ( $P$  et  $Q$ ) ou ( $\text{Non}(P)$ ). (ou plus simplement  $\text{Non}(P)$  ou  $Q$ )  
 On note  $P \iff Q$  la proposition ( $P$  et  $Q$ ) ou ( $\text{Non}(P)$  et  $\text{Non}(Q)$ )

• **Implication :**  $\boxed{P \implies Q}$  : "Si  $P$  (vraie) alors  $Q$  (vraie)"



**Transitivité :**  $P \implies Q$  et  $Q \implies R$  entraîne  $P \implies R$

• **Equivalence**  $\boxed{P \iff Q}$  : " $P$  (vraie) si, et seulement si,  $Q$  (vraie)"

$$P \iff Q \text{ équivaut à } (P \implies Q \text{ et } Q \implies P)$$

$Q$  est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que  $P$  soit vraie.

**Transitivité :**  $P \iff Q$  et  $Q \iff R$  entraîne  $P \iff R$

En pratique les implications sont associées à un quantificateur universel avec  $P$  et  $Q$  dépendant d'une variable.

$$\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$$

## Implication réciproque

L'implication réciproque de l'implication  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$  est :

$$\forall x \in E, Q(x) \implies P(x)$$

**Remarque :** Une implication et sa réciproque n'ont pas toujours la même valeur de vérité.

**Exemple :**  $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \implies x^2 \geq 1$  est vraie contrairement à sa réciproque.

## Contraposée

La forme contraposée de l'implication  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$  est :

$$\forall x \in E, \text{non}(Q(x)) \implies \text{non}(P(x))$$

**Remarques :**

- Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité (*elles sont équivalentes*).
- Les propositions :  $\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)$  et  $\forall x \in E, \text{Non}(P(x)) \iff \text{Non}(Q(x))$  sont équivalentes.

## Négation d'une implication.

La négation de l'implication  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$  est :  $\exists x \in E : P(x) \text{ et } \text{Non}(Q(x))$ .

**Remarques :**

- La négation d'une implication est un "et", elle ne s'exprime pas avec une implication.
- La valeur de  $x$  qui permet de montrer qu'une implication est fautive, est appelée **contre-exemple**.

On retrouve cette situation dans la définition des familles libres/liées dans le cours : Espace vectoriel.

### 1.1.4 Vocabulaire des ensembles.

#### Généralités.

- On note  $\emptyset$  l'ensemble vide (*celui qui ne contient rien*)
- On note  $a \in E$  :  $a$  est élément d'un ensemble  $E$ . Sa négation se note  $a \notin E$ .
- On note  $A \subset B$  la proposition :  $\forall x, x \in A \implies x \in B$ .  
"les éléments de  $A$  sont tous des éléments de  $B$ ". Sa négation se note  $A \not\subset B$ .
- Lorsque  $A \subset B$  on dit que  $A$  est un **sous-ensemble** de  $B$  ou une **partie** de  $B$ .
- Un ensemble ne contenant qu'un élément est appelée **singleton**. On note  $\{a\}$ .
- Un ensemble contenant exactement deux éléments est appelée **paire**. On note  $\{a; b\}$  (*avec  $a \neq b$* ).
- Un ensemble contenant exactement  $n$  éléments est appelée  **$n$ -combinaisons**.  
On note  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  (*avec  $\forall (i, j) \in [1; n], i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$* )
- Pour  $E$  un ensemble quelconque, on note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

$$\forall A, A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E) \quad \emptyset \in \mathcal{P}(E) \quad E \in \mathcal{P}(E)$$

#### Deux écritures d'ensembles

##### Ensemble défini par une propriété caractéristique.

Soient  $E$  un ensemble et  $P(x)$  une proposition dépendant de  $x$  un élément de  $E$ .

Il existe un seul ensemble  $A \subset E$ , tel que pour tout  $x \in E$ , on a :  $x \in A \iff P(x)$ .

On le note :  $A = \{ x \in E \mid P(x) \}$

On lit : " $A$  est l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  vérifiant la proposition  $P(x)$ ".

On dit aussi que  $P(x)$  caractérise les éléments  $x$  de  $A$ .

##### Ensemble défini par une représentation paramétrique.

Soient  $I$  et  $E$  deux ensembles et  $f$  une application qui à chaque élément  $t$  de  $I$  associe  $f(t)$  dans  $E$ .

L'ensemble  $A = \{ x \in E \mid \exists t \in I : x = f(t) \}$  peut aussi s'écrire :  $A = \{ f(t) \mid t \in I \}$ .

On lit : " $A$  est l'ensemble des  $f(t)$  lorsque  $t$  décrit  $I$ ".

**Complémentaire. Intersection, réunion, différence de deux ensembles.****Définitions.**

$A$  et  $B$  désignent deux parties d'un ensemble  $E$ ,

- complémentaire de  $A$  (dans  $E$ ) :  $\complement_E A = \{ x \in E \mid x \notin A \}$
- intersection de  $A$  et  $B$  :  $A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$  (On lit " $A$  inter  $B$ ")
- réunion de  $A$  et  $B$  :  $A \cup B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$  (On lit " $A$  union  $B$ ")
- Différence de  $A$  par  $B$  :  $A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}$  (On lit " $A$  privé de  $B$ ")

**Remarques :**

- ① On pourra aussi noter  $\overline{A} = \complement_E A$
- ② Dire que  $A$  et  $B$  sont disjoints signifie que :  $A \cap B = \emptyset$ .
- ③ Dire que les  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont 2 à 2 disjoints signifie que :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

**Propriétés :**

$A, B$  et  $C$  désignent des parties d'un ensemble  $E$ .

$$\overline{\emptyset} = E \quad \overline{E} = \emptyset \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

$$\overline{(\overline{A})} = A \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Distributivités :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Notations**  $\bigcap_{k=1}^n$  et  $\bigcup_{k=1}^n$

**Réunion et intersection** d'un nombre fini de parties.

**Définition.**

Soit  $n$  un entier non nul et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des parties de  $E$

- l'**intersection** des  $A_k$  :  $\bigcap_{k=1}^n A_k = \{ x \in E \mid \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x \in A_k \}$ .
- la **réunion** des  $A_k$  :  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \{ x \in E \mid \exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket : x \in A_k \}$

**Propriétés :**

Complémentaires d'une union et d'une intersection :

$$\overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k} \quad \overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$$

Distributivités :

$$B \cup \left( \bigcap_{k=1}^n A_k \right) = \bigcap_{k=1}^n (B \cup A_k) \quad B \cap \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$$

**Produit cartésien.**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,

on note  $E \times F$  (on lit " $E$  croix  $F$ ") l'ensemble de tous les couples  $(x, y)$  dont la première composante  $x$  est un élément de  $E$  et la seconde de  $F$ .

**Propriété fondamentale :**

$$\text{Pour tous } a \in E, a' \in E, b \in F \text{ et } b' \in F, \quad (a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Si  $A, B$  et  $C$  sont trois ensembles,

on pose  $(A \times B) \times C = A \times B \times C$  et les éléments sont notés  $(x, y, z)$  et sont appelés triplets.

On définit de même  $(A \times B \times C) \times D = A \times B \times C \times D$  etc ...

Pour  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$  et  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des ensembles,

les éléments de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  sont notés  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et sont appelées listes ou  $n$ -uplets

**Propriété fondamentale :**

$$\text{Pour tous } x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n \text{ et } x'_1 \in E_1, x'_2 \in E_2, \dots, x'_n \in E_n,$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad x_i = x'_i$$

Pour  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$  et  $E$  un ensemble, on note :

$$E^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad x_i \in E \}$$

Les éléments de  $E^2$  sont appelés couples d'éléments de  $E$ , de  $E^3$  les triplets d'éléments de  $E$ .

Pour  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2, les éléments de  $E^n$  sont appelés listes de  $n$  éléments de  $E$ .  
éléments de la liste sont distincts (deux à deux) ont dit que ce sont des listes sans répétition.

**Notations  $\bigcap$  et  $\bigcup$** 

**Réunion et intersection** d'un nombre indéfini de parties.

**Définition.**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ .

- l'**intersection** des  $A_i$  :  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i \}$ .
- la **réunion** des  $A_i$  :  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \in E \mid \exists i \in I : \quad x \in A_i \}$

**Propriétés :**

Complémentaires d'une union et d'une intersection :

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

Distributivités :

$$B \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \qquad B \cap \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

## 1.2 Nombres.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

### 1.2.1 Nombres entiers.

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels :  $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

On note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs :  $\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

#### Notation.

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs vérifiant  $a \leq b$ ,

on note  $\llbracket a; b \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris entre  $a$  et  $b$  au sens large.

autrement dit :  $\llbracket a; b \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k \leq b\}$

(C'est l'ensemble des entiers relatifs  $k$  vérifiant  $a \leq k \leq b$ )

on note  $\llbracket a; +\infty \llbracket$  l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à  $a$ .

autrement dit :  $\llbracket a; +\infty \llbracket = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k\}$

(C'est l'ensemble des entiers relatifs  $k$  vérifiant  $a \leq k$ )

Attention : ce ne sont pas des intervalles.

#### Raisonnement par récurrence.

$n_0$  désigne un entier naturel et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de propositions (d'assertions).

$P_0, P_1, P_2, \dots$  sont des affirmations, pour chaque  $n$ ,  $P_n$  peut être vraie ou fausse.

#### Récurrence simple :

$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} P_{n_0} \text{ est vraie} \\ \text{quel que soit l'entier } n \geq n_0, \text{ si } P_n \text{ est vraie alors } P_{n+1} \text{ est vraie} \end{array} \right.$	$\text{alors quel que soit l'entier } n \geq n_0, P_n \text{ est vraie.}$
---	---

Autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{n_0} \\ \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, P_n \implies P_{n+1} \end{array} \right. \implies \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, P_n$$

#### Récurrence d'ordre 2 :

$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} P_{n_0} \text{ et } P_{n_0+1} \text{ sont vraies} \\ \text{quel que soit l'entier } n \geq n_0, \text{ si } P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont vraies alors } P_{n+2} \text{ est vraie} \end{array} \right.$	$\text{alors quel que soit l'entier } n \geq n_0, P_n \text{ est vraie.}$
---	---

Autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{n_0} \text{ et } P_{n_0+1} \\ \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, (P_n \text{ et } P_{n+1}) \Rightarrow P_{n+2} \end{array} \right. \implies \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, P_n$$

**Récurrance forte :**

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} P_{n_0} \\ \text{quel que soit } n \geq n_0, [\forall k \in \llbracket n_0; n \llbracket, P_k ] \Rightarrow P_{n+1} \end{array} \right. \text{ alors } \text{quel que soit } n \geq n_0, P_n.$$

**Récurrance finie :**

$$\text{Soit } n \text{ fixé dans } \mathbb{N},$$

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} P_{n_0} \\ \forall k \in \llbracket n_0; n-1 \llbracket, P_k \Rightarrow P_{k+1} \end{array} \right. \text{ alors } P_n.$$

### 1.2.2 Nombres réels.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels. On représente ces nombres sur un axe orienté.



#### Règles de calcul.

##### Somme et produit

Pour tous réels  $x, y$  et  $z$  on a :

$$\begin{array}{llll} x + y = y + x & x + 0 = x & (x + y) + z = x + (y + z) & \exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = 0 \\ xy = yx & x \times 1 = x & (xy)z = x(yz) & (\text{si } x \neq 0) \exists x' \in \mathbb{R} : xx' = 1 \\ & & x(y + z) = xy + xz & \end{array}$$

##### Quotients de nombres réels :

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels non nuls,

$$\begin{array}{llll} \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} & \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} & c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b} & \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} & \end{array}$$

##### Ordre de priorité :

Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres réels non nuls,

$$\begin{array}{ll} a + b - c = a + b + (-c) & a - b + c = a + (-b) + c \\ a + b \times c = a + (b \times c) & a \times b + c = (a \times b) + c \\ \frac{a + b}{c} = (a + b) \times \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} & \end{array}$$

#### Inégalités

#### Propriétés.

Les propositions suivantes sont vraies quels que soient les réels  $x, y$  et  $a$ .

$$x \leq y \implies x + a \leq y + a$$

$$x < y \implies x + a < y + a$$

$$x \leq y \iff y - x \geq 0$$

$$x < y \iff y - x > 0$$

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \implies x + y \geq 0$$

$$x > 0 \text{ et } y \geq 0 \implies x + y > 0$$

$$x \geq 0 \iff -x \leq 0$$

$$x > 0 \iff -x < 0$$

$$x \geq 0 \text{ et } x \leq 0 \iff x = 0$$

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \implies xy \geq 0$$

$$x > 0 \text{ et } y \geq 0 \implies xy > 0$$

$xy \geq 0$  si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont de même signe.

$xy \leq 0$  si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont de signe opposé.

### Propositions.

Pour  $a, b, c, a', b', c'$  des réels,

**Si**  $a \leq b$  et  $a' \leq b'$  **alors**  $a + a' \leq b + b'$

**Si**  $a \leq b$  et  $k \geq 0$  **alors**  $ka \leq kb$

**Si**  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq a' \leq b'$  **alors**  $aa' \leq bb'$

**Si**  $a \leq b$  et  $k \leq 0$  **alors**  $kb \leq ka$

**Si**  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $a \leq b$  **alors**  $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

**Si**  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}_-^*$ ,  $a \leq b$  **alors**  $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$

Même propriétés sur les encadrements.

**Notation :**  $a \leq b \leq c \iff a \leq b \text{ et } b \leq c$

### Propositions :

❶ Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

Si  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_1$  alors  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

❷ Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

si  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \geq 0$  alors  $x_1 + \dots + x_n \geq 0$

❸ Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

si  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \geq 0$  et  $x_1 + \dots + x_n = 0$  alors  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = 0$

**A connaître.** et à savoir démontrer.

$$(I_1) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$(I_2) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$$

$$(I_3) \quad \forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$(I_4) \quad \forall p \in \mathbb{R}, \quad p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

**Intervalles****Définition :**

Les **intervalles** de  $\mathbb{R}$  sont les parties  $A$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad [a \in A \text{ et } b \in A \text{ et } a \leq c \leq b] \implies c \in A$$

Les intervalles de  $\mathbb{R}$ , autres que  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$ , sont les parties de  $\mathbb{R}$  de la forme :

$$[a; b], \quad ]a; b[, \quad [a; b[, \quad ]a; b], \quad [a; +\infty[, \quad ]a; +\infty[, \quad ]-\infty; b], \quad ]-\infty; b[$$

avec  $a$  et  $b$  deux réels.

**Valeur absolue.****Définition :**

On définit la **valeur absolue** d'un réel  $x$  par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Remarques :**

Pour tous réels  $a, b, x$  on a :

$$|-x| = |x| \quad \text{et} \quad |a-b| = |b-a|$$

Sur l'axe orienté des réels, on note  $M$  le point d'abscisse  $x$ ,  $A$  d'abscisse  $x_A$  et  $B$  d'abscisse  $x_B$ .



- $|x|$  est la distance de  $M$  à l'origine. ( on dit aussi "de  $x$  à l'origine").
- $|x_B - x_A|$  est la distance  $AB$  ( on dit aussi "de  $x_A$  à  $x_B$ ").
- $x_B - x_A$  est la mesure algébrique  $\overline{AB}$ .

**Propositions :**

Soit  $x, y$  et  $h$  des réels avec  $a \geq 0$ ,

$$|x| \geq 0 \quad (|x| = 0 \iff x = 0) \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \text{ et } x \leq a$$

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ ou } a \leq x$$

$$|xy| = |x||y| \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|$$

*Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x+y| = |x| + |y| \iff (x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \text{ ou } (x \leq 0 \text{ et } y \leq 0)$$

*Généralisation de l'inégalité triangulaire.*

Soient  $n$  un entier non nul et  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  réels,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

La condition nécessaire et suffisante pour avoir une égalité est : tous les  $a_k$  sont de même signe.

**Puissances entières.****Définition.**

Soit  $x$  un réel, on définit par récurrence et pour tout entier naturel  $n$  le réel  $x^n$  par :

$$x^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+1} = x^n \times x$$

Plus simplement :  $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

Soient  $x$  un réel non nuls et  $n$  un entier strictement négatif, le réel  $x^n$  est égal à  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(-n)}$

**Propriétés**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels non nuls et  $n$  et  $m$  deux entiers relatifs.

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^n \times x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}, \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

**Identités remarquables.**

Pour  $a$  et  $b$  deux réels,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

**Racine carrée****Définition :**

Pour  $x$  un réel positif ou nul, on note  $\sqrt{x}$  l'unique réel positif dont le carré vaut  $x$ .

**Proposition :**

$x$  et  $y$  désignent deux réels positifs ou nuls,

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &= \sqrt{x}\sqrt{y} & \text{si } y \neq 0 \quad \sqrt{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & \sqrt{x+y} &\leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{x^n} &= (\sqrt{x})^n \end{aligned}$$

**Remarque :** Quel que soit le réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

**Puissances réelles.****Définition :**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a > 0$ , on appelle  $a$  puissance  $b$  le réel  $e^{b \ln(a)}$ .

$$a^b \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \ln(a)}$$

**Propriétés algébriques :**

Soient  $a, a'$  deux réels strictement positifs et  $b, b'$  deux réels quelconques.

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad (aa')^b = a^b a'^b \quad a^{b+b'} = a^b a^{b'} \quad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$$

**Proposition :**

Soit  $b \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a^b) = b \ln(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

**Majoration, minoration.****Définitions.**

Soit  $m$  un réel,  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,

- ① Dire que  $m$  est un majorant de  $A$  signifie que :  $\forall x \in A, x \leq m$ .
- ② Dire que  $m$  est un minorant  $A$  signifie que :  $\forall x \in A, x \geq m$ .

**Définitions.**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,

- ① Dire que  $A$  est majorée signifie que :  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$ .
- ② Dire que  $A$  est minorée signifie que :  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \geq m$ .
- ③ Dire que  $A$  est bornée signifie que :  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in A, m \leq x \leq M$ .

**Proposition :**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,

$A$  est bornée si, et seulement si,  $\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A, |x| \leq M$

**Plus grand ou plus petit élément d'un ensemble****Définitions :**

Soit  $a$  un réel,  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,

- ① Dire que  $a$  est le plus grand élément de  $A$  signifie que :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \leq a$$

Lorsqu'il existe, il est unique on le note  $\max(A)$ .

- ② Dire que  $a$  est le plus petit élément de  $A$  signifie que :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \geq a$$

Lorsqu'il existe, il est unique on le note  $\min(A)$ .

**Remarques :**

- un ensemble fini possède un plus grand et un plus petit élément.
- Toute partie majorée de  $\mathbb{Z}$  possède un plus grand élément.
- Toute partie minorée de  $\mathbb{Z}$  possède un plus petit élément.

**Borne supérieure ou inférieure****Définition :**

La borne supérieure  $a$  d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est caractérisée (" $a = \sup(A) \iff$ ") par :

$$\forall x \in A, x \leq a \quad \text{et} \quad \forall b < a, \exists x \in A : b < x$$

La borne inférieure  $a$  d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est caractérisée (" $a = \inf(A) \iff$ ") par :

$$\forall x \in A, a \leq x \quad \text{et} \quad \forall b > a, \exists x \in A : x < b$$

**Autrement dit :**

$A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,

- La **borne supérieure** de  $A$  est, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de  $A$ .
- La **borne inférieure** de  $A$  est, lorsqu'il existe, le plus grand des minorants de  $A$ .

**Théorème :** (*Propriété de la borne supérieure, de la borne inférieure*)

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure.  
Toute partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne inférieure.

### Partie entière.

**Définition :**

Soit  $x$  un réel, il existe un et un seul entier relatif  $n$  vérifiant :

$$n \leq x < n + 1$$

cet entier s'appelle **la partie entière** de  $x$  et se note  $\lfloor x \rfloor$

**Propriétés :**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

**Proposition :** (*complément*)

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls,

$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$  est le quotient dans la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

**Séparation des termes d'une somme.**

Soit  $(a_n)$  une suite de nombre complexes,

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} a_{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} a_{3k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} a_{3k+2}$$

### 1.2.3 Nombres complexes.

#### Introduction.

Il existe un ensemble  $\mathbb{C}$  vérifiant :

- ❶  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- ❷ on définit  $+$  et  $\times$  sur  $\mathbb{C}$  avec les mêmes propriétés que  $+$  et  $\times$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ❸ il existe un élément de  $\mathbb{C}$  noté  $i$  et vérifiant  $i \times i = -1$
- ❹ tout élément de  $\mathbb{C}$  peut s'écrire de manière unique  $x + i \times y$  où  $x$  et  $y$  sont deux nombres réels.

**Attention :**

Dans  $\mathbb{C}$  on ne définit pas d'ordre on ne peut pas comparer (plus petit ou plus grand) deux nombres complexes.

**Forme algébrique.**

*Identification.*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + iy = x' + iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

**Règles de calcul.**

Pour tous nombres complexes  $z, z_1, z_2$  et  $z_3$  et tous nombres réels  $x_1, y_1, x_2$  et  $y_2$  on a :

$$i^2 = -1 \qquad (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 + 0 = z_1 \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \exists z' \in \mathbb{C} : z + z' = 0$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \qquad z_1 \times 1 = z_1 \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \qquad (\text{si } z \neq 0) \quad \exists z' \in \mathbb{C} : z z' = 1$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Les identités remarquables, les formules du binôme et de Bernoulli ont été énoncées avec des nombres complexes.

**Remarque :** (*Intégrité*)

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z_1 z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad z_2 = 0$$

**Partie réelle et partie imaginaire.**

**Définition.**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Re}(x + iy) = x \qquad \text{Im}(x + iy) = y$$

**Remarques :**

- Les complexes de partie réelle nulle sont appelés imaginaires purs.
- On note  $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = 0\}$  (l'ensemble des imaginaires purs).

**Conjugué.**

**Définition.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $z = x + iy$  avec  $x, y$  deux réels, on appelle conjugué de  $z$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  et définie par

$$\bar{z} = x - iy$$

**Propriétés :**

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$ , tout réel  $\lambda$  :

$$\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z} \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$$

Si  $z \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$

**Propositions :**

Pour tout nombre complexe  $z$  :

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$$

**Module.****Définition :**

Le module du complexe  $z$  est le réel  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$  ou encore pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$   $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Propriétés.**

Pour tout nombres complexes  $z$  et  $z'$ , tout réel  $\lambda$  :

$$|\lambda z| = |\lambda| |z| \quad |zz'| = |z| |z'| \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |z^n| = |z|^n$$

**Inégalités.**

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

**Démonstration de l'inégalité triangulaire.**

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ,

$$\begin{aligned} (|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 &= |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 - (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 - (z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}') \\ &= 2(|z\bar{z}'| - \operatorname{Re}(z\bar{z}')) \end{aligned}$$

or pour tout complexe  $Z$ ,  $|Z| \geq \operatorname{Re}(Z)$  donc  $(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 \geq 0$  ou encore  $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$  en passant à la racine carrée qui est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+$  il vient :

$$\text{Pour tout } (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Le calcul précédent montre que :  $|z + z'| = |z| + |z'| \iff |z\bar{z}'| = \operatorname{Re}(z\bar{z}')$  donc

$$\text{Pour tout } (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| = |z| + |z'| \quad \text{si, et seulement si,} \quad z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$$

**Notation  $e^{i\theta}$ .****Définition :**

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note :  $e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

**Propositions :**

Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \quad (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$$

**Formules d'Euler.**

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Écriture exponentielle d'un nombre complexe.

**Définition :**

Soit  $z$  un nombre complexe non nul, on appelle **argument** de  $z$  tout réel  $\theta$  tel que

$$z = |z|e^{i\theta}$$

**Propositions :** *Identification.*

Etant donné de réels strictement positifs  $r_1$  et  $r_2$  et deux réels  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ,

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

Si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  appartiennent à  $[0; 2\pi[$ , (ou à  $]-\pi; \pi]$ ,

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2$$

Exponentielle d'un nombre complexe.

**Définition :**

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $z = a + ib$ , on appelle exponentielle de  $z$  le complexe :

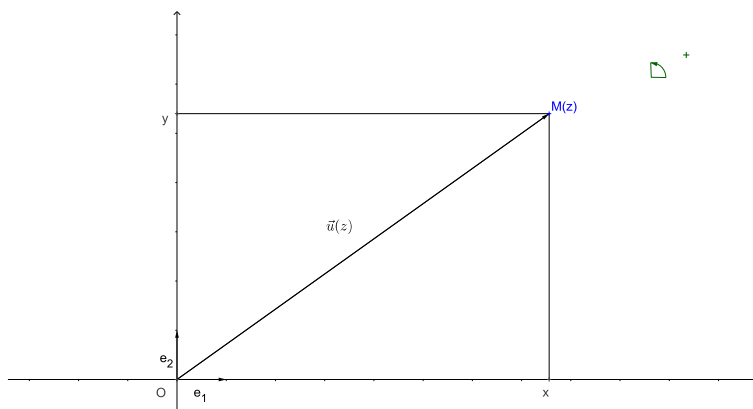
$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^a e^{ib}$$

**Théorème :**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{(z+z')} = e^z e^{z'}$$

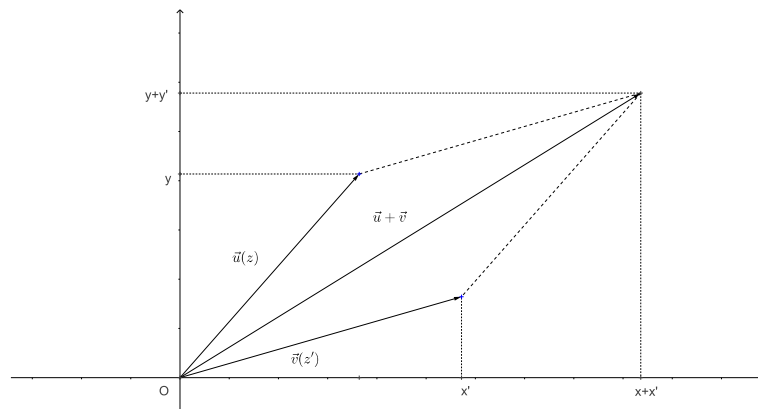
1.2.4 Interprétations graphiques des nombres complexes.

Affixe d'un point ou d'un vecteur dans le plan complexe. (Forme algébrique)



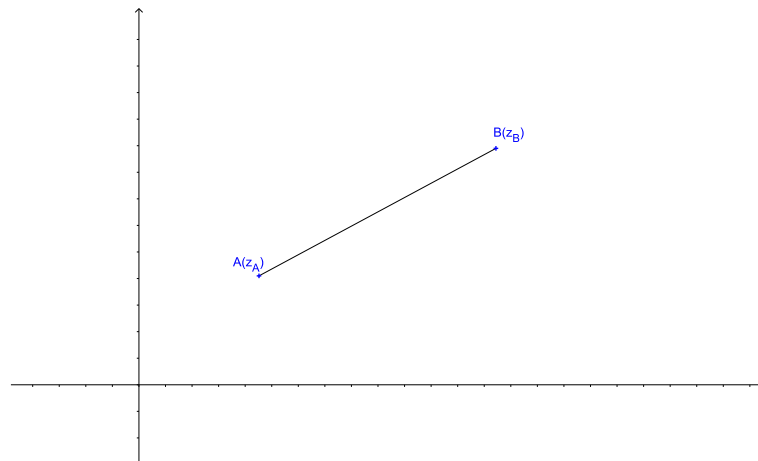
$z = x + iy$  est l'affixe du point  $M$  et du vecteur  $\vec{u}$ .

Somme de deux complexes.



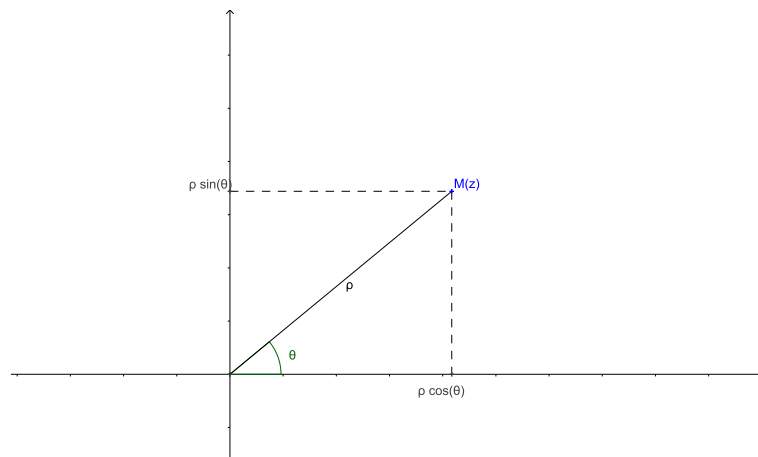
$z + z'$  est l'affixe du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Distance entre deux points.

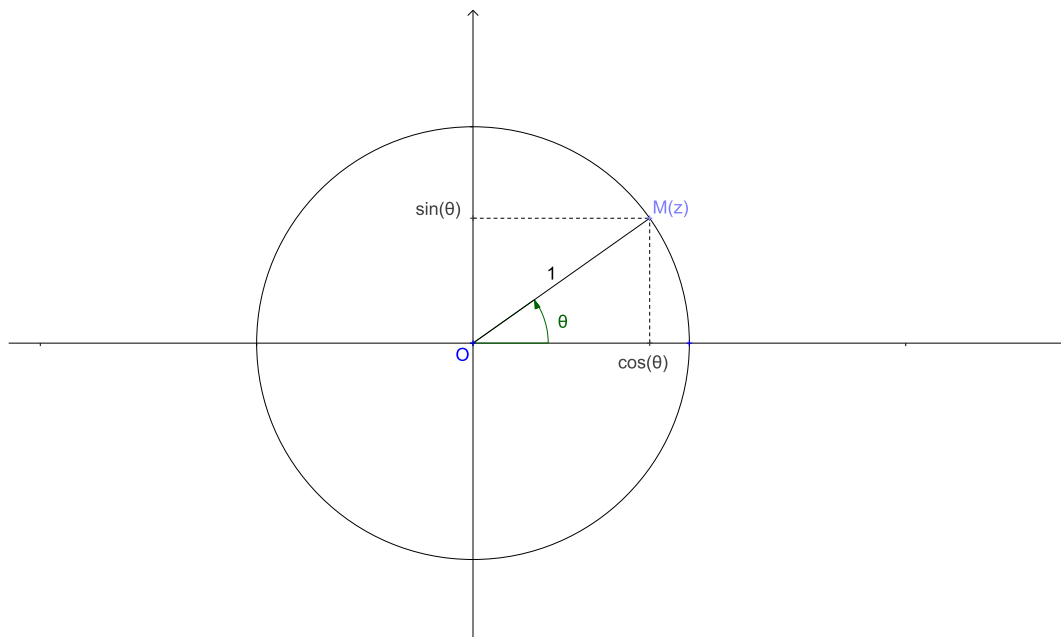


$AB = |z_B - z_A|$ .  $z_B - z_A$  est l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$ .

Représentation polaire d'un point du plan.



$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Sur le cercle trigonométrique.

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

**1.2.5 Trinôme à coefficients réels.**

On appelle trinôme à coefficients réels toute application  $P$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = az^2 + bz + c$$

*Démonstration à refaire :*  $aX^2 + bX + c = a \left( \left( X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$  (Forme canonique)

**Racines.**

On appelle racine du trinôme :  $aX^2 + bX + c$ , toute solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $ax^2 + bx + c = 0$ .

On note  $\Delta = b^2 - 4ac$  (le discriminant du polynôme)

- Si  $b^2 - 4ac > 0$ , le trinôme possède exactement deux racines et elles sont réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $b^2 - 4ac = 0$ , le trinôme possède une unique racine réelle :  $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si  $b^2 - 4ac < 0$ , le trinôme possède exactement deux racines complexes et elles sont conjuguées :

$$z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \bar{z} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

**Forme factorisée et signe.**

- Si  $b^2 - 4ac > 0$ ,  $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$ .

Cette expression permet de donner le signe de  $P(x)$  sur  $\mathbb{R}$  :

signe de  $a$  à l'extérieur des racines et l'opposé entre les deux racines.

- Si  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $aX^2 + bX + c = a(X - x_0)^2$ .

Cette expression permet de donner le signe de  $P(x)$  sur  $\mathbb{R}$  : signe de  $a$  et s'annule en  $x_0$ .

- Si  $b^2 - 4ac < 0$ ,  $aX^2 + bX + c = a(X - z)(X - \bar{z})$

Attention ! cette dernière expression ne justifie pas du tout le signe de  $P(x)$  sur  $\mathbb{R}$  :

Dans ce cas le signe de  $P(x)$  est celui de  $a$ .

**Forme canonique et sommet.**

Pour tout trinôme  $aX^2 + bX + c$ , on peut trouver deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

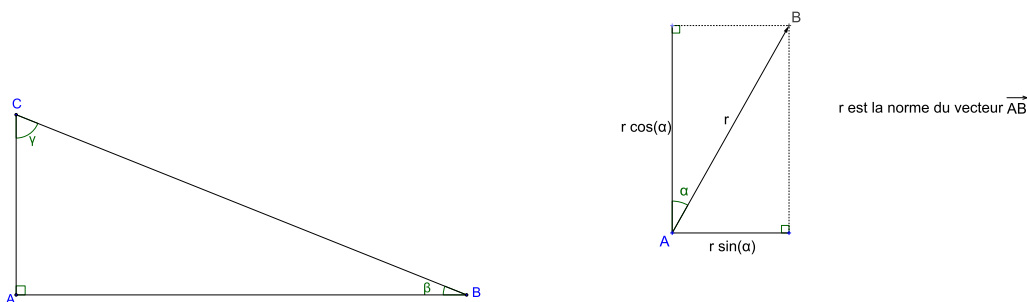
$$aX^2 + bX + c = a(X - \alpha)^2 + \beta$$

En donnant l'allure de la parabole, cette expression donne le sommet de la parabole :

le point de coordonnées  $(\alpha, \beta)$ .

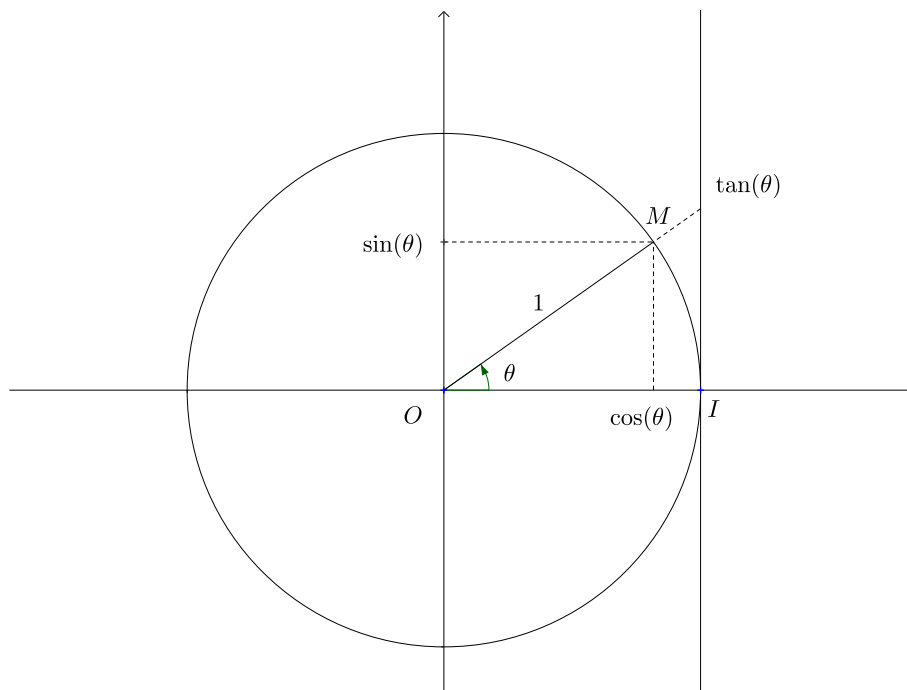
**1.3 Trigonométrie.**

**1.3.1 Dans le triangle rectangle.**



$$\cos(\beta) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\beta) = \frac{AC}{BC} \quad \cos(\gamma) = \frac{AC}{BC} \quad \sin(\gamma) = \frac{AB}{BC} \quad \tan(\beta) = \frac{AC}{AB} \quad \tan(\gamma) = \frac{AB}{AC}$$

**1.3.2 Dans le cercle trigonométrique.**



**Remarque :** Le cercle est de rayon 1, il est orienté dans le sens antihoraire, les points du cercle sont repérés par leur abscisse curviligne (l'arc orienté  $\widehat{IM}$ ), sur la figure cette abscisse vaut  $\theta$ .

**Définitions :**

- $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  sont les coordonnées du point  $M$  du cercle trigonométrique associé à  $\theta$ .
- $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

**Remarque :** Différentes façons de noter l'ensemble de définition de la fonction tangente :

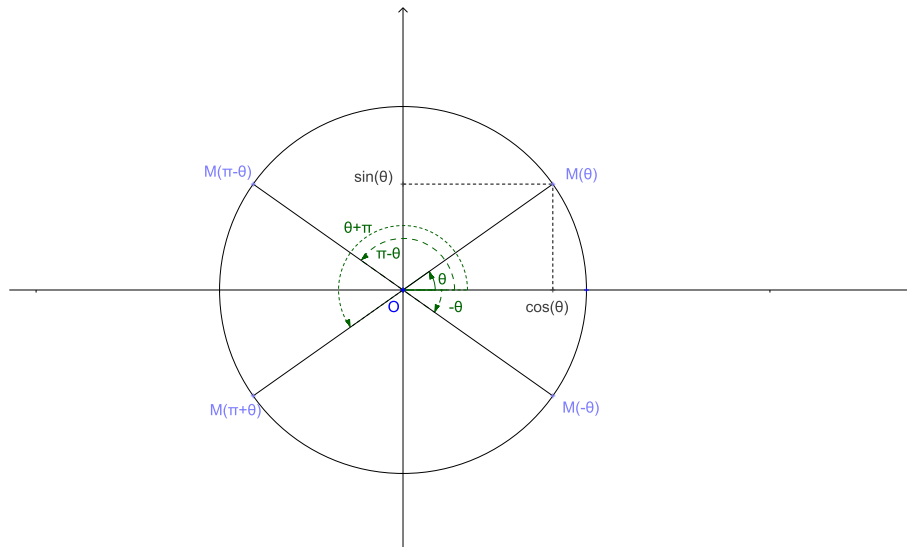
$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2} \right[$$

### 1.3.3 Périodicités.

- Les fonctions  $t \mapsto \cos(t)$  et  $t \mapsto \sin(t)$  sont de période  $2\pi$ .  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \end{cases}$
- La fonction  $t \mapsto \tan(t)$  est de période  $\pi$   $\forall \theta \in D_{\tan}, \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$

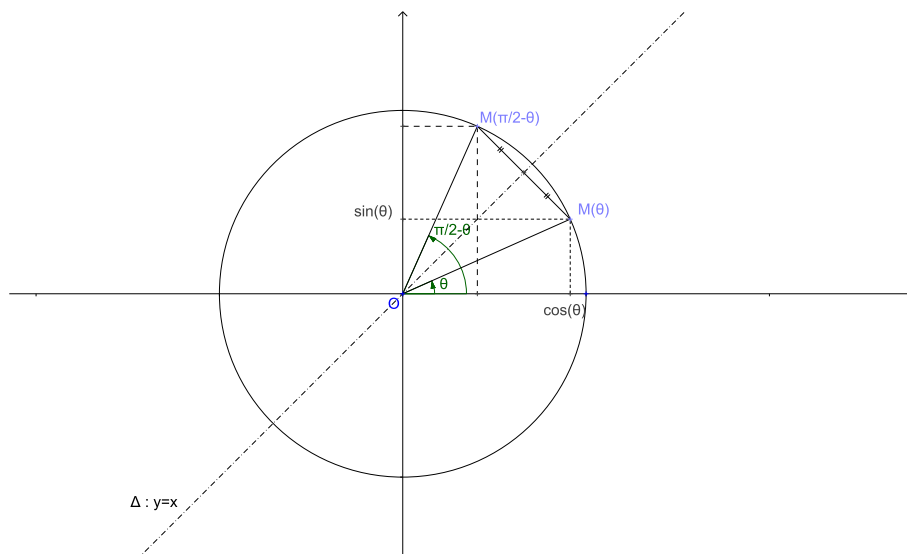
### 1.3.4 Symétries.

Avec les axes :



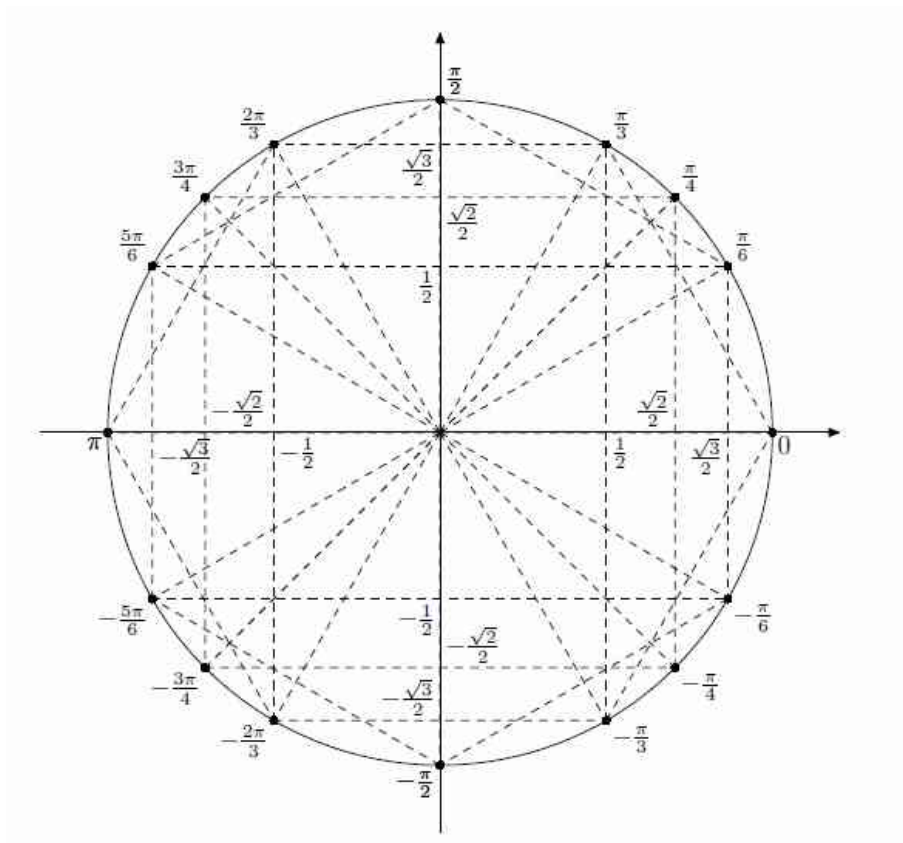
$$\begin{array}{lll} \cos(-\theta) = \cos(\theta) & \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) & \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) & \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) & \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) \\ \tan(-\theta) = -\tan(\theta) & \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) & \tan(\pi + \theta) = \tan(\theta) \end{array}$$

Avec la première bissectrice :



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

### 1.3.5 Valeurs remarquables.



### 1.3.6 Formules.

#### Formules d'addition.

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$

#### Formules de duplications.

$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$	$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$
$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$	$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$

### 1.3.7 Equations.

#### Théorème.

Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\cos(\theta) = \cos(\theta') \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = -\theta' + 2k\pi$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta') \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \pi - \theta' + 2k\pi$$

Pour tout  $(\theta, \theta') \in (D_{\tan})^2$ ,

$$\tan(\theta) = \tan(\theta') \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \theta' + k\pi$$

### 1.3.8 Arcsinus, arccosinus et arctangente.

#### Définitions.

Soit  $x \in [-1, 1]$ ,

① On appelle **arcsinus** de  $x$  l'unique réel  $\theta$  appartenant à  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\sin(\theta) = x$

② On appelle **arccosinus** de  $x$  l'unique réel  $\theta$  appartenant à  $[0; \pi]$  tel que  $\cos(\theta) = x$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

③ On appelle **arctangente** de  $x$  l'unique réel  $\theta$  appartenant à  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $\tan(\theta) = x$

#### Autrement dit :

- Pour  $x$  un réel de  $[-1, 1]$ , l'arccosinus de  $x$  est l'arc de  $[0, \pi]$  dont le cosinus vaut  $x$ .
- Pour  $x$  un réel de  $[-1, 1]$ , l'arcsinus de  $x$  est l'arc de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  dont le sinus vaut  $x$ .
- Pour  $x$  un réel quelconque, l'arctangente de  $x$  est l'arc de  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  dont la tangente vaut  $x$ .

### 1.3.9 Transformation d'une expression de la forme : $a \cos(x) + b \sin(x)$ .

On cherche à transformer une expression de la forme  $a \cos(x) + b \sin(x)$  en une expression de la forme  $r \cos(x - \varphi)$   $a, b, x, r, \varphi$  des réels avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

En trois étapes :

- ❶ On met en facteur  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \cos(x) \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sin(x) \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

- ❷ On cherche  $\varphi$  tel que :
- $$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

On peut trouver un tel  $\varphi$  car le point de coordonnées  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$  est sur le cercle trigonométrique.

- ❸ on a alors :  $a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(x) \cos(\varphi) + \sin(x) \sin(\varphi))$

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

### 1.3.10 Linéarisation

Etant donnés deux entiers naturels  $m$  et  $n$  et un réel  $\theta$ , linéariser  $\cos^m(\theta) \sin^n(\theta)$  c'est l'exprimer comme somme de termes de la forme  $\lambda \cos(k\theta)$  ou  $\lambda \sin(k\theta)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- ① Remplacer  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  par respectivement  $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  (formules d'Euler).

② Développer entièrement l'expression en nombre complexes (*souvent en utilisant la formule du binôme*).

③ Réutiliser les formules d'Euler pour revenir à des cosinus et des sinus (des nombres réels).

## 1.4 Méthodes de calcul.

### 1.4.1 Sommes.

#### Définition.

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers, et  $a_0, \dots, a_k, \dots$  des nombres complexes.

$$\text{pour } n < m, \quad \sum_{k=m}^n a_k = 0, \quad \sum_{k=m}^m a_k = a_m \quad \text{et} \quad \text{pour } n \geq m \quad \sum_{k=m}^{n+1} a_k = \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) + a_{n+1}$$

plus simplement : quand  $n \geq m$  : 
$$\sum_{k=m}^n a_k = \underbrace{a_m + \dots + a_n}_{n-m+1 \text{ termes}}$$

#### Des sommes à connaître.

( $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , ( $m \leq n$ ) et  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ )

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n 1 &= n - m + 1 & \sum_{k=m}^n q^k &= \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q} & \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \sum_{k=0}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

#### Formule de Bernoulli.

Soient  $n$  un entier naturel et  $(a, b)$  un couple de nombres complexes.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

#### Démonstration.

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^n a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^n a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n a^k b^{n+1-k} \quad (\text{changement d'indice}) \\ &= a_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k}}_{=0} - b_{n+1} \end{aligned}$$

#### Linéarité.

Pour  $\lambda$  un nombre complexe,  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de nombres complexes.

$$\sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k \quad \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

#### "Relation de Chasles".

Si  $n_1, n_2$  et  $n_3$  sont trois entiers vérifiant  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ , on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_3} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} a_k \quad \text{ou} \quad = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k + \sum_{k=n_2}^{n_3} a_k$$

**Changement d'indice.**

**Translation** ou décalage.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} \qquad \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$$

**Symétrie** ou lecture inverse.

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \qquad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} \qquad \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p}^n a_{n+p-k}$$

**Sommes télescopiques.**

Lorsque les  $a_k$  peuvent s'écrire  $u_{k+1} - u_k$  ou  $u_k - u_{k+1}$

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m \qquad \sum_{k=m}^n (u_k - u_{k+1}) = u_m - u_{n+1}$$

**Sommes et inégalités**

Soient  $(a_k)$  et  $(b_k)$  deux suites de nombres réels et  $n$  un entier naturel,

Si pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $a_k \leq b_k$  alors  $\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k$

**Séparation des termes d'indice pair et d'indice impair.**

Soit  $(a_n)$  une suite de nombre complexes,

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

**1.4.2 Produits, factorielles.**

**Définition.**

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers, et  $a_0, \dots, a_n \dots$  des nombres complexes.

$$\forall n < m, \prod_{k=m}^n a_k = 1, \quad \prod_{k=m}^m a_k = a_m \quad \text{et} \quad \forall n \geq m \quad \prod_{k=m}^{n+1} a_k = \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) \times a_{n+1}$$

Autrement dit, quand  $n \geq m$  :  $\prod_{k=m}^n a_k = \underbrace{a_m \times \dots \times a_n}_{n-m+1 \text{ facteurs}}$

**Factorielle. notation  $n!$**

**Définition.**

On appelle factorielle d'un entier naturel  $n$  l'entier :  $\prod_{k=1}^n k$ , on le note  $n!$ .

**Remarques**

$$0! = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$

Autrement dit :

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}_{\text{produit de tous les entiers compris entre 1 et } n} = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

**Produits à connaître**

Pour  $a \in \mathbb{C}$  et  $n, m$  deux entiers vérifiant  $1 \leq m \leq n$ ,

$$\prod_{k=m}^n a = a^{n-m+1}, \quad \prod_{k=m}^n k = \frac{n!}{(m-1)!}$$

**Produits télescopiques.**

Lorsque les  $a_k$  peuvent s'écrire  $\frac{u_{k+1}}{u_k}$  ou  $\frac{u_k}{u_{k+1}}$  et pour  $m \leq n$

$$\prod_{k=m}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m} \quad \prod_{k=m}^n \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_m}{u_{n+1}}$$

**Exponentielle et logarithme.**

**Exponentielle d'une somme :**

$$\text{Pour tout } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) = \prod_{k=1}^n \exp(a_k)$$

**Logarithme népérien d'un produit :**

$$\text{Pour tout } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k)$$

**1.4.3 Coefficients binomiaux.****Définition.**

Soient  $n, p$  deux entiers relatifs, on définit  $\binom{n}{p}$  par :

$$\text{si } 0 \leq p \leq n : \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{sinon, } \binom{n}{p} = 0.$$

**Remarques :**

- On lit " $p$  parmi  $n$ ".
- Dans un schéma de Bernoulli de profondeur  $n$  :  $\binom{n}{p}$  est le nombre de chemins avec exactement  $p$  succès.

**Formules.**

Soient  $n, p$  deux entiers naturels ,

$$(1) \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad (2) \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \quad (3) \quad \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \binom{n}{p}$$

**Démonstrations :** *A savoir faire.*

**Cas particuliers.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

**Avec la notation produit :**

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)}{p!} \quad \binom{n}{p} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k} = \prod_{k=1}^p \frac{(n-k+1)}{k}$$

**Triangle de Pascal.**

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

**Formule du binôme de Newton.**

Soient  $n$  un entier naturel et  $(a, b)$  un couple de nombres complexes,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Démonstration :** (En deux étapes)

• Fixons  $x$  dans  $\mathbb{C}$  et montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .

(I) Pour  $n = 0$ ,

on a  $(1 + x)^0 = 1$  et  $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k = 1$  donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

(H) Prenons un entier  $n$  et supposons que :  $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ ,

on sait que  $(x+1)^{n+1} = (x+1)(x+1)^n$  donc en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &= (1+x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} \quad (\text{formule du triangle de Pascal}) \\
 (1+x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \quad (\text{propriété au rang } n+1)
 \end{aligned}$$

En conclusion :

pour tout entier naturel  $n$ ,  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .

❷ Montrons maintenant que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}$ ,  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  :

**1er cas** : Pour  $b = 0$ , la propriété est immédiate. (*Dans la somme tous les termes sont nuls pour  $k = 0$* )

**2eme cas** : Pour  $b \neq 0$ , on applique le résultat montrer en ❶ avec  $x = \frac{a}{b}$  ( $= ab^{-1}$ ), on obtient :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{-k}$$

en multipliant par  $b^n$  les deux membres de cette égalité, il vient ce que l'on cherchait :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Remarques :**

- (en inversant  $a$  par  $b$ )

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- (en remplaçant  $b$  par  $-b$ )

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**Sommes à connaître. (et à savoir redémontrer)**

❶  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  Prendre  $a = 1$  et  $b = 1$  dans la formule du binôme.

❷  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$  Prendre  $a = 1$  et  $b = -1$  dans la formule du binôme.

$$\textcircled{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

Il suffit d'utiliser  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ , puis de retrouver la somme  $\textcircled{1}$  avec  $n-1$ .

$$\textcircled{4} \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Par récurrence sur  $n$  ou avec une somme télescopique en remarquant que :  $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$

#### 1.4.4 Sommes doubles.

Dans ce paragraphe pour tout couple d'entiers  $(i, j)$ ,  $a_{i,j}$  désigne un nombre complexe.

##### Somme double rectangulaire.

On note  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}$  la somme de tous les nombres  $a_{ij}$  lorsque  $i$  va de 1 à  $n$  et  $j$  de 1 à  $m$ .

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$$

On peut aussi noter :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

##### Produits de deux sommes simples.

Dans le cas où  $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_i \beta_j = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left( \sum_{j=1}^m \beta_j \right) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left( \sum_{i=1}^m \beta_i \right)$$

##### Somme double triangulaire.

On note  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$  la somme de tous les  $a_{ij}$  lorsque  $i$  va de 1 à  $n$  et  $j$  de 1 à  $m$  avec la contrainte  $i \leq j$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j a_{ij} \right)$$

*inversion somme triangulaire*

On peut aussi noter :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

On note  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$  la somme de tous les  $a_{ij}$  lorsque  $i$  va de 1 à  $n$  et  $j$  de 1 à  $m$  avec la contrainte  $i < j$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} \right)$$

**Linéarité.**

$\lambda$  désigne un nombre complexe.

$$\sum_{(i,j)} \lambda a_{ij} = \lambda \sum_{(i,j)} a_{ij} \qquad \sum_{(i,j)} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} + \sum_{(i,j)} b_{ij}$$

**1.5 Vocabulaire des applications.****1.5.1 Introduction.**

Une application de  $E$  dans  $F$  associe à tout élément de  $E$  un unique élément de  $F$ .

**Notations et définitions :**

• (une définition rigoureuse mais pas nécessaire dans ce cours) Une application peut-être définie par le triplet  $(E, F, C)$  où  $C \subset E \times F$  avec la propriété :  $\forall x \in E, \exists ! y \in F : (x, y) \in C$

• Pour  $x$  dans  $E$ , l'unique élément de  $F$  lié à  $x$  est appelé **image de  $x$  par  $f$**  et on le note  **$f(x)$** .

On note :  $f : E \longrightarrow F$     " $f$  est l'application qui va de  $E$  dans  $F$  et qui à  $x$  associe  $f(x)$ ".  
 $x \longmapsto f(x)$

- Soit  $y \in F$ ,  
on appelle **antécédent** de  $y$  par  $f$ , tout élément  $x$  de  $E$  vérifiant :  $f(x) = y$
- Les éléments de  $F$  qui sont l'image d'un élément de  $E$  sont appelés **valeurs** de  $f$ .
- On note  $f(E)$  l'ensemble des valeurs prises par  $f$ .  
Autrement dit :  $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$  ou encore  $f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x)\}$
- $E$  est l'**ensemble de départ** de  $f$ , ou encore son ensemble de définition. (certains parlent aussi de "source")
- $F$  est l'**ensemble d'arrivée** de  $f$ , (certains parlent aussi de "but")  
(cet ensemble contient l'ensemble des valeurs prises par  $f$ )
- On note  $F^E$  l'**ensemble des applications** de  $E$  dans  $F$ .
- **Application identité de  $E$**  : On note  $Id_E$  l'application  $E \longrightarrow E$   
 $x \longmapsto x$
- Deux applications  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E' \rightarrow F'$  sont égales si, et seulement si,  

$$E = E' \quad , \quad F = F' \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

**Restriction et prolongement****Définition :**

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$ .

Pour  $A$  est une partie de  $E$ , ( $A \subset E$ )

on appelle restriction de  $f$  à  $A$ , notée  $f|_A$ , l'application de  $A$  dans  $F$ , vérifiant :  $\forall x \in A, \quad f|_A(x) = f(x)$ .

Pour  $B$  un ensemble contenant  $E$ , ( $E \subset B$ ),

on appelle prolongement à  $B$  de  $f$  toute application  $g$  de  $B$  dans  $F$  vérifiant :  $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$

**Image directe d'une partie de l'ensemble de départ.**

**Définition :**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , on note  $f(A)$  l'ensemble des images des éléments de  $A$ , on dit que  $f(A)$  est l'**image directe** de  $A$  par  $f$ .  
 Autrement dit :  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$  ou encore  $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$

**1.5.2 L'application composée.**

$E, F$  et  $G$  sont trois ensembles quelconques.

**Définition**

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications, l'application de  $E$  dans  $G$  qui à  $x$  associe  $g(f(x))$  est appelée (**application**) **composée** de  $f$  par  $g$ .  
 On la note :  $g \circ f$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

**Proposition :**

Etant données,  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$  trois applications, on a :

$$Id_F \circ f = f, \quad f \circ Id_E = f \quad \text{et} \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

**Attention :** en général,  $g \circ f \neq f \circ g$ .

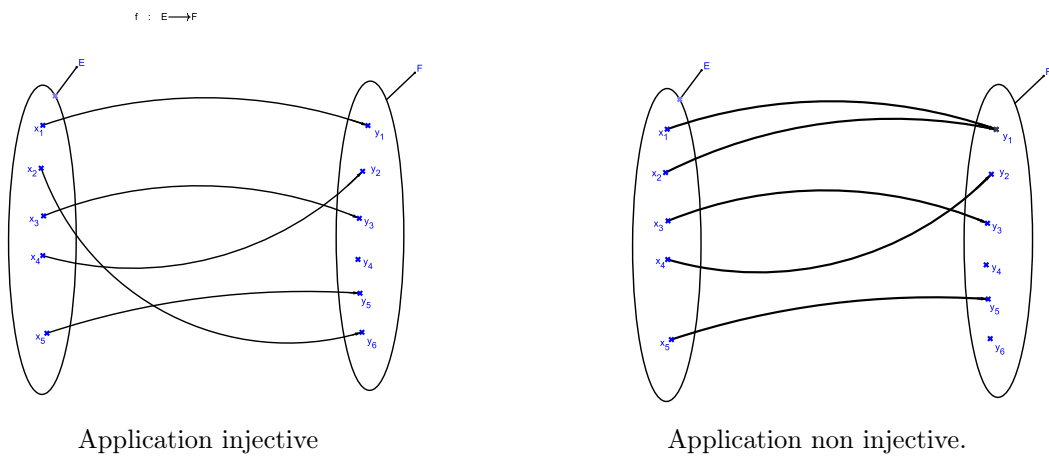
**1.5.3 Injections, surjections.**

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

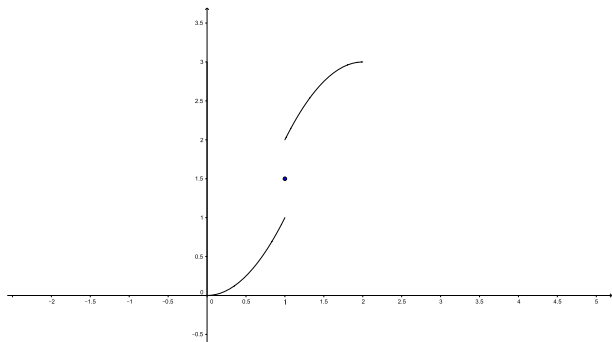
**Injection.**

**Définition :**

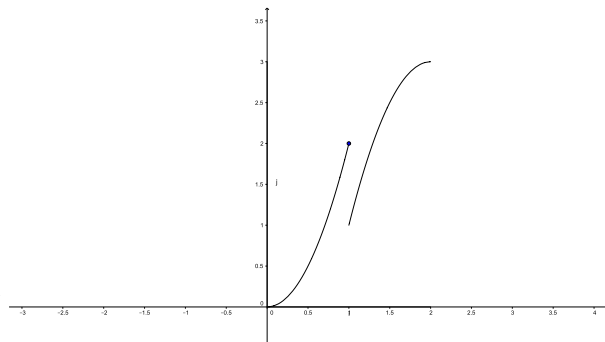
Dire que  $f$  est une **injection** (ou est injective) signifie que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$


$$f : [0, 2] \rightarrow [0, 3]$$



Application injective



Application non injective.

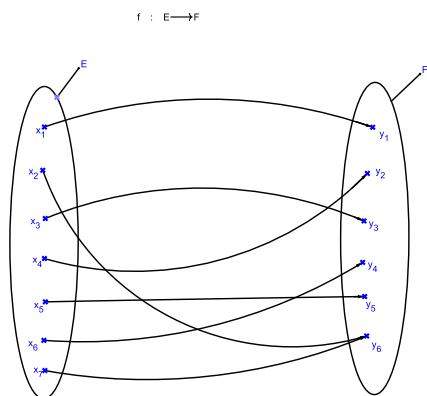
**Remarques :**

- $f$  est injective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent par  $f$ .
- Une autre définition :  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ .

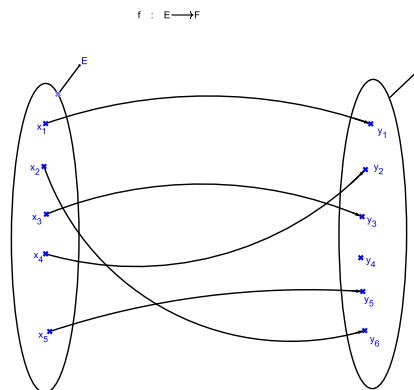
**Surjection.**

**Définition :**

Dire que  $f$  est une **surjection** (ou est surjective) signifie que :

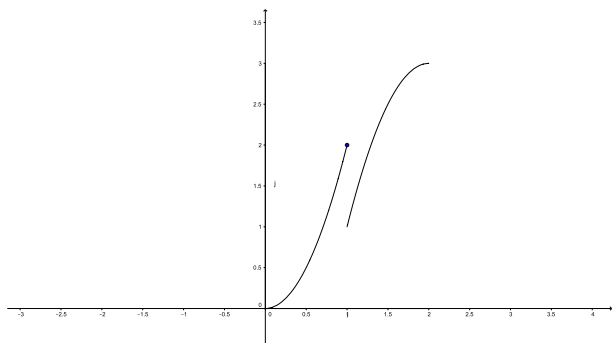
$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E : \quad y = f(x)$$


Application surjective

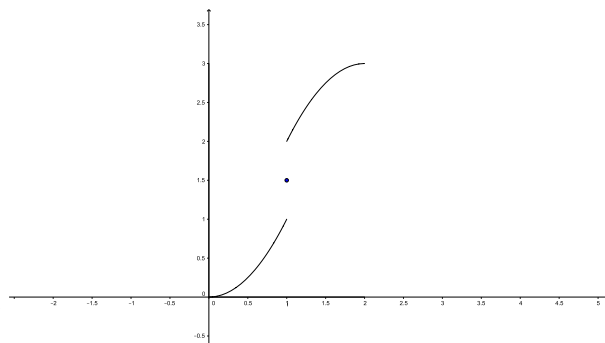


Application non surjective.

$$f : [0, 2] \rightarrow [0, 3]$$



Application injective



Application non injective.

**Remarques :**

- $f$  est surjective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent par  $f$ .
- Pour savoir si  $f$  est surjective on cherche à résoudre  $f(x) = y$  pour un  $y$  quelconque dans  $F$ .

### 1.5.4 Bijection et application réciproque.

**Définition :** (*bijection*)

Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  
Dire que  $f$  est **une bijection** (ou est bijective) signifie que :  $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$

**Remarque :**  $f$  est bijective si, et seulement si,  $f$  est injective et surjective.

**Définition :** (*application réciproque*)

Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  
Lorsque  $f$  est une bijection :  
on peut définir l'application de  $F$  dans  $E$  qui à tout élément de  $F$  associe son unique antécédent par  $f$ .  
Cette application notée  $f^{-1}$  est appelée **réciproque** de  $f$ .

**Propositions :**

Si  $f$  est une bijection, alors :

- ①  $\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
- ②  $f \circ f^{-1} = Id_F \quad f^{-1} \circ f = Id_E$
- ③  $f^{-1}$  est une bijection de  $F$  dans  $E$
- ④ l'application réciproque de  $f^{-1}$  est alors égale à  $f$  :  $(f^{-1})^{-1} = f$

**Théorème :** (*La composée de deux bijections est une bijection*)

Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont deux bijections alors  $g \circ f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$  et l'application réciproque de  $g \circ f$  est  $f^{-1} \circ g^{-1}$ .

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Démonstration :**

On suppose connaître  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux bijections,  
montrons qu'alors l'application  $g \circ f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$ .

Prenons un  $z$  dans  $G$ , (*Je prends un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée*)  
Pour  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) = z &\iff g(f(x)) = z && \text{(Déterminons les antécédents de ce } z \text{ par } g \circ f) \\ &\iff f(x) = g^{-1}(z) && \text{car } g \text{ est bijective} \\ &\iff x = f^{-1}(g^{-1}(z)) && \text{car } f \text{ est bijective} \\ &\iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z) && \text{qui est bien un élément de } E \end{aligned}$$

Donc tout élément de  $G$  possède un unique antécédent par  $g \circ f$  dans  $E$ , donc  $g \circ f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$ .

Plus "simplement" :  $\forall z \in G, \exists! x \in E : g \circ f(x) = z$  donc  $g \circ f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$

On a montré, de plus, que l'antécédent d'un  $z$  quelconque de  $G$  est donné par  $f^{-1} \circ g^{-1}(z)$ ,

donc la réciproque de  $g \circ f$  est l'application  $G \rightarrow E$ ,  
 $z \mapsto f^{-1} \circ g^{-1}(z)$

autrement dit :  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

**Théorème**

Une application  $f : E \rightarrow F$  est une bijection si, et seulement si, il existe  $g : F \rightarrow E$  telle que

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F$$

et alors  $g$  est la **réciproque** de  $f$ .

**Démontrons** pour une application  $f : E \rightarrow F$  que :

S'il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que :  $g \circ f = Id_E$  et  $f \circ g = Id_F$   
**alors**  $f$  est une bijection et  $f^{-1} = g$ .

On suppose qu'il existe une application  $g : F \rightarrow E$  telle que :  $g \circ f = Id_E$  et  $f \circ g = Id_F$

- Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $E$  tels que  $f(x_1) = f(x_2)$ ,  
on a alors  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  et comme on a :  $g \circ f = Id_E$  on en déduit que  $x_1 = x_2$

L'application  $f$  est donc injective.

- Soit  $y$  un élément de  $F$ ,  
on a  $f \circ g = Id_F$  donc  $f \circ g(y) = y$  ou encore  $y = f(g(y))$   
en posant  $x = g(y)$  on bien  $x$  dans  $E$  et  $f(x) = y$

L'application  $f$  est donc surjective.

- Une fois que l'on sait que  $f$  est bijective, on peut parler de  $f^{-1}$  sa réciproque.

On a  $g \circ f = Id_E$  donc  $g \circ f \circ f^{-1} = Id_E \circ f^{-1}$  et comme  $f \circ f^{-1} = Id_F$  et  $Id_E \circ f^{-1} = f^{-1}$  il vient :

$$g = f^{-1}$$

**Corollaire :**

Soit  $f : E \rightarrow E$ ,  
 $f \circ f = Id_E$  si, et seulement si,  $f$  est bijective et  $f^{-1} = f$ .

**Des propriétés spécifiques aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :**

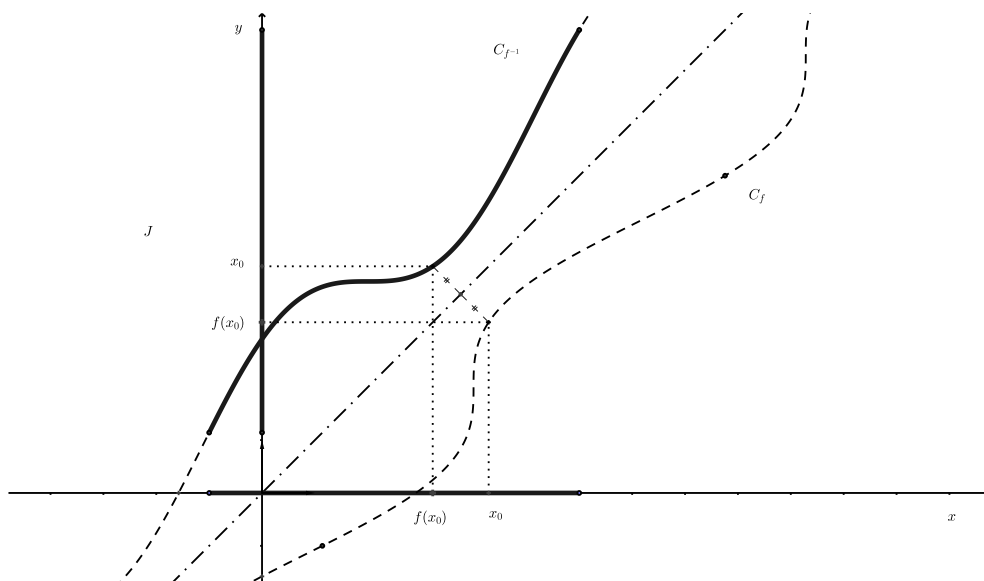
Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux parties de  $\mathbb{R}$ ,

Si  $f$  réalise une bijection de  $D_1$  dans  $D_2$  alors :

- ❶  $C_{f^{-1}}$  est la symétrique de  $C_f$  par la symétrie orthogonale d'axe  $\Delta : y = x$ .
- ❷ Si  $f$  est impaire alors  $f^{-1}$  est impaire.
- ❸ Si  $f$  est strictement croissante sur  $D_1$  alors  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $D_2$ .
- ❹ Si  $f$  est strictement décroissante sur  $D_1$  alors  $f^{-1}$  est strictement décroissante sur  $D_2$ .

**Remarque :**

$f$  réalise une bijection de  $D_1$  dans  $D_2$  signifie que l'application  $D_1 \rightarrow D_2$  est correctement définie et est bijective.  
 $x \mapsto f(x)$



### 1.5.5 Fonctions indicatrices.

#### Définition :

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ ,  
 On appelle **fonction indicatrice** de  $A$ ,  
 l'application de  $E$  dans  $\{0, 1\}$  qui  $x$  associe 1 si  $x \in A$  et 0 sinon.

#### Propositions :

- ① Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$$
- ② Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$
- ③ Si  $A$  est une partie de  $E$ , alors  

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$
- ④ Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$$
- ⑤ Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  

$$\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \iff A \subset B$$

#### Remarques :

- $\mathbb{1}_\emptyset = 0$  (l'application constante égale à zéro)
- $\mathbb{1}_E = 1$  (l'application constante égale à un)

## 1.6 Ensembles finis. Dénombrément.

### 1.6.1 Généralités

#### Définition :

Dire qu'un ensemble non vide  $E$  est fini  
 signifie qu'il existe un entier naturel  $n$  et une bijection de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  dans  $E$ .  
 Ce nombre  $n$  est alors unique et est appelé cardinal de  $E$ .

#### Remarques :

- on note :  $\text{card}(E)$  ce nombre entier (ou encore  $\#(E)$ ). ( $\text{card}(E) \in \mathbb{N}$ )
- $E$  est fini lorsqu'on peut numéroter ses éléments avec un nombre limité de numéros.  
 Le cardinal de  $E$  est alors le nombre d'éléments de  $E$ .
- Un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  peut s'écrire :

$$E = \{e_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \text{ avec : } \forall i \neq j, \quad e_i \neq e_j$$

- $\emptyset$  est un ensemble fini et  $\text{card}(\emptyset) = 0$
- Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs vérifiant  $a \leq b$ , alors :

$$\text{card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1$$

- Lorsqu'un ensemble  $E$  n'est pas fini on dit qu'il est **infini**. Exemples :  $\mathbb{N}, \mathbb{R}, [0, 1] \dots$

**Attention :** pour les ensembles de nombres ne pas confondre bornée et finie.

#### Proposition :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis,  
 $E$  et  $F$  ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre  $E$  et  $F$ .

## 1.6.2 Propriétés du cardinal.

**Propositions :** (*parties d'un ensemble fini*)

- ① Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.  
Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,
- ② **Si**  $A \subset B$  **alors**  $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$
- ③  $A \subset B$  et  $\text{card}(A) = \text{card}(B)$  **si, et seulement si,**  $A = B$ .
- ④ **Si**  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de  $E$  (ie :  $A \cap B = \emptyset$ ), **alors :**  
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

**Remarques :**

- Si un ensemble contient une partie infinie, il est lui aussi infini.
- Si  $A$  est une partie d'un ensemble fini  $E$ , alors  $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$
- $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

**Théorème :** (*Réunion de parties deux à deux disjointes.*)

Si  $(A_i)_{i \in [1, p]}$  est une famille de  $p$  parties deux à deux disjointes, alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$$

**Remarque :**

- Si  $(A_i)_{i \in [1, p]}$  est une **partition** d'un ensemble  $B$  alors :  $\text{card}(B) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$

**Théorème :** (*Réunion de deux ou trois parties quelconques.*)

- Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

- Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois parties de  $E$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

**Théorème :** (*produit cartésien*)

Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles finis, alors  $A \times B$  est fini et :  $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \text{card}(B)$

*Illustration :*

En notant :  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  avec  $n = \text{card}(A)$  et  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  avec  $m = \text{card}(B)$ .

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ & (a_n, b_1), (a_n, b_2), \dots, (a_n, b_m) \} \end{aligned}$$

Le nombre d'éléments de  $A \times B$  est égal à :  $n \times m$ .

**Proposition :**

Si  $(E_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est une famille de  $p$  ensembles finis, alors  $E_1 \times \cdots \times E_p$  est fini et :

$$\text{card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \cdots \times \text{card}(E_p)$$

**Proposition :**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  un ensemble fini, l'ensemble  $A^p$  est fini et :

$$\text{card}(A^p) = (\text{card}(A))^p$$

**Remarque :**

$$A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois l'ensemble } A}$$

### 1.6.3 Dénombrement des ensembles classiques.

#### Ensemble des $p$ -listes.

**Définition :**

On appelle  $p$ -listes d'un ensemble  $E$ , les éléments du produit cartésien  $E^p$ .

**Notation :** Les listes sont notées :  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , avec des parenthèses!!!

On rappelle que :  $(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_p) \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = x'_i$

**Théorème :**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , le nombre de  $p$ -listes  $E$  est égale à :  $n^p$

**Expérience classique qui amène des  $p$ -liste :** (*Situation de référence*)

Dans un ensemble contenant  $n$  objets numérotés de 1 à  $n$ , on effectue  $p$  tirages **successifs, avec remise**. Les résultats de ces tirages, rangés dans l'ordre d'apparition, constituent une  $p$ -liste.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égale à  $n^p$

C'est le nombre de façons de choisir successivement  $p$  objets parmi  $n$ , avec d'éventuelles répétitions.

#### Ensemble des $p$ -listes sans répétition (arrangements).

Dire qu'une  $p$ -liste  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est sans répétition signifie que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j$$

**Remarque :** on parle aussi de  $p$ -arrangement.

**Théorème :**

Etant donné deux entiers  $n$  et  $p$  strictement positifs ( $p \leq n$ ) et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .  
Le nombre de  $p$ -listes sans répétition d'éléments de  $E$  est égal à :  $\underbrace{n(n-1) \cdots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ .

**Remarques :**

Si  $p > n$ , alors il n'y pas de  $p$ -listes sans répétition d'éléments de  $E$ .

Le nombre de  $p$ -listes sans répétition de  $E$  est égal à :  $\frac{n!}{(n-p)!}$  ou encore  $\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)$

**Expérience classique qui amène des  $p$ -liste sans répétition :** (*Situation de référence*)

Soit  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls.

Dans un ensemble contenant  $n$  objets numérotés de 1 à  $n$ , on effectue  $p$  tirages **successifs, sans remise**. Les résultats de ces tirages, rangés dans l'ordre d'apparition, constituent une  $p$ -listes sans répétition.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égal à  $\underbrace{n(n-1) \cdots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

C'est le nombre de façons de choisir successivement  $p$  objets parmi  $n$ , sans répétition.

Nombre de permutations.**Définition**

Soit  $E$  un ensemble fini, une liste contenant exactement une fois chaque élément de  $E$  est appelée une permutation de  $E$ .

**Théorème**

Si  $\text{card}(E) = n$  le nombre de permutations de  $E$  est égal à :  $n!$  .

**Remarques :**

Le nombre d'ordres que l'on peut donner aux  $n$  éléments de  $E$  est égal à  $n!$ .

C'est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.

Nombre de combinaisons d'un ensemble fini.**Définition :**

Soit  $p$  un entier naturel, une  $p$ -combinaison de  $E$  est un sous-ensemble (une partie) de  $E$  à  $p$  éléments.

**Notations :**

- On notera  $\mathcal{P}_p(E)$  l'ensemble des  $p$ -combinaisons de  $E$ .

$$A \in \mathcal{P}_p(E) \iff (A \subset E \text{ et } \text{card}(A) = p)$$

- Une combinaison s'écrit  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  (des accolades!!) avec  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j$

**Remarque :** Contrairement aux listes si on change l'ordre des éléments cela ne change pas la combinaison.

**Théorème :**

Etant donné deux entiers  $n$  et  $p$  tels que  $p \leq n$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

Le nombre de  $p$ -combinaisons est égal à :  $\frac{1}{p!} \underbrace{n(n-1) \cdots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \binom{n}{p}$

**Remarque :** avec une  $p$ -combinaison on peut construire  $p!$  listes sans répétition de  $p$ -éléments de  $E$ .

**Expérience classique qui amène des  $p$ -combinaisons :** (*Situation de référence*)

Soit  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls.

Dans un ensemble contenant  $n$  objets numérotés de 1 à  $n$ , on effectue un tirage **simultané** de  $p$  objets.

Chaque résultat de ce tirage est une combinaison de  $p$  objets de l'ensemble.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égal à :  $\binom{n}{p}$

Nombre de parties d'un ensemble fini.**Théorème :**

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments, l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$  est fini et :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

*Démonstrations :* (2 démonstrations)

❶  $(\mathcal{P}_p(E))_{0 \leq p \leq n}$  est une partition de  $\mathcal{P}(E)$  donc

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{P}(E)) &= \sum_{p=0}^n \text{card}(\mathcal{P}_p(E)) \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \\ &= (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

❷ On note  $e_1, e_2, \dots, e_n$  les éléments de  $E$ .

On définit l'application  $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0; 1\}^n$ ,

qui à chaque partie  $A$  de  $E$  associe la liste  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\{0; 1\}^n$  définie par  $\begin{cases} \text{si } e_i \in A \text{ alors } x_i = 1 \\ \text{si } e_i \notin A \text{ alors } x_i = 0 \end{cases}$

Cette application est une bijection. sa réciproque est l'application de  $\{0; 1\}^n$  dans  $\mathcal{P}(E)$ ,

qui à chaque liste  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\{0; 1\}^n$  associe la partie  $A$  définie par :  $\begin{cases} \text{si } x_i = 1 \text{ alors } e_i \in A \\ \text{si } x_i = 0 \text{ alors } e_i \notin A \end{cases}$ .

on a construit une bijection entre ces deux ensembles et on sait que  $\text{card}(\{0; 1\}^n) = 2^n$ , donc

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

#### 1.6.4 Nombre d'anagrammes.

**Théorème des anagrammes.** (complément)

Soit un "mot"  $\mathcal{M}$  formé de  $p$  lettres distinctes  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , la lettre  $A_1$  apparaît  $n_1$  fois, ... , la lettre  $A_p$  apparaît  $n_p$  fois.

La longueur de  $\mathcal{M}$  vaut  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ .

Le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à :

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_p!}$$

ou encore

$$\binom{N}{n_1} \binom{N-n_1}{n_2} \binom{N-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$$

#### 1.6.5 Applications et cardinal.

##### Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Soit  $E$  de cardinal  $p$  et  $F$  de cardinal  $n$ , définir une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  revient à donner la liste  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$  des images des  $p$  éléments de  $E$  par  $f$ , pour chacun d'eux il y a  $n$  choix possibles.

Le nombre d'applications de  $E$  dans  $F$  est donc égal à  $n^p$

##### Nombre d'injections entre deux ensembles finis.

Soit  $E$  de cardinal  $p$  et  $F$  de cardinal  $n$ , définir une injection  $f$  de  $E$  dans  $F$  revient à donner la liste sans répétition  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$  des images des  $p$  éléments de  $E$  par  $f$ ; pour l'image de  $e_1$  il y a  $n$  choix possibles, puis pour l'image de  $e_2$ , il y a  $(n-1)$  choix possibles, ...

Le nombre d'injections de  $E$  dans  $F$  est donc égal à :  $\underbrace{n(n-1) \dots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ .

##### Nombre de bijections entre deux ensembles finis.

Soit  $E$  de cardinal  $n$  et  $F$  de cardinal  $n$ , définir une bijection  $f$  de  $E$  dans  $F$  revient à donner la liste sans répétition  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$  des images des  $n$  éléments de  $E$  par  $f$ ; pour l'image de  $e_1$  il y a  $n$  choix possibles, puis pour l'image de  $e_2$ , il y a  $(n-1)$  choix possibles, ...

Le nombre de bijections de  $E$  dans  $F$  est donc égal à :  $n!$

**Conditions suffisantes sur les cardinaux.****Proposition :**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis,  
 S'il existe une injection de  $E$  dans  $F$  alors  $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$   
 S'il existe une surjection de  $E$  dans  $F$  alors  $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$   
 S'il existe une bijection de  $E$  dans  $F$  alors  $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

**Injections et ensembles finis.****Propositions :**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles quelconques,  
 En supposant qu'il existe une injection de  $E$  dans  $F$  :

- $E$  est fini **si, et seulement si**,  $f(E)$  est fini (et alors  $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ )
- **Si**  $F$  est fini **alors**  $E$  est fini et  $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$
- **Si**  $E$  est infini **alors**  $F$  est infini.

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis,  
 • S'il existe une injection de  $E$  dans  $F$  et une injection de  $F$  dans  $E$   
**alors**  $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

**Application entre deux ensembles de même cardinal.****Propositions :**

Soit  $f : E \rightarrow F$  avec  $E$  et  $F$  deux ensembles finis tels que  $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

$f$  est injective si, et seulement si,  $f$  est bijective.

$f$  est surjective si, et seulement si,  $f$  est bijective.

**1.6.6 Somme sur un ensemble fini.****Définition, notation :**

Soient  $E$  un ensemble fini, tel que  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  avec  $\text{card}(E) = n$   
 et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  avec  $F$  un ensemble muni d'une somme.

On note : 
$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i)$$

**Propositions :**

Soit  $E$  un ensemble fini,

❶ Si  $A_1, A_2, \dots, A_p$  forment une partition de  $E$  alors :

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{x \in A_k} f(x) \right)$$

❷ Si  $\sigma$  est une bijection de  $E$  dans  $E$ ,  $\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in E} f(\sigma(x))$

*On ne change pas la somme si on modifie l'ordre dans lequel on fait la somme.*

❸  $\text{card}(E) = \sum_{x \in E} 1$  et pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{x \in E} \lambda = \lambda \text{card}(E)$

❹ Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$



# Suites réelles.

## Plan du chapitre

2.1	Suites réelles. . . . .	45
2.1.1	Suites majorées, minorées, bornées. . . . .	45
2.1.2	Monotonie. . . . .	45
2.2	Limite de suite réelle. . . . .	46
2.2.1	Suites convergentes. . . . .	46
2.2.2	Suites tendant vers l'infini. . . . .	46
2.2.3	Suites extraites. . . . .	46
2.2.4	Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques. . . . .	47
2.3	Convergence et inégalités. . . . .	47
2.3.1	Lorsqu'on sait que les suites convergent. . . . .	47
2.3.2	Théorèmes de comparaison. . . . .	47
2.4	Opérations et limites. . . . .	48
2.4.1	Somme. . . . .	48
2.4.2	Produit. . . . .	48
2.4.3	Quotient $v_n/u_n$ . . . . .	48
2.5	Conséquences de la propriété de la borne supérieure. . . . .	49
2.5.1	Théorème de convergence monotone. . . . .	49
2.5.2	Suites adjacentes. . . . .	49
2.6	Echelle de comparaison. . . . .	49
2.7	Suites équivalentes. . . . .	50

## 2.1 Suites réelles.

### 2.1.1 Suites majorées, minorées, bornées.

#### Définitions.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles,

- ❶ Dire que  $(u_n)$  est majorée signifie que :  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- ❷ Dire que  $(u_n)$  est minorée signifie que :  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- ❸ Dire que  $(u_n)$  est bornée signifie que :  $\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$   
ou avec la valeur absolue.
- ❹ Dire  $(u_n)$  est bornée signifie que :  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

### 2.1.2 Monotonie.

#### Définitions :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles,

- dire que  $(u_n)$  est croissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$  (ou  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ )
- dire que  $(u_n)$  est décroissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ )
- dire que  $(u_n)$  est strictement croissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$  (ou  $u_{n+1} - u_n > 0$ )
- dire que  $(u_n)$  est strictement décroissante signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n < 0$ )

**En pratique :** (*Plusieurs stratégies possibles*)

## 2.2 Limite de suite réelle.

### 2.2.1 Suites convergentes.

**Définition :**

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $\ell$  un réel,

dire que  $(u_n)$  **converge vers  $\ell$**  signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon}_{APCR}$$

Plus simplement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

**Théorème :**

Toute suite convergente est bornée.

### 2.2.2 Suites tendant vers l'infini.

**Définitions :**

Dire que  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, A \leq u_n}_{APCR}$

Dire que  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \leq A}_{APCR}$

### 2.2.3 Suites extraites.

**Propositions :**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles et  $\alpha$  un nombre réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

- ① la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  **si, et seulement si**, les suites  $(u_{n+1}), (u_{n+2}), \dots$  tendent vers  $\alpha$ .
- ② la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  **si, et seulement si**, les suites  $(u_{n-1}), (u_{n-2}), \dots$  tendent vers  $\alpha$ .
- ③ **Si** la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  **alors** la suite  $(u_{2n})$  tend vers  $\alpha$ .
- ④ **Si** la suite  $(u_n)$  tend vers  $\alpha$  **alors** la suite  $(u_{2n+1})$  tend vers  $\alpha$ .

**Théorème :**

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs réelles,

- ① si les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$  alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .
- ② si les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  divergent vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ )

## 2.2.4 Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques.

### Les suites arithmétiques réelles.

On note, pour  $u_0$  et  $r$  deux réels, la suite  $(u_n) = (u_0 + nr)$ ,

- si  $r = 0$  alors  $(u_n)$  converge
- si  $r > 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- si  $r < 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

### Les suites géométriques réelles.

On note, pour  $u_0$  et  $q$  deux réels, la suite  $(u_n) = (u_0 q^n)$  (avec  $u_0 \neq 0$ )

- si  $-1 < q < 1$  alors  $(u_n)$  converge vers 0
- si  $q = 1$  alors  $(u_n)$  converge vers  $u_0$  (la suite est constante)
- si  $q > 1$  et  $u_0 > 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$
- si  $q > 1$  et  $u_0 < 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$

## 2.3 Convergence et inégalités.

### 2.3.1 Lorsqu'on sait que les suites convergent.

Il faut toujours avoir justifié que ces limites existent avant d'utiliser ces deux théorèmes.

**Théorème :**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites que l'on sait être convergentes,  $(u_n)$  vers le réel  $\ell$  et  $(v_n)$  vers le réel  $\ell'$ .

- ① Si  $0 < \ell$  alors  $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, 0 < u_n}_{APCR}$ .      ② Si  $\ell > \ell'$  alors  $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n > v_n}_{APCR}$ .

**Théorème :** lorsque tout converge, on peut passer à la limite sur des **inégalités larges**.

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites que l'on sait être convergentes,  $(u_n)$  vers le réel  $\ell$  et  $(v_n)$  vers le réel  $\ell'$ .

- ❶ Si  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$  alors  $0 \leq \ell$ .      ❷ Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  alors  $\ell \leq \ell'$ .

### 2.3.2 Théorèmes de comparaison.

Ici les théorèmes permettent de démontrer que des limites existent.

**Théorème :** ( $+\infty$  et  $-\infty$ )

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles,

- ① Si  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  alors  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ .  
 ② Si  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

**Théorème :** (d'encadrement ou encore "des gendarmes")

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites à valeurs réelles,

- Si**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$  et si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers un réel  $\ell$   
**alors**  $(v_n)$  est convergente et sa limite est  $\ell$ .

### Corollaires

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles et  $\ell$  un réel.

- ① **Si**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq v_n$  et si  $(v_n)$  converge vers 0 **alors**  $(u_n)$  converge vers 0.  
 ② **Si**  $(u_n)$  converge vers 0 et si  $(v_n)$  est bornée **alors**  $(u_n v_n)$  converge vers 0.  
 ③ **Si**  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq v_n$  et si  $(v_n)$  converge vers 0 **alors**  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Remarque :** dans tous les théorèmes de cette page on peut remplacer " $\forall n \in \mathbb{N}$ " par " $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N}_{APCR}$ "

## 2.4 Opérations et limites.

### 2.4.1 Somme.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$			
$\ell'$	$\ell' + \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

### 2.4.2 Produit.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$				
$\ell' > 0$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
0	0	F.I.	F.I.	0

### 2.4.3 Quotient $v_n/u_n$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$				
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	0	F.I.	F.I.	0
$-\infty$	0	F.I.	F.I.	0
$0^+$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$0^-$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

## 2.5 Conséquences de la propriété de la borne supérieure.

Revoir la définition des bornes supérieure/inférieure et le théorème de la borne supérieure.

### 2.5.1 Théorème de convergence monotone.

**Théorème :** (théorème de convergence monotone)

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs réelles,

- ❶ Si  $(u_n)$  est croissante et majorée alors la suite  $(u_n)$  converge.
- ❷ Si  $(u_n)$  est croissante et si elle diverge alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- ❸ Si  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors la suite  $(u_n)$  converge.
- ❹ Si  $(u_n)$  est décroissante et si elle diverge alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

**Remarque :** Dans ce théorème on peut remplacer "croissante" (resp. "décroissante") par "croissante APCR" (resp. "décroissante APCR")

### 2.5.2 Suites adjacentes.

**Définition :**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles.

Dire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes signifie que :

l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence converge vers 0.

**Théorème :**

**Si** deux suites sont adjacentes **alors** elles sont convergentes **et** elles convergent vers la même limite.

## 2.6 Echelle de comparaison.

**Théorème.** (Limites à connaître)

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ ,

$$\text{❶ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \text{❷ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

**Remarques :**

- on en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$
- Ces limites sont appelées "**croissances comparées des suites usuelles**".
- La limite ❶ est toujours vraie pour  $a \in [-1, 1]$ , mais il ne s'agit plus d'une limite "croissance comparée".
- La limite ❷ entraîne :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-1, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n = 0$

Quand  $\alpha < 0$  ce n'est pas une croissance comparée.

**Corollaire.**

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n = 0$$

## 2.7 Suites équivalentes.

**Définition.**

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $(v_n)$  ne s'annule pas :

Dire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites équivalentes signifie que : la suite  $\frac{(u_n)}{(v_n)}$  converge vers 1

On note :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \text{ou} \quad u_n \sim v_n$$

**Attention :** on n'écrit jamais :  $u_n \sim 0$

**Proposition :** (Les propriétés qui passent de  $(v_n)$  à  $(u_n)$  lorsque  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes).

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites équivalentes.  $(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n)$

- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \beta$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \beta$
- si  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang alors  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.
- si  $u_n \geq 0$  à partir d'un certain rang alors  $v_n \geq 0$  à partir d'un certain rang.
- si  $u_n < 0$  à partir d'un certain rang alors  $v_n < 0$  à partir d'un certain rang.

**Proposition :** (Relation d'équivalence)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles.

- ①  $(u_n) \sim (u_n)$     ② Si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(v_n) \sim (u_n)$
- ③ Si  $(u_n) \sim (v_n)$  et  $(v_n) \sim (w_n)$  alors  $(u_n) \sim (w_n)$

**Théorème :** (Opérations et suites équivalentes)

- ① Si  $(u_n) \sim (v_n)$  et  $(u'_n) \sim (v'_n)$  alors  $(u_n u'_n) \sim (v_n v'_n)$     *Produit.*
- ② Si  $\begin{cases} (u_n) \sim (v_n) \\ (u'_n) \sim (v'_n) \end{cases}$  alors  $\left(\frac{u_n}{u'_n}\right) \sim \left(\frac{v_n}{v'_n}\right)$     *Quotient.*
- ③ Si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(u_n^\alpha) \sim (v_n^\alpha)$     *Élévation à une puissance constante. ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )*
- ④ Si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(|u_n|) \sim (|v_n|)$     *Passage à la valeur absolue.*

**Attention :** on ne somme pas des équivalents.

# Fonctions

## Plan du chapitre

3.1	Généralités . . . . .	<b>51</b>
3.1.1	Majoration, minoration. . . . .	51
3.1.2	Maximum d'une fonction à valeurs réelles. . . . .	52
3.1.3	Sens de variations. . . . .	52
3.2	Limite d'une fonction. . . . .	<b>52</b>
3.2.1	Limite réelle en $x_0$ ou en $\infty$ . . . . .	52
3.2.2	Limite infinie . . . . .	53
3.2.3	Limites et inégalités. . . . .	53
3.2.4	Opérations et limites . . . . .	54
3.2.5	Echelle de comparaison. ( <i>Croissances comparées</i> ) . . . . .	55
3.2.6	Théorème de limite monotone. . . . .	55
3.3	Continuité sur un intervalle. . . . .	<b>56</b>
3.3.1	Généralités. . . . .	56
3.3.2	Opérations et continuité. . . . .	56
3.3.3	Théorème des valeurs intermédiaires. . . . .	57
3.3.4	Théorème de la bijection. . . . .	57
3.3.5	Image continue d'un segment. . . . .	58
3.4	Dérivation. . . . .	<b>58</b>
3.4.1	Continuité et dérivabilité. . . . .	58
3.4.2	Tangente à une courbe. . . . .	58
3.4.3	Dérivée des fonctions usuelles. . . . .	59
3.4.4	Opérations et dérivation. . . . .	59
3.4.5	Composée et fonctions dérivables. . . . .	60
3.4.6	Dérivée de la réciproque. . . . .	61
3.4.7	Dérivée d'ordre supérieur. . . . .	63
3.4.8	Exemples de dérivées $n$ ème de fonctions usuelles. . . . .	63
3.4.9	Extremum local d'une fonction dérivable. . . . .	66
3.4.10	Théorème de Rolle. . . . .	67
3.4.11	Théorème des accroissements finis. . . . .	67
3.4.12	Dérivée et sens de variations. . . . .	68

## 3.1 Généralités

### 3.1.1 Majoration, minoration.

**Définition :**

Soient  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $E$  une partie de  $D_f$  ( $E \subset D_f$ ),  
 Dire que  $f$  est majorée sur  $E$  signifie que :  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, f(x) \leq M$ .

On définit de même :  $f$  est minorée ou bornée sur  $E$ .

### 3.1.2 Maximum d'une fonction à valeurs réelles.

**Définition :** (*maximum global*)

Soient  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $M$  un réel  
 Dire que  $M$  est le maximum de  $f$  sur  $D$  signifie que :  
 $M$  est un majorant de  $f$  et il existe  $x_0 \in D$  tel que  $M = f(x_0)$   
 On note :  $\max_{x \in D} (f(x))$ .

On définit de même le minimum d'une fonction sur un ensemble  $D$ .

**Définition :** (*maximum local*)

Soient  $f$  une fonction et  $M$  un réel  
 Dire que  $M$  est un maximum local de  $f$  signifie que :  
 Il existe  $x_0 \in D_f$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $M = f(x_0)$  et  $M$  est le maximum de  $f$  sur  $D_f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

On définit de même un minimum local d'une fonction.

### 3.1.3 Sens de variations.

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$ ,  
 Dire que  $f$  est **croissante** sur  $D$  signifie que :  $\forall (a, b) \in D^2, a < b \implies f(a) \leq f(b)$   
 Dire que  $f$  est **strictement croissante** sur  $D$  signifie que :  $\forall (a, b) \in D^2, a < b \implies f(a) < f(b)$

On définit de même décroissante et strictement décroissante.

**Théorème :** (*Propriétés des fonctions strictement monotones*)

Si  $f$  est strictement croissante sur  $D$  alors

- ①  $\forall (a, b) \in D^2, a = b \iff f(a) = f(b)$
- ②  $\forall (a, b) \in D^2, a < b \iff f(a) < f(b)$
- ③  $\forall (a, b) \in D^2, a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$

Si  $f$  est strictement décroissante sur  $D$  alors

- ①  $\forall (a, b) \in D^2, a = b \iff f(a) = f(b)$
- ②  $\forall (a, b) \in D^2, a < b \iff f(a) > f(b)$
- ③  $\forall (a, b) \in D^2, a \leq b \iff f(a) \geq f(b)$

## 3.2 Limite d'une fonction.

### 3.2.1 Limite réelle en $x_0$ ou en $\infty$ .

**En  $-\infty$  ou  $+\infty$**

**Définition :**

Soient  $\ell$  un réel et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ .  
 Dire que  **$f$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$**  signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel  $\ell$  (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

**Définition :**

Soient  $\ell$  un réel et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $-\infty$ .  
 Dire que  **$f$  tend vers  $\ell$  en  $-\infty$**  signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel  $\ell$  (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$$

**En**  $x_0$

Soient  $\ell$  et  $x_0$  deux nombres réels, et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ .  
Dire que  **$f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$**  signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel  $\ell$  (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

**Définition :**

Dire que  $f$  est **continue** en  $x_0$  signifie que :  $f$  est définie en  $x_0$  et que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Autrement dit :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

**3.2.2 Limite infinie**

**Définitions :**

Soit  $f$  une définie au voisinage de  $x_0$ ,  
Ecrire :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \geq A$   
Ecrire :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \leq A$   
Soit  $f$  une définie au voisinage de  $+\infty$ ,  
Ecrire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \geq B \implies f(x) \geq A$   
Ecrire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \geq B \implies f(x) \leq A$   
Soit  $f$  une définie au voisinage de  $-\infty$ ,  
Ecrire :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \leq B \implies f(x) \geq A$   
Ecrire :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  signifie que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \leq B \implies f(x) \leq A$

**3.2.3 Limites et inégalités.**

**Lorsqu'on sait que les fonctions ont des limites réelles.**

**Théorème :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $\alpha$ ,

- ❶ Si  $\lim_{\alpha} f = \ell$  et si  $\ell > 0$  alors au voisinage de  $\alpha$ ,  $f(x) > 0$ .
- ❷ Si  $f$  et  $g$  admettent une limite réelle en  $\alpha$  et si  $\lim_{\alpha} f < \lim_{\alpha} g$  alors au voisinage de  $\alpha$ ,  $f(x) < g(x)$ .

**Théorème :**

❶	Si	au voisinage de $\alpha$ , $f(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$	alors $\ell \geq 0$ .
❷	Si	$f(x) \leq g(x)$ au voisinage de $\alpha$ , $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell'$	alors $\ell \leq \ell'$

**Théorèmes de comparaison.**

**Théorèmes :**

① Si	au voisinage de $\alpha$ , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$	alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ existe et vaut $+\infty$ .
② Si	au voisinage de $\alpha$ , $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$	alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ existe et vaut $-\infty$ .
③ Si	au voisinage de $\alpha$ , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell$	alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ existe et vaut $\ell$ .

Corollaires :

① Si	au voisinage de $\alpha$ , $ f(x) - \ell  \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$	alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ existe et vaut $\ell$ .
② Si	au voisinage de $\alpha$ , $f(x) = g(x) \times h(x)$ $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ et au voisinage de $\alpha$ , $h$ est bornée.	alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ existe et vaut $0$ .

### 3.2.4 Opérations et limites

$\ell$  et  $\ell'$  désignent deux réels,  $\alpha$  désigne un réel  $x_0$  ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

#### Limite de la somme de deux fonctions : $f + g$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$			
$\ell'$	$\ell' + \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

#### Limite du produit de deux fonctions : $(f \times g)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$				
$\ell' > 0$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
$0$	$0$	F.I.	F.I.	$0$

**Limite du quotient de deux fonctions :**  $\left(\frac{f}{g}\right)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$				
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	0	F.I.	F.I.	0
$-\infty$	0	F.I.	F.I.	0
$0^+$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$0^-$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

**Limites et composées.**

**Théorème :** (Composée de deux fonctions.)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $f$  est définie au voisinage de  $\alpha$ ,  $g$  de  $\beta$  et  $g \circ f$  de  $\alpha$ ,

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta \\ \text{et} \\ \lim_{y \rightarrow \beta} g(y) = \gamma \end{array} \right. \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \gamma$$

**Théorème :** (Composée d'une suite et d'une fonction.)

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $\alpha$  et  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $D_f$ .

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta \end{array} \right. \text{ alors la suite } (f(u_n)) \text{ tend vers } \beta \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

**3.2.5 Echelle de comparaison. (Croissances comparées)**

**Proposition.**

Pour  $a \in ]0; +\infty[$ , ( $a$  un réel strictement positif)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

**Remarques :**

- ❶ On peut ajouter  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^a \ln(x)) = 0$
- ❷ On se réfère toujours à une de ces limites pour justifier une "croissance comparée".

**3.2.6 Théorème de limite monotone.**

**Théorème :**

Soit  $f$  une fonction,  $\alpha$  et  $\beta$  désignent des réels,  $+\infty$  ou  $-\infty$   
 Si  $f$  est monotone sur l'intervalle  $] \alpha; \beta [$   
 alors  $f$  admet une limite (réelle ou infinie) à droite en  $\alpha$  et à gauche en  $\beta$ .

**Démonstration.** (Conséquence du théorème de la borne supérieure)

**Corollaire :**

Si  $f$  est croissante sur un intervalle ouvert  $I$   
alors  $f$  possède une limite réelle en tout point de  $I$  à gauche et à droite.

**En situation :**

- si  $f$  est croissante sur  $]a, +\infty[$  et si  $f$  est minorée alors  $f$  admet une limite réelle en  $a$ .
- si  $f$  est croissante sur  $]a, +\infty[$  alors  $f$  admet une limite à droite en  $a$ , une limite réelle ou  $+\infty$ .
- si  $f$  est décroissante sur  $]a, b[$  et si  $f$  est majorée alors  $f$  admet une limite réelle à droite en  $a$ .
- si  $f$  est décroissante sur  $]a, b[$  alors  $f$  admet à gauche en  $b$  une limite réelle ou  $-\infty$ .
- si  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et si  $f$  est minorée alors  $f$  admet une limite réelle en  $+\infty$ .
- si  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  admet une limite en  $-\infty$ , une limite réelle ou  $+\infty$ .

**Remarques :**

- Si  $f$  est croissante sur  $[a, b]$  alors  $f$  n'a pas nécessairement une limite en  $b$ , en revanche elle a une limite à gauche en  $b$ .

*Prendre par exemple la fonction partie entière sur  $[0, 1]$ .*

- On utilise souvent ce théorème en construisant un tableau de variations.

**Corollaire :**

Soit  $f$  une fonction,  $\alpha$  et  $\beta$  désignent des réels,  $+\infty$  ou  $-\infty$   
Si  $f$  est croissante sur l'intervalle  $] \alpha ; \beta [$  alors on a les équivalences suivante :

- ❶  $f$  admet une limite réelle à gauche en  $\beta$  si, et seulement si,  $f$  est majorée.
- ❷  $f$  admet une limite réelle à droite en  $\alpha$  si, et seulement si,  $f$  est minorée.

### 3.3 Continuité sur un intervalle.

Les fonctions  $f, g, \dots$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et sont chacune définies sur une partie de  $\mathbb{R}$  :  $D_f, D_g, \dots$

#### 3.3.1 Généralités.

**Définition :**

Soit  $D \subset D_f$  tel que  $f$  est définie au voisinage de tout  $x_0$  de  $D$ .  
Dire que  $f$  est continue sur  $D$  signifie que :  $f$  est continue en tout  $x_0$  de  $D$ .

#### 3.3.2 Opérations et continuité.

**Théorème :**

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $D$  alors  $f + g$ ,  $f \times g$  sont continues sur  $D$ .  
si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $D$  alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $D$ .

**Théorème :**

Soient  $I, J$  deux intervalles,  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,

Si  $\begin{cases} \text{① } f \text{ est continue sur } I \\ \text{② } g \text{ est continue sur } J \\ \text{③ } \forall x \in I, f(x) \in J \end{cases}$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

### 3.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème :**

**Version 1 :** Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $I$ ,  
alors pour tout réel  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = \lambda$  admet *au moins* une solution dans  $[a, b]$ .

**Version 2 :** Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ .

Si  $\begin{cases} \textcircled{1} f \text{ est continue sur } I \\ \textcircled{2} I \text{ est un intervalle} \\ \textcircled{3} f(a) \leq 0 \text{ et } f(b) \geq 0 \end{cases}$  alors il existe (*au moins*) un réel  $c \in I$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Version 3 :** Si  $I$  est un intervalle et  $f$  est une fonction continue sur  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

*L'image continue d'un intervalle est un intervalle.*

### 3.3.4 Théorème de la bijection.

**Théorème :**

Soient  $I$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ ,

Si  $\begin{cases} \textcircled{1} I \text{ est un intervalle} \\ \textcircled{2} f \text{ est continue sur } I \\ \textcircled{3} f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases}$  alors  $\begin{cases} \textcircled{1} f(I) \text{ est un intervalle} \\ \textcircled{2} f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } f(I) \end{cases}$

*Ce théorème est rarement utilisé tel quel, mais il en découle toutes les versions utilisées :*

**Théorème de la bijection** (*avec toutes les situations possibles*) :

Si  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  
alors  $f$  réalise une bijection de  $[a, b]$  dans  $[f(a), f(b)]$

Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  
alors  $f$  réalise une bijection de  $[a, b]$  dans  $[f(b), f(a)]$

Si  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $] \alpha, \beta [$ ,  
alors  $f$  réalise une bijection de  $] \alpha, \beta [$  dans  $] \lim_{\alpha} f, \lim_{\beta} f [$

Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $] \alpha, \beta [$ ,  
alors  $f$  réalise une bijection de  $] \alpha, \beta [$  dans  $] \lim_{\beta} f, \lim_{\alpha} f [$

...

**Propositions** (*Versions utilisées en pratique*) :

Si  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  
alors  $\forall k \in [f(a), f(b)], \exists ! \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = k$

Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  
alors  $\forall k \in [f(b), f(a)], \exists ! \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = k$

Si  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $] \alpha, \beta [$ ,  
alors  $\forall k \in ] \lim_{\alpha} f, \lim_{\beta} f [, \exists ! \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = k$

...

**Théorème :**

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,

on note :  $g : I \rightarrow f(I)$  et  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.  
 $x \mapsto f(x)$

- $g^{-1}$  est une bijection de  $f(I)$  dans  $I$ .
- $g^{-1}$  est continue. (*La réciproque d'une bijection continue est continue*)
- $g^{-1}$  est strictement monotone et de même monotonie que  $g$ .

**Remarque :** Il est simple de construire le tableau de variation de  $g^{-1}$ , connaissant celui de  $g$ .

### 3.3.5 Image continue d'un segment.

**Théorème :**

L'image directe d'un segment par une fonction continue est segment.

**Remarques :**

- Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors il existe  $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$  : tel que  $f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$ .
- Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors elle est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes (*sup et inf*).

## 3.4 Dérivation.

**Définition :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,

❶ Dire que  $f$  est **dérivable en**  $x_0$ ,

signifie que  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite réelle quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

❷ Cette limite s'appelle alors le **nombre dérivé** de  $f$  en  $x_0$ . On le note :  $f'(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

❸ Lorsque  $f$  admet un nombre dérivé en tout point de  $I$ , on dit que  $f$  est **dérivable sur**  $I$ .

et on définit alors la **fonction dérivée** :  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f'(x)$

### 3.4.1 Continuité et dérivabilité.

**Si**  $f$  est dérivable en  $x_0$  **alors**  $f$  est continue en  $x_0$ .

**En effet.** Pour tout  $x \in I \setminus \{x_0\}$ ,  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

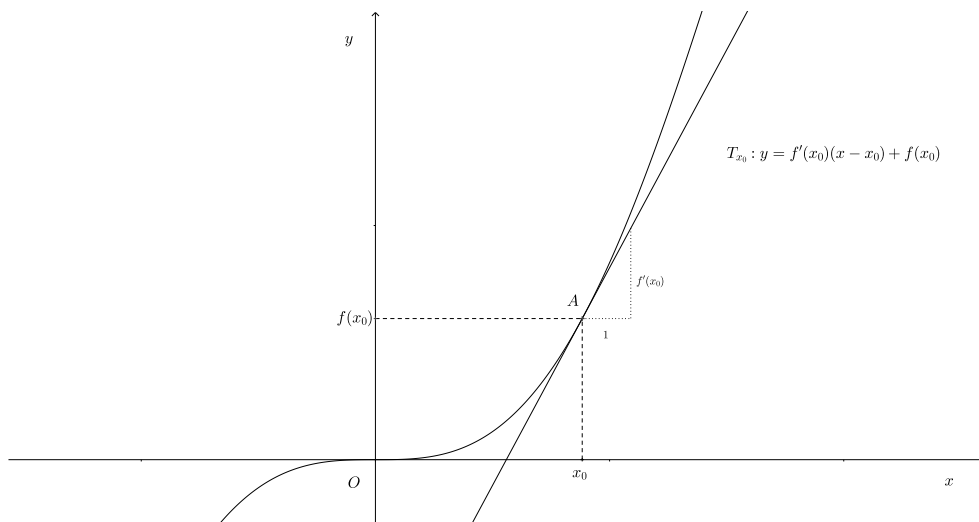
### 3.4.2 Tangente à une courbe.

**Définition.**

Lorsque  $f$  dérivable en  $x_0$ .

La droite passant par  $A(x_0, f(x_0))$  et de coefficient directeur  $f'(x_0)$  est appelée **tangente** à la courbe d'équation  $y = f(x)$ .

C'est la position limite de la corde passant par les points de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$



**Proposition.**

L'équation de la tangente à  $C_f$  en  $A(x_0, f(x_0))$  est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

**En effet :** La droite  $\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  a pour coefficient directeur  $f'(x_0)$  et les coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  vérifient cette équation donc  $A(x_0, f(x_0))$  appartient à  $\Delta$ .

**Définition :**

Lorsque  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ .  
La droite passant par  $A(x_0, f(x_0))$  et de coefficient directeur  $f'_g(x_0)$  est appelée demi-tangente à gauche à la courbe d'équation  $y = f(x)$ .

L'équation de la demi-tangente à gauche  $C_f$  en  $A(x_0, f(x_0))$  est :  $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

On définit de même la demi-tangente à droite.

**Définition :** Tangente verticale.

Si  $f$  est une fonction **continue** en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$  ou  $-\infty$ ,  
alors la droite  $x = a$  est une tangente verticale à la courbe d'équation  $y = f(x)$ .

**3.4.3 Dérivée des fonctions usuelles.**

Fonction	dérivée
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto a^x$	$x \mapsto \ln(a)a^x$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$	$x \mapsto \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$

Fonction	dérivée
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

**3.4.4 Opérations et dérivation.**

**Théorème :**

Soient  $\alpha, \beta$  deux réels et  $f, g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ ,

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$  alors :

- ❶  $\alpha f + \beta g$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ .
- ❷  $f g$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, (f g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ .

Si, de plus,  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors :

- ❸  $\frac{f}{g}$  et  $\frac{1}{g}$  sont dérivables sur  $I$  et  $\forall x \in I,$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

**Démonstrations.**

## 3.4.5 Composée et fonctions dérivables.

Théorème :

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles,  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ ,

Si  $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I, \\ g \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{et } \forall x \in I, f(x) \in J \end{cases}$  alors  $\begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \text{et} \\ \forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \end{cases}$

Démonstration :

Soit  $x_0 \in I$ , on note  $y_0 = f(x_0)$ , (on sait que  $y_0 \in J$ )On note  $\tau$  le taux d'accroissement de  $g$  en  $y_0$  prolongé par  $\tau(y_0) = g'(y_0)$ (ce qui est possible car  $g$  dérivable en  $y_0$ ).pour tout  $x \neq x_0$ , on a :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \tau(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

■

Rédaction.

- ① La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  car ...
- ② Pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in J$  car ...
- ③ La fonction  $g$  est dérivable sur  $J$  car ...

donc la fonction  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  comme composée de fonctions dérivables.et pour tout  $x \in I$ ,  $(g \circ f)'(x) = \dots$ 

Quelques dérivées de composées usuelles (composées par une fonction usuelle).

Fonction	dérivée
$x \mapsto u(mx + p)$	$x \mapsto m u'(mx + p)$
$x \mapsto (u(x))^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \mapsto n u'(x) (u(x))^{n-1}$
$x \mapsto (u(x))^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \mapsto \alpha u'(x) (u(x))^{\alpha-1}$
$x \mapsto a^{(u(x))} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$x \mapsto \ln(a) u'(x) a^{(u(x))}$
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$x \mapsto e^{u(x)}$	$x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$
$x \mapsto \ln(u(x))$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$
$x \mapsto \ln( u(x) )$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$
$x \mapsto \sin(u(x))$	$x \mapsto u'(x) \cos(u(x))$
$x \mapsto \cos(u(x))$	$x \mapsto -u'(x) \sin(u(x))$
$x \mapsto \tan(u(x))$	$x \mapsto u'(x) (\tan^2(u(x)) + 1)$
$x \mapsto \tan(u(x))$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$x \mapsto \arctan(u(x))$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$

Dans tous ces cas, on se place sur un intervalle où  $u$  est dérivable et prend des valeurs où la fonction usuelle est dérivable.

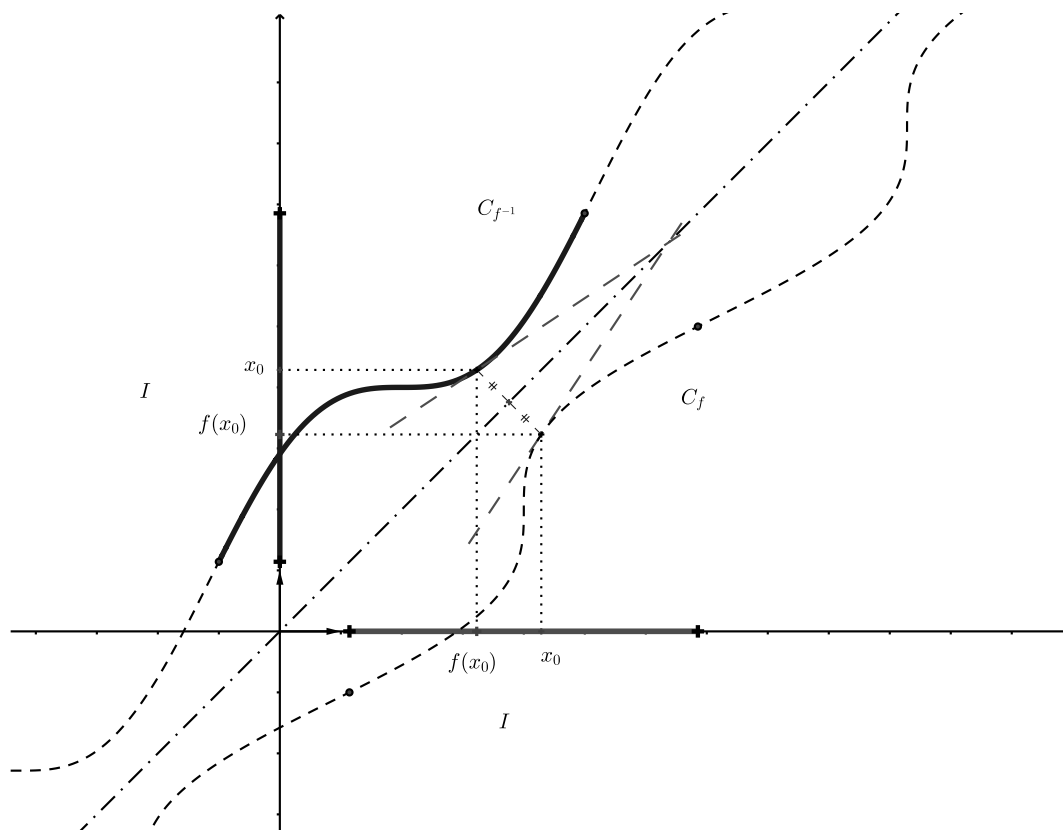
Par exemple :

Pour  $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$  la fonction  $u$  doit être dérivable sur  $I$  et vérifier  $\forall x \in I, u(x) \in \mathbb{R}_+^*$  ;

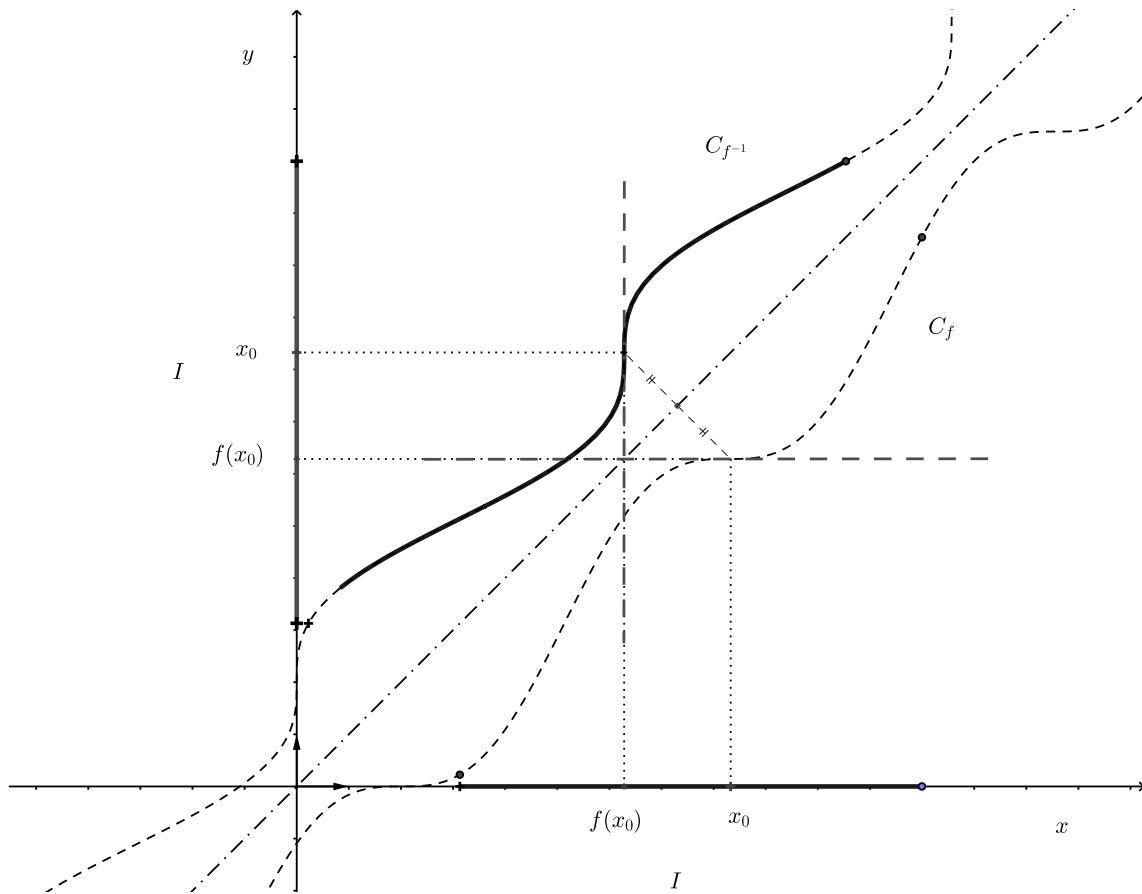
la fonction  $f$  est alors dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ .

### 3.4.6 Dérivée de la réciproque.

1er cas :  $f$  dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) \neq 0$



2ème cas :  $f$  dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = 0$



**Théorème :**

Soient  $f$  une bijection continue et strictement monotone de  $I$  dans  $f(I)$ ,  $x_0 \in I$  et  $y_0 = f(x_0)$ .

**1er cas :** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  et  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**2ème cas :** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = 0$  alors  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $y_0$  et  $C_{f^{-1}}$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $y_0$ .

**Remarques :**

- Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et si  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et  $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .
- L'ensemble de dérivabilité de  $f^{-1}$  est l'ensemble des  $f(x)$  pour les  $x$  de  $I$  vérifiant  $f'(x) \neq 0$
- Pour  $y \in f(I)$ ,  $f^{-1}$  est dérivable en  $y$  si, et seulement si,  $\exists x \in I : f'(x) \neq 0$  et  $y = f(x)$ .

**Démonstration :**

On suppose  $f$  dérivable en  $x_0$ ,

Soit  $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$ , (ce qui implique  $f^{-1}(y) \neq x_0$ )

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}$$

or  $\begin{cases} \lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0 & (\text{car } f^{-1} \text{ continue en } y_0) \\ \lim_{X \rightarrow x_0} \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_0) \end{cases}$  donc  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = f'(x_0)$

**1er cas :**  $f'(x_0) \neq 0$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

donc  $f^{-1}$  est dérivable et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**2ème cas :**  $f'(x_0) = 0$

comme  $f$  est monotone on a :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0^+$  ou  $0^-$

ce qui implique que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$

ce qui donne bien :  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $y_0$

et comme  $f^{-1}$  est continue en  $y_0$ ,  $C_{f^{-1}}$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $y_0$ . ■

**Corollaire :**

Soit  $f$  une bijection continue et strictement monotone de  $I$  sur  $f(I)$ ,

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(I)$  et :

$$\forall x \in f(I), \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### 3.4.7 Dérivée d'ordre supérieur.

#### Définition de la dérivée $n$ ième .

**Définition :** (fonctions  $n$  fois dérivables)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . (on note  $f = f^{(0)}$ )

Dire que :  $f$  est (au moins)  $n$  fois dérivable sur  $I$ ,

signifie que : successivement pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ ,

$$f^{(k-1)}$$
 est dérivable sur  $I$  et on note  $f^{(k)}$  sa dérivée.

### 3.4.8 Exemples de dérivées $n$ ième de fonctions usuelles.

Toutes les fonctions usuelles (*celles du chapitre "1. Fonctions usuelles"*) sont indéfiniment dérivables sur leur ensemble de dérivabilité.

Si elles sont dérivables une fois, alors elles le sont autant de fois que l'on veut.

Soit  $p$  un entier naturel non nul, on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^p$ .

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall n \in \llbracket 0; p \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} \quad \forall n > p, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = 0$$

Contrairement aux autres exemples, ici on ne démontre pas que ce polynôme est indéfiniment dérivable.

**Démonstration :** Un exemple de récurrence finie.

On fixe  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \llbracket 0; p \rrbracket$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$ .

Pour  $n = 0$ ,

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(0)}(x) = x^p$  et  $\frac{p!}{(p-0)!} x^{p-0} = x^p$  donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Soit  $n \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$ ,

(On suppose la propriété vraie au rang  $n$ )

Comme  $p - n > 0$ , on a bien  $f^{(n)}$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= \frac{p!}{(p-n)!} (p-n)x^{p-n-1} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{p!}{(p-n-1)!} x^{p-n-1} \end{aligned}$$

(La propriété est vraie au rang  $n+1$ )

En conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \llbracket 0; p \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}.$$

En particulier pour  $n = p$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  est la fonction constante égale à  $p!$ , ce qui entraîne :

$$\forall n > p, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = 0$$

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = n! \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

**Démonstration :**

On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = n! \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

Pour  $n = 0$ ,

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$  est (au moins) 0 fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0! \frac{(-1)^0}{x^{0+1}} = \frac{1}{x}$$

La propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = n! \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$

$f^{(n)} : x \mapsto n! \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $f$  est  $n+1$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ ,

et pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= n!(-1)^n(-(n+1))x^{-(n+2)} \\ &= (n+1)! \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

La propriété supposée vraie à un rang  $n$ , entraîne qu'elle l'est au rang  $n+1$ .

En conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = n! \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \ln(x)$ .

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

Soit  $\alpha$  un réel, on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^\alpha$ .

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Soit  $m$  un nombre réel non nul, on note  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f : x \mapsto e^{mx}$ .

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = m^n e^{mx}$$

### Démonstration :

Soit  $m$  un réel non nul, on note  $f$  la fonction  $x \mapsto e^{mx}$ ,

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = m^n e^{mx}$$

Pour  $n = 0$ ,

$f : x \mapsto e^{mx}$  est (au moins) 0 fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = e^{mx} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad m^0 e^{mx} = e^{mx}$$

La propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = m^n e^{mx}$

$f^{(n)} : x \mapsto m^n e^{mx}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est  $n+1$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= m^n m e^{mx} \\ &= m^{n+1} e^{mx} \end{aligned}$$

La propriété supposée vraie à un rang  $n$ , entraîne qu'elle l'est au rang  $n+1$ .

En conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = m^n e^{mx}$$

On note  $f$  la **fonction cosinus** :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

On note  $f$  la **fonction sinus** :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

### Démonstration :

On note  $f$  la fonction sinus.

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Pour  $n = 0$ ,

$f : x \mapsto \sin(x)$  est 0 fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f^{(0)}(x) = f(x) = \sin(x) = \sin\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right)$ .

La propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(f^{(n)})'(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

or  $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$  et  $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

on a bien  $f$  est  $n+1$  fois dérivable et :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

En conclusion :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

ou encore :

$f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, f^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

### Fonctions de classe $C^n$ .

#### Définitions :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,

Dire qu'une fonction  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I$  signifie qu'elle est  $n$  fois dérivable et que  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .

Dire que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$  signifie que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  (on dit alors que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ ).

### Dérivées successives et opérations.

#### Théorèmes :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta$  deux réels.

① Si  $f \in C^n(I)$  et  $g \in C^n(I)$  alors  $\alpha f + \beta g$  et  $f g$  sont de classe  $C^n$  sur  $I$ .

② Si  $f \in C^n(I)$  et  $g \in C^n(I)$  et si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont de classe  $C^n$  sur  $I$ .

③ Si  $f \in C^n(I), g \in C^n(J)$  et si  $f(I) = J$  alors  $g \circ f \in C^n(I)$

On peut énoncer les mêmes théorèmes en remplaçant tous les  $C^n$  par des  $C^\infty$ .

#### Théorème :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta$  deux réels.

Si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$  alors  $\alpha f + \beta g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$

### 3.4.9 Extremum local d'une fonction dérivable.

#### Théorème :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un élément de  $I$  qui n'est pas une borne de  $I$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ admet un extremum local en } a \end{cases}$  alors  $f'(a) = 0$

#### Remarques :

- $f'(a) = 0$  est une condition nécessaire pour que  $f$  possède un extremum local en  $a$ .

Cette condition n'est pas suffisante. Pour le justifier, il suffit de prendre la fonction  $x \mapsto x^3$ .

- Si  $a$  est une borne de  $I$ , alors cette condition n'est pas nécessaire. (On n'a pas nécessairement,  $f'(a) = 0$ ).

Autre énoncé :

#### Théorème :

Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $c$  un élément de  $I$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } c \\ f \text{ admet un extremum local en } c \end{cases}$  alors  $f'(c) = 0$

#### Démonstration :

Soit  $c \in I$  tel que  $f$  admet un maximum local en  $c$ .

comme  $I$  est ouvert, on peut approcher  $c$  par la gauche et par la droite et ainsi pour  $x$  voisin de  $c$  :

$$\text{si } x < c \text{ alors } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{si } x > c \text{ alors } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\text{or } f \text{ est dérivable en } c \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

on en déduit que  $f'(c) \geq 0$  et  $f'(c) \leq 0$ , ce qui donne bien  $f'(c) = 0$

### 3.4.10 Théorème de Rolle.

**Théorème :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels vérifiant  $a < b$  et  $f$  une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur } ]a, b[ \\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \exists c \in ]a, b[ : f'(c) = 0$$

**Démonstration :**

$f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc l'ensemble  $f([a, b])$  peut s'écrire sous la forme  $[m, M]$ .

trois cas :

1. Si  $m = M$ ,  $f$  est constante.

2. Si  $m \neq M$  et  $f(a) = M$ ,

$m$  est atteint sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  en un  $c$  où  $f'(c) = 0$  d'après le paragraphe précédent.

3. Si  $m \neq M$  et  $f(a) \neq M$ ,

$M$  est atteint sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  en un  $c$  où  $f'(c) = 0$  d'après le paragraphe précédent.

### 3.4.11 Théorème des accroissements finis.

**Théorème :**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ ,

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur } ]a, b[ \end{cases} \quad \text{alors} \quad \text{il existe } c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Démonstration :*

La droite passant par  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$  a pour équation

$$y = \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) + f(a)$$

On note  $g$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par  $g(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$ .

On a :  $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [a, b] \\ g \text{ est dérivable sur } ]a, b[ \\ g(a) = g(b) = 0 \end{cases}$  donc en appliquant le théorème de Rolle à la fonction  $g$  on obtient :

$$\exists c \in ]a, b[ : g'(c) = 0$$

$$\text{or } \forall x \in ]a, b[, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

en conclusion on bien :

$$\exists c \in ]a, b[ : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Théorème :** (Plusieurs versions du même théorème)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ,

① **Si**  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $I$ , **alors** il existe  $c \in I$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

② **Si**  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $I$ , **alors** il existe  $c \in I$  tel que  $|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b - a|$ .

## 3.4.12 Dérivée et sens de variations.

**Théorème :**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ ,

- ❶  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$  **si, et seulement si,**  $f$  est croissante sur  $I$ .
- ❷  $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$  **si, et seulement si,**  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- ❸  $\forall x \in I, f'(x) = 0$  **si, et seulement si,**  $f$  est constante sur  $I$ .

**En effet.** Dans le sens direct on utilise le TAF, pour la réciproque les définitions.

**Attention :** Ces théorèmes sont faux lorsque  $I$  n'est pas un intervalle.

**Théorème :**

- ❶ Si  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur l'intervalle } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur } ]a, b[ \\ \forall x \in ]a, b[, f'(x) > 0 \end{array} \right.$  **alors**  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ .
- ❷ Si  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I, f'(x) > 0 \end{array} \right.$  **sauf en un nombre fini de points.** **alors**  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

On peut énoncer des théorèmes du même type pour les fonctions strictement décroissantes.

# Intégrales d'une fonction continue sur un segment.

## Plan du chapitre

4.1	Définitions . . . . .	69
4.2	Sommes de Riemann . . . . .	70
4.3	Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue. . . . .	71
4.3.1	Relation de Chasles. . . . .	71
4.3.2	Linéarité. . . . .	71
4.3.3	Croissance de l'intégrale. . . . .	72
4.3.4	Valeur moyenne. . . . .	72
4.3.5	Intégrales et valeurs absolues. . . . .	73
4.4	Théorème fondamental . . . . .	73
4.4.1	Définition d'une primitive . . . . .	73
4.4.2	Théorème . . . . .	73
4.4.3	Calcul de primitives. . . . .	74
4.5	Parité et périodicité. . . . .	74
4.5.1	Intégrales et parité. . . . .	74
4.5.2	Intégrales et périodicité. . . . .	76
4.6	Positivité stricte. . . . .	77
4.7	Calculs d'intégrales. . . . .	77
4.7.1	Intégration par parties. . . . .	77
4.7.2	Intégration par changement de variable. . . . .	78

## 4.1 Définitions

Dans ce cours  $I$  désigne toujours un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ .

### Définition :

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  vérifiant  $a < b$ ,  
L'intégrale de  $f$  sur le segment  $[a, b]$  est l'aire algébrique sous la courbe.

L'intégrale existe quand cette aire est bien définie (*mais nous ne développerons pas la notion d'aire dans ce cours*).

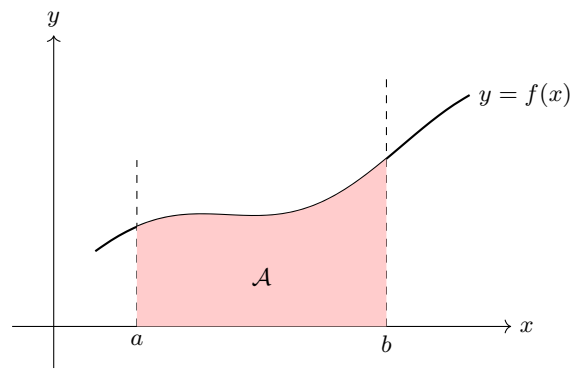
Lorsque  $f$  est continue sur  $[a, b]$  l'intégrale est bien définie.

Lorsque  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  alors l'intégrale est bien définie.

### • Illustration graphique :

Si  $a < b$  et  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  et à valeurs **positives** sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Aire}(\{ M(x, y) \in \mathcal{P} \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \}) \quad (\text{en u.a})$$

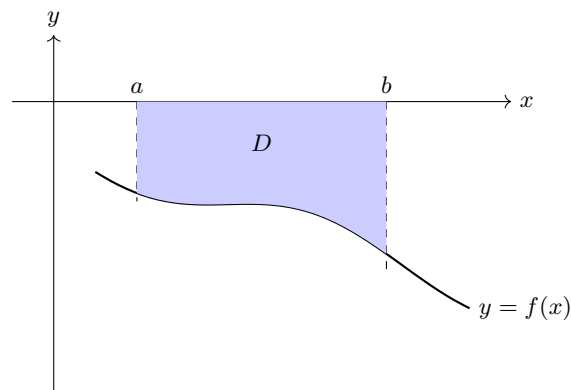


Si  $a < b$  et  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  et à valeurs **négatives** sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b f(t) dt = -\text{Aire}(D) \quad (\text{en u.a.})$$

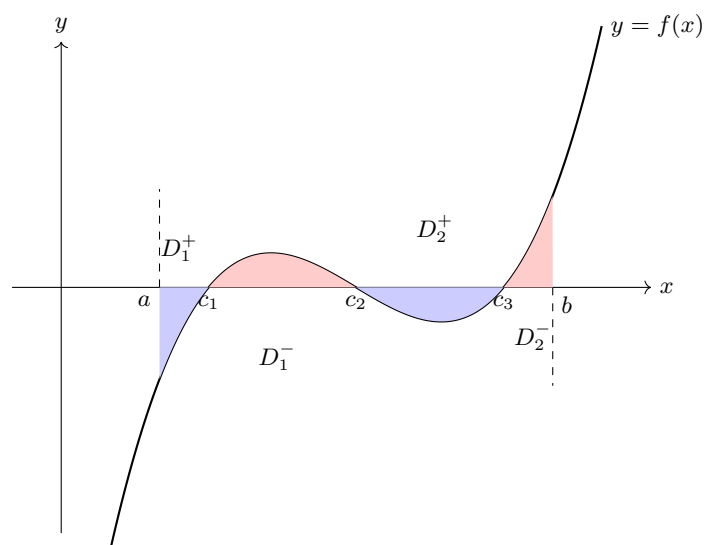
où

$$D = \{ M(x, y) \in \mathcal{P} \mid a \leq x \leq b \quad f(x) \leq y \leq 0 \}$$



Si  $a < b$  et  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b f(t) dt = \text{Aire}(D^+) - \text{Aire}(D^-) \quad (\text{en u.a.})$$



## 4.2 Sommes de Riemann

**Définition :** (Sommes de Riemann)

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ , on définit sur  $\mathbb{N}^*$  les suites  $(G_n)$  et  $D_n$  par :

$$G_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad D_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

**Théorème :**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors la suite  $(G_n)$  converge vers  $\int_a^b f(x) dx$

**Remarques :**

- Les énoncés précédents sont vrais pour  $a$  et  $b$  quelconques dans  $I$ , ( $a < b$ ,  $a > b$  et  $a = b$ )
- En notant pour  $k$  allant de 0 à  $n$ ,  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $\underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\text{valeur moyenne de } f} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}_{\text{moyenne arithmétique de valeurs de } f}$
- Ce théorème est à la base de la **méthode** d'approximation dite **des rectangles** (Voir la feuille info\_2).
- **En pratique** on applique souvent la proposition suivante :

Si  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$  avec  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  alors  $(u_n)$  converge vers :  $\int_0^1 f(x) dx$

### 4.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue.

#### 4.3.1 Relation de Chasles.

**Théorème :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  contenant  $a, b, c$ .  
Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Généralisation :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $n$  un entier non nul et  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  une suite finie d'éléments de  $I$ .

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x) dx = \sum_{k=2}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$$

#### 4.3.2 Linéarité.

**Linéarité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  et  $b$ .  
Alors pour tout réel  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

**Généralisation :**

Soient  $n$  un entier naturel non nul,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  des fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ .

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left( \int_a^b f_k(x) dx \right)$$

## 4.3.3 Croissance de l'intégrale.

Théorème :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ ,Si  $a \leq b$  sont deux éléments de  $I$  et si  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$  alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ 

En pratique : Ce n'est pas une équivalence et il ne faut pas oublier le quantificateur :

On sait que :  $\boxed{\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0}$   $\boxed{\text{donc}}$   $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ 

Corollaires :

① Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ ,Si  $a \leq b$  sont deux éléments de  $I$  et si  $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$  alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

② Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions continues sur  $I$ ,Si  $a \leq b$  sont deux éléments de  $I$  et si  $\forall x \in [a, b], h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  alors

$$\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

③ Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ ,Si  $a$  et  $b$  sont deux éléments distincts de  $I$  et si  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$ 

alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

## 4.3.4 Valeur moyenne.

Définition et proposition :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$ ① On appelle **valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$**  le réel :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

② La valeur moyenne est une valeur de la fonction  $f$ .(autrement dit : Il existe  $x \in I$  tel que  $f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ )

Démonstration de ② :

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , elle y atteint ses bornes. Il existe donc  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M.$$

En intégrant sur  $[a, b]$ , on obtient

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

puis

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Comme  $b-a > 0$ , on peut diviser par  $b-a$  :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Or, comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , elle prend toutes les valeurs comprises entre  $m$  et  $M$ . Il existe donc  $c \in [a, b]$  tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ainsi, la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  est bien une valeur prise par la fonction  $f$ . □

### 4.3.5 Intégrales et valeurs absolues.

**Proposition :** (*Inégalité triangulaire*)

Soient  $f$  continue sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  vérifiant  $a \leq b$ .

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Proposition :**

Soient  $f$  continue sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| |b - a|$$

**Remarques :**

- Ici comme la fonction  $f$  est continue  $\sup_{t \in [a,b]} |f(t)| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$  la borne supérieure est atteinte.

- Si  $M$  est un majorant de  $|f|$  sur  $I$  alors  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M |b - a|$

## 4.4 Théorème fondamental

### 4.4.1 Définition d'une primitive

**Définition** (*Primitive d'une fonction sur un intervalle*)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Dire que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  signifie que :

- ❶  $F$  est dérivable sur  $I$  et      ❷  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ .

**Remarque :** " $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , si et seulement si,  $f$  est la dérivée de  $F$  sur  $I$ ".

### 4.4.2 Théorème

**Théorème.** (*Théorème fondamental de l'analyse*)

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un élément de  $I$ ,

si  $f$  est continue sur  $I$  alors la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

c'est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

**Démonstration** dans le cas particulier d'une fonction positive, croissante avec  $x_0 \in ]a, b[$ .

Soient  $f$  une fonction continue, positive et croissante sur  $I$ ,  $a \in I$  et  $x_0 \in I$  qui n'est pas une borne de  $I$ ,

On note  $F$  la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

Montrons que  $F$  est dérivable en  $x_0$  et que  $F'(x_0) = f(x_0)$

Soit  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \end{aligned}$$

or  $f$  est croissante sur  $I$  donc  $\forall t \in [x_0, x_0 + h], f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0 + h)$  et comme  $h > 0$  on en déduit

$$hf(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq hf(x_0 + h)$$

et ainsi

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

or  $f$  est continue en  $x_0$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$  et ainsi *théorème des gendarmes*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

La fonction  $F$  est donc dérivable à droite en  $x_0$  et  $F'_d(x_0)$ .

En prenant  $h < 0$ , on démontre de même que  $F$  est donc dérivable à gauche en  $x_0$  et  $F'_g(x_0)$ .

En conclusion

$$\boxed{F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } F'(x_0) = f(x_0)}$$

Et comme c'est vrai pour un  $x_0$  quelconque dans  $I$ ,

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } F' = f}$$

### Conséquences

- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  possède des primitives sur  $I$ .
- Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$

$$\text{Pour tout } (a, b) \in I, \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

On note en pratique (*plus facile de vérifier sous cette forme la primitive*) :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

#### 4.4.3 Calcul de primitives.

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ .

Pour trouver une expression  $F(x)$  permettant de définir une primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ , il suffit de fixer un élément  $a$  quelconque de  $I$  et de calculer pour un  $x$  quelconque l'intégrale :

$$\int_a^x f(t) dt$$

## 4.5 Parité et périodicité.

### 4.5.1 Intégrales et parité.

**Proposition.**

Soient  $f$  une fonction continue sur un ensemble  $D$  centré en 0 et  $a \in D$ ,

Si  $f$  est **paire** et si  $[-a, a] \subset D$  alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

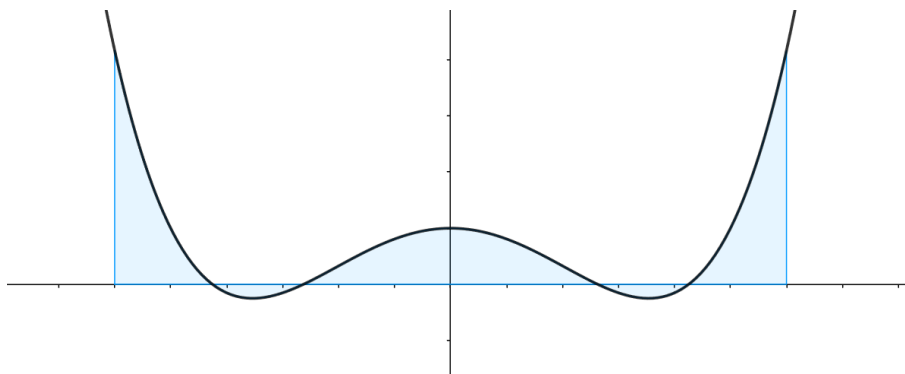
**Démonstration.** (*On utilise le changement de variable qui est dans la suite de ce cours*)

On suppose que la fonction  $f$  est paire.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &\stackrel{x=-t}{=} \int_a^0 f(-x)(-1) dx + \int_0^a f(t) dt && \text{Changement de variable affine} \\ &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt && \text{car } f \text{ est paire} \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^a f(t) dt$$

si  $f$  est paire alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$



**Proposition.**

Soient  $f$  une fonction continue sur un ensemble  $D$  centré en 0 et  $a \in D$ ,  
 Si  $f$  est **impair** et si  $[-a, a] \subset D$  alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

**Démonstration.**

On note  $g : x \mapsto \int_{-x}^x f(t) dt$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (existe car  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ).

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = F(x) - F(-x)$ .

$F$  est une primitive donc  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et ainsi  $g$  est dérivable et

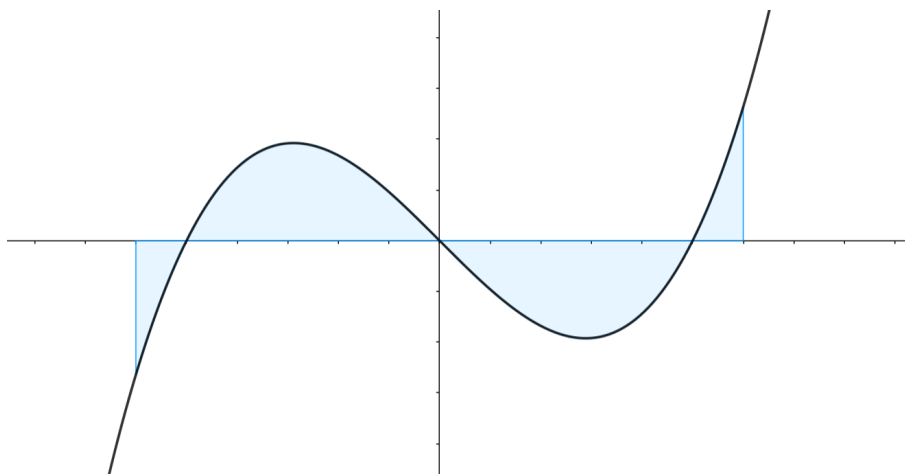
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= F'(x) + F'(-x) \\ &= f(x) + f(-x) \\ &= f(x) - f(x) \quad (\text{car } f \text{ est impair}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En résumé :  $\mathbb{R}$  est un intervalle,  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = 0$

donc  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ ,

et comme  $g(0) = 0$  on a :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 0$ , autrement dit  $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$

si  $f$  est impair alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$



4.5.2 Intégrales et périodicité.

Proposition.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $T$  ( $T > 0$ ).

❶ pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

❷ pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_a^{a+nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$$

Démonstrations.

❶  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on peut prendre une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  que l'on note  $F$ .

On note  $g$  la fonction  $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $g(x) = F(x+T) - F(x)$  et comme  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  aussi.

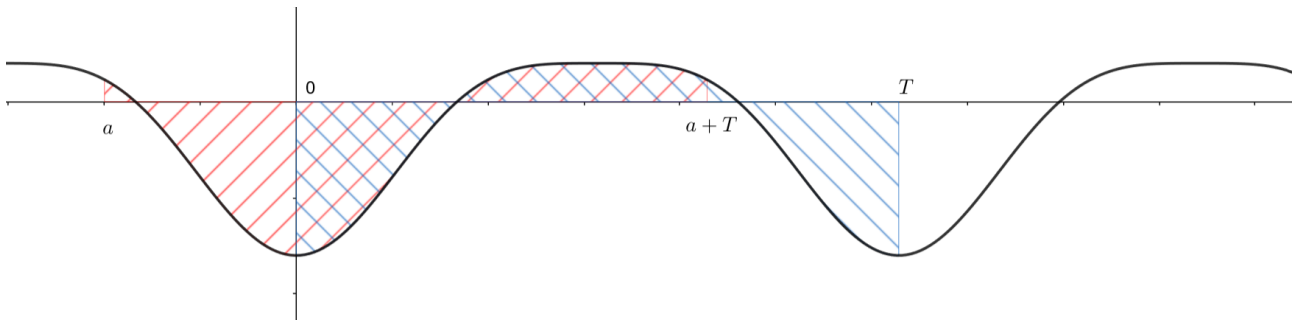
et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = f(x+T) - f(x)$  ce qui donne  $g'(x) = 0$  car  $f$  est  $T$ -périodique.

On a :  $g$  dérivable sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = 0$  donc  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

(Voir le cours sur : conséquences du théorème des accroissements finis)

on donc pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $g(a) = g(0)$ , autrement dit :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

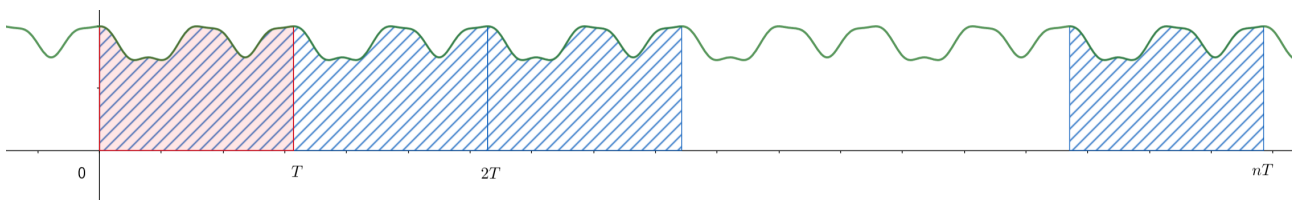


❷ Sur  $\mathbb{N}$ ,

(on pourrait raisonner par récurrence, mais la notation  $\sum$  cache souvent des récurrences)

D'une part pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} f(t) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt && \text{Relation de Chasles} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T f(t) dt && \text{d'après a.} \\ &= n \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$



d'autre part pour un  $n$  dans  $\mathbb{Z}_-$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} f(t) dt &\stackrel{x=t-nT}{=} \int_{-nT}^0 f(x+nT) dx && \text{Changement de variable} \\ &= - \int_0^{-nT} f(t+nT) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{(-n)T} f(t) dt && f \text{ est } T \text{ périodique} \\
&= -(-n) \int_0^T f(t) dt && (\text{ En utilisant ce qu'on vient de montrer pour } n \geq 0 )
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^{nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$$

**Proposition.**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $T$  ( $T > 0$ ).  
pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Voir feuille\_Act\_17

## 4.6 Positivité stricte.

**Théorème :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels vérifiant  $a < b$  et  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ , et  $\int_a^b f(x) dx = 0$  alors  $f = 0$  sur  $[a, b]$ .

**Démonstration.** En prenant  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ , on montre que  $F$  est croissante avec  $F(a) = F(b)$ .

**Corollaire :**

Soit  $a < b$  et  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ , et  $f \neq 0$  alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

## 4.7 Calculs d'intégrales.

### 4.7.1 Intégration par parties.

**Théorème :**

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur un segment  $[a, b]$ , alors :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = \left[ u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

**Démonstration.**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions deux classes  $C^1$  entre  $a$  et  $b$ ,  
on sait que  $uv$  est dérivable sur  $[a, b]$  et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

or toutes ces fonctions sont continues sur  $[a, b]$  donc

$$\left[ u(t)v(t) \right]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Il vient la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

### 4.7.2 Intégration par changement de variable.

$I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème :** (Changement de variable  $x = \varphi(t)$ ).

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $\varphi : J \rightarrow I$  de classe  $C^1$  et  $a$  et  $b$  deux réels de  $J$ .

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**Démonstration.**

Soient  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  entre  $a$  et  $b$  et à valeurs dans  $J$ ,  $f$  une fonction continue sur  $J$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $J$ .

$F \circ \varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et

$$\forall t \in I, \quad (F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

or toutes ces fonctions sont continues sur  $[a, b]$  donc

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

or  $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$  donc il vient la formule du changement de variable :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

**Proposition.** (Changement de variable affine  $x = \alpha t + \beta$ ).

Soit  $\alpha, \beta$  deux réels avec  $\alpha \neq 0$  et  $f$  une fonction telle que  $t \mapsto f(\alpha t + \beta)$  est définie sur le segment  $[a, b]$ .

**Si**  $f$  est continue sur  $[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$  **alors :**

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt \stackrel{x=\alpha t+\beta}{=} \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x) \times \frac{1}{\alpha} dx \quad \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x) dx \stackrel{x=\alpha t+\beta}{=} \int_a^b f(\alpha t + \beta) \alpha dt$$

# Systèmes, matrices

## Plan du chapitre

5.1	Systèmes linéaires. . . . .	<b>79</b>
5.1.1	Définitions. . . . .	80
5.1.2	Ensemble des solutions. . . . .	81
5.1.3	Cas particulier des systèmes $2 \times 2$ . . . . .	81
5.2	Systèmes triangulaires sans zéro sur la diagonale. . . . .	<b>81</b>
5.3	Systèmes sous forme échelon. . . . .	<b>82</b>
5.4	Méthode du pivot. . . . .	<b>82</b>
5.4.1	Opérations élémentaires. . . . .	82
5.4.2	Méthode du Pivot. . . . .	83
5.5	Matrices. . . . .	<b>83</b>
5.5.1	Généralités. . . . .	83
5.5.2	Des cas particuliers. . . . .	83
5.6	Opérations. . . . .	<b>84</b>
5.6.1	Combinaisons linéaires de matrices. . . . .	84
5.6.2	Produit de deux matrices. . . . .	84
5.6.3	Lignes et colonnes de $AB$ . (Complément) . . . . .	87
5.6.4	Puissance d'une matrice carrée. . . . .	87
5.7	Matrice inversible. . . . .	<b>88</b>
5.7.1	Définition. . . . .	89
5.7.2	Matrice inversible et systèmes. . . . .	89
5.7.3	Inverse d'un produit. . . . .	89
5.7.4	Cas particuliers. . . . .	90
5.8	Matrice transposée. . . . .	<b>91</b>
5.8.1	Définition. . . . .	91
5.8.2	Propriétés. . . . .	91
5.8.3	Inverse et transposée. . . . .	92
5.8.4	Matrices symétriques, antisymétriques. . . . .	92

## 5.1 Systèmes linéaires.

Il existe différentes méthodes pour résoudre un système : substitution, pivot de gauss, analyse-synthèse ...

L'objectif de ce cours :

- ❶ Définir le vocabulaire associé à la résolution des systèmes : solutions, second membre, équations, inconnues, rang, pivots, inconnus principales, secondaires, systèmes compatibles, système échelonné ...
- ❷ Savoir réduire un système linéaire par une méthode appelée méthode du pivot.
- ❸ Savoir écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
- ❹ Connaître des conditions permettant d'affirmer qu'un système a une unique solution, une infinité ou aucune.

**5.1.1 Définitions.**

Un système d'équations linéaires est un système d'équations de la forme :

$$(\Sigma) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$$

C'est un système à  **$p$  équations et  $n$  inconnues**. (ou encore  **$p$  lignes et  $n$  inconnues**).

Les  $a_{i,j}$  et les  $b_i$  sont des nombres réels (ou complexes).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{coefficients}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{inconnues}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{\text{second membre}}$$

On peut aussi écrire tout cela sous forme condensée :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i$$

**Résoudre le système**  $(\Sigma)$  revient à déterminer tous les  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  vérifiant toutes les égalités du système.

L'ensemble des solutions est une partie de  $\mathbb{R}^n$  (ou de  $\mathbb{C}^n$ ).

Chaque solution est un  $n$ -uplet, une  $n$ -liste, elle s'écrit avec des parenthèses :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

L'ensemble des solutions est :

$$S_\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i \right\}$$

Résoudre le système revient à écrire cette ensemble sous forme paramétrée.  $\{f(t) \mid t \in I\}$

**Vocabulaire.**

- Lorsque un système n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**.

- **Système de Cramer** : (*Ne pas en abuser vous dites vite des bêtises*)

Dire qu'un système est de Cramer signifie qu'il possède autant de lignes que d'inconnues **et** qu'il a exactement une solution.

- **Systèmes homogènes.**

On dit qu'un système est homogène lorsque son second membre est une colonne de zéro.

$$(\Sigma_0) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases} \text{ est le système homogène associé au système } \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

*Remarque : on parle aussi de système sans second membre.*

### 5.1.2 Ensemble des solutions.

**Théorème :**

L'ensemble des solutions d'un système homogène de  $p$  lignes,  $n$  inconnues est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème :**

Soit  $(\Sigma)$  un système linéaire et  $(\Sigma_0)$  son système homogène associé.

Si on connaît une solution  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  une solution de  $(\Sigma)$  et  $S_0$  l'ensemble des solutions de  $(\Sigma_0)$ ,  
**alors** l'ensemble des solutions de  $(\Sigma)$  est :

$$S = \{\alpha + t \mid t \in S_0\}$$

**Proposition :**

Un système linéaire possède zéro, une ou une infinité de solutions.

### 5.1.3 Cas particulier des systèmes $2 \times 2$ .

**Théorème :**

Pour  $a, b, c, a', b', c'$  des nombres réels (resp. complexes), on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ a un unique couple solution dans } \mathbb{R}^2 \text{ (resp. dans } \mathbb{C}^2)$$

si, et seulement si,  $ab' - a'b \neq 0$

**Définition :**

Le nombre complexe  $ab' - a'b$  est appelé **déterminant** du système :  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On note :  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

## 5.2 Systèmes triangulaires sans zéro sur la diagonale.

Ici  $n = p$ , il y a autant d'inconnues que d'équations.

**Théorème :**

Pour un système triangulaire  $(\Sigma)$  on a l'équivalence :

$(\Sigma)$  possède une et une seule solution **si, et seulement si**,  $(\Sigma)$  est sans zéro sur sa diagonale.

**C'est un outil important de rédaction.**

**Exemple :** Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  le système suivant possède une et une seule solution :

$$\begin{cases} x_1 + 2mx_2 - x_3 = 2 \\ mx_2 + 3x_3 = m \\ (m^2 - 1)x_3 = m^2 \end{cases}$$

**Rédaction :**

Ce système est triangulaire, donc il a une unique solution si, et seulement si, les coefficients diagonaux sont non nuls.

Ce système a une unique solution si, et seulement si,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

## 5.3 Systèmes sous forme échelon.

**Exemple :** le système suivant est dit sous forme échelon.

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -1 \\ -3x_3 + 2x_4 - x_5 = -1 \\ 3x_4 + 3x_5 = -6 \end{cases}$$

**Définition :** (définition d'une écriture.)

On dit qu'un système linéaire est **sous forme échelon** lorsque :

- Chaque ligne comporte au moins une inconnue.
- et
- La première inconnue d'une ligne n'apparaît plus dans les lignes suivantes.

**Remarques :** Dans un système sous forme échelon :

- Il y a nécessairement moins d'équations que d'inconnues. ( $n \geq p$ ).
- Si  $n = p$  le système sous forme échelon est un système triangulaire sans zéro sur la diagonale.

**Séparation des inconnues :**

Le système précédent est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = -1 & - 2x_2 - x_5 \\ -3x_3 + 2x_4 = -1 & + x_5 \\ 3x_4 = -6 & - 3x_5 \end{cases}$$

Ainsi si on fixe  $x_2$  et  $x_5$  on obtient un système à trois inconnues  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , qui possède une unique solution.

**Définitions :**

Dans un système sous forme échelon :

Les **inconnues principales** sont celles qui apparaissent en premier sur chaque ligne et les autres sont appelées **inconnues secondaires**.

On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne.

**Remarques :**

Soit  $(\Sigma)$  un système linéaire avec  $p$  équations et  $n$  inconnues.

- Si  $(\Sigma)$  est échelonné alors il y a  $p$  inconnues principales et  $n - p$  inconnues secondaires.
- En fixant arbitrairement la valeur des inconnues secondaires **on se ramène à un système triangulaire sans zéros sur la diagonale** en les inconnues principales.
- On peut fixer arbitrairement la valeur des inconnues secondaires, le système a alors une unique solution.
- Le nombre d'inconnues secondaires donnent **le nombre de paramètres utilisés pour décrire** l'ensemble des solutions. (c'est le nombre optimal de paramètres)
- Si  $p < n$  le système sous forme échelon a une infinité de solutions.

**En pratique :**

Résoudre un système échelonné revient à exprimer toutes les inconnues en fonction des inconnues secondaires.

## 5.4 Méthode du pivot.

### 5.4.1 Opérations élémentaires.

**Définition :**

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système les actions suivantes :

- Permuter deux lignes.  $L_i \longleftrightarrow L_j$ . (Permutation)
- Multiplier une équation par  $\beta$  un nombre **non nul**.  $\beta L_i \longrightarrow L_i$  (Dilatation)
- Remplacer une équation  $L_i$  par  $L_i + \alpha L_j$  avec  $i \neq j$ .  $L_i + \alpha L_j \longrightarrow L_i$  (Transvection)

**Remarque :** En faisant des opérations élémentaires on ne change pas les solutions d'un système.

**5.4.2 Méthode du Pivot.**

A l'aide d'une succession finie d'opérations élémentaires sur les lignes on se ramène à :

- un système triangulaire sans zéro sur la diagonale (*une unique solution*),
- un système échelonné avec strictement plus d'inconnues que d'équations (*une infinité de solutions*),
- ou un système incompatible (*sans solution*).

**Première étape :**

On place à la première ligne une ligne avec  $x_1$  (si il y en a sinon on passe à  $x_2$  ...), on a alors  $a_{1,1} \neq 0$ , puis on utilise cette ligne pour supprimer  $x_1$  dans les lignes suivantes; pour cela on fait des opérations élémentaires de la forme  $L_i + \lambda L_1 \rightarrow L_i$ .

Après cette première étape on n'utilise plus la ligne  $L_1$ . (*et on ne la modifie plus*)

**Deuxième étape :**

On cherche un coefficient non nul en dessous de  $a_{1,2}$ , (*conformément à l'illustration ci-dessous on suppose que tous les coefficients sont nuls et on passe à  $x_3$* ) on permute les lignes pour avoir  $a_{2,3} \neq 0$ , puis on utilise cette ligne pour supprimer  $x_3$  dans les lignes suivantes; pour cela on fait des opérations élémentaires de la forme  $L_i + \lambda L_2 \rightarrow L_i$

Après cette deuxième étape on n'utilise plus la ligne  $L_2$ . (*et on ne la modifie plus*)

ainsi de suite ...

Finalement on parvient à un système de la forme : (*une forme réduite du système*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{a_{1,1}} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} + \boxed{a_{2,3}} x_3 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} + \dots + \phantom{a_{2,n} x_n} = b_3 \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} + \phantom{a_{2,n} x_n} = b_4 \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} + \phantom{a_{2,n} x_n} = b_5 \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} + \phantom{a_{2,n} x_n} = b_6 \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} + \boxed{a_{r,n}} x_n = b_r \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} + 0 = b_{r+1} \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} + \vdots \\ \phantom{\boxed{a_{1,1}} x_1} \phantom{+ \boxed{a_{2,3}} x_3} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} \phantom{+ \dots} + 0 = b_p \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{système sous forme échelon } r \times n \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ (p - r) \text{ conditions de compatibilité} \end{array}$$

Une fois sous cette forme on peut **discuter et décrire l'ensemble des solutions** :

- ❶ Si une des conditions de compatibilité n'est pas vérifiée, Il n'y a pas de solutions  $S = \emptyset$
- ❷ Sinon on se ramène à la résolution :
  - d'un système sous forme échelon. (*Inconnues principales en fonction des secondaires*)
  - ou • d'un système triangulaire avec une unique solution.

**5.5 Matrices.**

Dans ce chapitre  $n, r, q$  et  $p$  sont des entiers naturels **non nuls**, Les éléments de  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$  sont appelés **nombres** ou **scalaires**.

**5.5.1 Généralités.**

**Définition :**

Une matrice de taille  $(n, p)$  est un **tableau rectangulaire de nombres** comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

**Notation :**  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$  ou  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

On notera ici  $(A)_{i,j}$  le **coefficient** de  $A$  se trouvant à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ième colonne

On note :  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times p$ , et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$ .

**5.5.2 Des cas particuliers.**

- Si  $n = 1$ , on dit que la matrice  $A$  est une **matrice ligne**.
- Si  $p = 1$ , on dit que la matrice  $A$  est une **matrice colonne**.
- Pour  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  on appelle :
  - $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  est la matrice ligne  $(a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,p})$ .

–  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $A$  est la matrice colonne  $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ .

- La **matrice nulle** à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  avec que des coefficients nuls.
- Si  $n = p$ , on dit que la matrice  $A$  est une matrice **carrée**.
- Lorsque  $A$  est une matrice carrée, on dit qu'elle est :
  - **triangulaire supérieure** lorsque  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ ,
  - **triangulaire inférieure** lorsque  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ ,
  - **diagonale** lorsque  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ ,
- La **matrice identité** de dimension  $n$  (nécessairement une matrice carrée) notée  $I_n$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5.6 Opérations.

### 5.6.1 Combinaisons linéaires de matrices.

#### Combinaison linéaire.

##### Définition :

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\alpha, \beta$  deux scalaires.

La matrice  $\alpha A + \beta B$  est la matrice  $(\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

#### Propriétés.

Soit  $A, B$  et  $C$  trois matrices de même taille,  $k$  et  $k'$  deux scalaires, on a alors :

1.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
2.  $A + 0 = 0 + A = A$  ( $0$  matrice nulle de même taille que  $A$ )
3.  $A + (-A) = (-A) + A = 0$  (où  $-A$  est la matrice  $(-1)A$ )
4.  $A + B = B + A$
5.  $k(A + B) = kA + kB$
6.  $(k + k')A = kA + k'A$
7.  $(kk')A = k(k'A)$
8.  $0A = 0$
9.  $1A = A$

### 5.6.2 Produit de deux matrices.

#### Définition.

##### Définition :

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}}$ ,

le produit  $AB$  est la matrice  $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$  avec :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$   $c_{i,j} = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}$

**Propriétés.**

**Propriétés**

- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  :  $AI_q = I_p A = A$
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $(B, B') \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})^2$  :  $A(B + B') = AB + AB'$
- Pour tout  $(A, A') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ ,  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$  :  $(A + A')B = AB + A'B$
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$  :  $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$  on a :  $A(BC) = (AB)C$

**Loi non commutative, non intègre.**

- Il existe des matrices  $A$  et  $B$  telles que  $AB \neq BA$ .  
(On dit que la multiplication des matrices carrés n'est pas une loi **commutative**).
- L'égalité  $AB = 0$  n'entraîne pas nécessairement  $A = 0$  ou  $B = 0$   
(On dit que la multiplication n'est pas une loi **intègre**)

En revanche les deux propositions sont vraies.

**Propositions :**

- ❶ Pour tout  $k \in \mathbb{R}$  et tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $kA = 0$  équivaut à  $k = 0$  ou  $A = 0$ .
- ❷ Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , **si**  $(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0)$  **alors**  $A = 0$

**Cas particuliers.**

- Avec les matrices nulles :  $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), A0_{n,r} = 0_{p,r}$  et  $0_{r,p}A = 0_{r,n}$ .
- Avec les matrices identités :  $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), AI_n = A$  et  $I_p A = A$ .
- Produit d'une matrice et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{Combinaison linéaire des colonnes de } A}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix}$$

- Produit d'une matrice et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{Combinaison linéaire des lignes de } A}$$

- Produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_p \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_p \end{pmatrix}$$

- Produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne.

$$\left( y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)$$

**Remarque :** Nous reverrons ce genre de produit dans le cours sur le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Produit d'une matrice par une matrice diagonale.

**A droite :**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \cdots & \lambda_n a_{1,n} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 a_{p,1} & \lambda_2 a_{p,2} & \cdots & \lambda_n a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à droite par une matrice diagonale, revient à multiplier les colonnes  $C_j$  de  $A$  par  $\lambda_j$ .

**A gauche :**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_p a_{p,1} & \lambda_p a_{p,2} & \cdots & \lambda_p a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à gauche par une matrice diagonale, revient à multiplier les lignes  $L_i$  de  $A$  par  $\lambda_i$ .

- Produit de deux matrices diagonales.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

- Produit de deux matrices triangulaires.

**Proposition :**

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

**Démonstration**

Prenons  $A$  et  $B$  deux matrices triangulaires supérieures de taille  $n$ ,

Soient  $i$  et  $j$  deux entiers compris entre 1 et  $n$ , **vérifiant  $j < i$**

$$\begin{aligned} (AB)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,j} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^j (A)_{i,k} (B)_{k,j}}_{k \leq j < i \text{ donc } (A)_{i,k} = 0} + \underbrace{\sum_{k=j+1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,j}}_{k > j \text{ donc } (B)_{k,j} = 0} \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

On a bien montré que si  $i > j$ , alors  $(AB)_{i,j} = 0$

La matrice  $AB$  est triangulaire supérieure.

**Pour les coefficients diagonaux :**

Soit  $i$  un entier compris entre 1 et  $n$ ,

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,i}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} (A)_{i,k} (B)_{k,i}}_{k < i \text{ donc } (A)_{i,k} = 0} + (A)_{i,i} (B)_{i,i} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,i}}_{k > i \text{ donc } (B)_{k,i} = 0} \\
 &= 0 + (A)_{i,i} (B)_{i,i} + 0
 \end{aligned}$$

On montre de plus que si  $i = j$ , alors  $(AB)_{i,j} = (A)_{i,i} (B)_{i,i}$

Les coefficients diagonaux de  $AB$  sont les  $(A)_{i,i} (B)_{i,i}$

En notant :  $A = (a_{i,i})$  et  $B = (b_{i,i})$ .

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Remarque :** On peut énoncer le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures.

### 5.6.3 Lignes et colonnes de $AB$ . (Complément)

- Si on note  $C_j$  les colonnes de  $B$  alors la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $AB$  est  $AC_j$  :

$$A \underbrace{(C_1 | C_2 | \cdots | C_q)}_B = \underbrace{(AC_1 | AC_2 | \cdots | AC_q)}_{AB}$$

**Conséquence :** Les colonnes de  $AB$  sont des combinaisons linéaires des colonnes de  $A$ .

- Si on note  $L_i$  les lignes de  $A$  alors la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $AB$  est  $L_i B$  :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} L_1 B \\ L_2 B \\ \vdots \\ L_p B \end{pmatrix}$$

**Conséquence :** Les lignes de  $AB$  sont des combinaisons linéaires des lignes de  $B$ .

### 5.6.4 Puissance d'une matrice carrée.

#### Définition.

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_p \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A \times A^n \quad (\text{ou } = A^n \times A)$$

#### Cas particuliers.

- Puissance de  $I_p$  (la matrice identité) et de  $O_p$  (la matrice nulle).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_p^n = I_p \quad O_p^0 = I_p \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad O_p^n = O_p$$

- Matrices diagonales.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$$

- Matrices triangulaires.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$$

**Formule du binôme.**

**Théorème** *Formule du binôme.*

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices carrées telles que  $AB = BA$  (On dit que  $A$  et  $B$  commutent),

pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \qquad (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

**Illustration avec du dénombrement** (*Savoir faire la démonstration par récurrence*)

Commençons par développer sans utiliser l'hypothèse  $AB = BA$  :

$$(A + B)^n = \underbrace{AAA \cdots AAA}_{n \text{ facteurs}} + \underbrace{BAA \cdots AAA}_{n \text{ facteurs}} + \cdots + \underbrace{BBB \cdots BBA}_{n \text{ facteurs}} + \underbrace{BBB \cdots BBB}_{n \text{ facteurs}}$$

$2^n$  termes

Dans cette somme il y a  $2^n$  termes qu'on peut assimiler à un élément de  $\{A; B\}^n$ .

- Parmi ces termes :
- il y a 1 terme avec que des  $A$
  - il y a  $n$  termes avec exactement un  $B$ .
  - il y a  $\binom{n}{2}$  termes avec exactement 2  $B$ .
  - il y a  $\binom{n}{k}$  termes avec exactement  $k$   $B$ .
  - $\vdots$
  - il y a  $\binom{n}{n}$  terme avec exactement  $n$   $B$ .

Si de plus on suppose que  $AB = BA$  lorsque un terme contient exactement  $k$   $B$ , il vaut :  $A^{n-k} B^k$ .

**Formule de Bernoulli.**

**Théorème** *Formule de Bernoulli.*

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices carrées telles que  $AB = BA$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k} \qquad A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \sum_{k=0}^n A^{n-k} B^k$$

**Démonstration.**

$$(A - B) \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n A^{k+1} B^{n-k} - \sum_{k=0}^n A^k B^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} A^k B^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n A^k B^{n+1-k} = A^{n+1} - B^{n+1}$$

pour  $n$  un entier naturel,  $A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k}$

**5.7 Matrice inversible.**

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

## 5.7.1 Définition.

**Définitions**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (une matrice carrée)

Dire que  $A$  est **inversible** signifie qu'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$AB = BA = I_n \quad (\text{où } I_n \text{ est la matrice identité})$$

La matrice  $B$  est alors unique et est appelée **inverse** de la matrice  $A$  on la note  $A^{-1}$

## 5.7.2 Matrice inversible et systèmes.

**Théorème.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶  $A$  est inversible
- ❷ Le système  $AX = 0$  admet une unique solution.
- ❸ quel que soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = Y$  admet une unique solution.

**Démonstration.**

Montrons successivement : ❶  $\Rightarrow$  ❷  $\Rightarrow$  ❸  $\Rightarrow$  ❶ .

**❶  $\Rightarrow$  ❷**

Supposons  $A$  inversible.

Alors, si  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  vérifie  $AX = 0$ , on multiplie à gauche par  $A^{-1}$ , il vient  $A^{-1}AX = A^{-1}0$  donc  $X = 0$ .

Or 0 est une solution donc le système  $AX = 0$  admet une unique solution, à savoir  $X = 0$ .

**❷  $\Rightarrow$  ❸**

La matrice  $A$  est carrée ( $n \times n$ ) et le système homogène  $AX = 0$  n'admet que la solution nulle.

Ainsi, en résolvant le système  $AX = 0$  par la méthode du pivot de Gauss, on se ramène à un système  $TX = 0$  où  $T$  est une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.

En appliquant les mêmes opérations au système  $AX = Y$  on montre qu'il est équivalent à un système  $TX = B$  avec la même matrice  $T$ .

Donc, pour tout  $Y$ , le système  $AX = Y$  admet une et une seule solution.

**❸  $\Rightarrow$  ❶**

Supposons que, pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système  $AX = Y$  admet une unique solution.

En particulier, pour chaque vecteur  $Y$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , il existe un unique vecteur  $X$  tel que  $AX = Y$ .

Notons  $X_1, \dots, X_n$  les solutions associées à  $E_1, \dots, E_n$ . Construisons la matrice

$$B = (X_1 \quad \dots \quad X_n).$$

Alors, par construction,

$$AB = (AX_1 \quad \dots \quad AX_n) = (E_1 \quad \dots \quad E_n) = I_n.$$

Ainsi, il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_n$

Comme  $A$  est carrée, cela entraîne que  $A$  est inversible, et  $B = A^{-1}$ .

(Ici on admet que l'inversibilité à gauche entraîne l'inversibilité à droite)

□

**Résoudre un système pour trouver l'inverse d'une matrice.****En pratique :**

On prend un second membre quelconque  $Y$  et on résout le système  $AX = Y$  ;

- si on montre qu'il n'a qu'une solution,  $A$  est inversible sinon elle ne l'est pas.
- si on montre que l'unique solution s'exprime  $X = MY$  avec  $M$  une matrice  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors  $M = A^{-1}$

## 5.7.3 Inverse d'un produit.

**Théorème :**

Soient  $M$  et  $N$  deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

**Si  $M$  et  $N$  sont inversibles alors,** le produit  $MN$  est inversible et  $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

**Démonstration.**

Supposons que  $M$  et  $N$  soient inversibles.

$$(MN)(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MI_nM^{-1} = MM^{-1} = I_n$$

et

$$(N^{-1}M^{-1})(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}I_n N = N^{-1}N = I_n.$$

Donc  $MN$  est inversible et  $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ . □

**Remarque :** La réciproque est vraie.

**Démonstration.**

Supposons que  $MN$  soit inversible.

Il existe une matrice  $P$  telle que  $(MN)P = I_n$  et  $P(MN) = I_n$ .

On a donc  $M(NP) = I_n$ . Ainsi,  $M$  admet un inverse à droite, donc  $M$  est inversible.

*(Ici on admet que l'inversibilité à gauche entraîne l'inversibilité à droite)*

de plus comme  $M$  est inversible on a :  $N = M^{-1}(MN)$  est ainsi  $N$  inversible en utilisant le théorème précédent. □

**Propositions** Généralisation.

- ① Soient  $A_1, A_2, \dots, A_p$ ,  $p$  matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  
**Si**  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $A_i \in GL_n(\mathbb{K})$  , **alors** le produit  $A_1 A_2 \cdots A_p$  est inversible  
et  $(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$
- ② Soit  $p$  un entier naturel et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  
**Si**  $A$  est inversible , **alors**  $A^p$  est inversible et  $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$  (noté  $A^{-p}$ )

### 5.7.4 Cas particuliers.

#### Matrice diagonale.

##### Matrices diagonales.

Soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\alpha_i \neq 0$  **si, et seulement si**,  $A$  est inversible.

$$\text{et alors } A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

**Démonstration :**

**Remarque :** on retrouve que la matrice identité est inversible et  $I_n^{-1} = I_n$ .

#### Matrice triangulaire.

**Théorème :**

Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire supérieure,

$T$  est inversible **si, et seulement si**, les coefficients diagonaux de  $T$  sont tous non nuls.

et alors  $T^{-1}$  est une matrice triangulaire supérieure.

**Remarque :** Si  $T$  est inversible alors les coefficients diagonaux de  $T^{-1}$  sont les inverses de ceux de  $T$ .

**Démonstration.**

**Les matrices  $2 \times 2$ . Déterminant.**

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$A$  est inversible **si, et seulement si**,  $ad - bc \neq 0$ .

et sous cette condition :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Démonstration.**

On remarque que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on distingue les deux cas :  $ad - bc = 0$  et  $ad - bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Définition : (uniquement pour les matrices  $2 \times 2$ )**

On appelle déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , le nombre :  $ad - bc$ .

$$\text{On note : } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**5.8 Matrice transposée.****5.8.1 Définition.****Définition**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,

on appelle **transposée** de  $A$  la matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  (notée  ${}^tA$  ou  $A^\top$ ) telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

**5.8.2 Propriétés.****Proposition :**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices et un scalaire  $k$  alors :

- ①  $(A^\top)^\top = A$
- ②  $(kA)^\top = kA^\top$
- ③  $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$  *Si  $A$  et  $B$  sont de mêmes tailles*
- ④  $(AB)^\top = B^\top A^\top$  *Si le produit  $AB$  est définie*

**Démonstration de ④ :**

On prend  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$

Pour tout couple  $(i, j)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} ((AB)^\top)_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^p (A)_{j,k} (B)_{k,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^p (A^T)_{k,j} (B^T)_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^p (B^T)_{i,k} (A^T)_{k,j} \\
&= (B^T A^T)_{i,j}
\end{aligned}$$

comme ceci est vrai pour tout  $(i, j)$  on a bien :  $(AB)^T = B^T A^T$

### 5.8.3 Inverse et transposée.

**Théorème :** *Transposée de l'inverse d'une matrice*

Soit  $A$  une matrice carrée,

$A$  est inversible **si, et seulement, si**  $A^T$  est inversible et alors  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

**Démonstration :** (*Remarque : il suffit de montrer l'implication "Si  $A$  est inversible alors  $A^T$  est inversible"*)

Supposons donc que  $A$  soit inversible.

On a alors

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad A^{-1}A = I_n.$$

En transposant on obtient

$$(A^{-1})^T A^T = I_n \quad \text{et} \quad A^T (A^{-1})^T = I_n.$$

Ainsi,  $A^T$  est inversible et

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

*Remarque : La réciproque s'obtient en appliquant ce résultat à  $A^T$ .* □

### 5.8.4 Matrices symétriques, antisymétriques.

**Définitions :**

Soit  $A$  une matrice carrée,

$A$  est **symétrique**, signifie que  $A^T = A$   $A$  est **antisymétrique**, signifie que  $A^T = -A$

**Proposition :**

Soit  $A$  une matrice carrée, si  $A$  est inversible et symétrique alors  $A^{-1}$  est symétrique.

**Un exercice :** (*exemple ultra-classique d'analyse-synthèse*)

Montrer que :

Toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

# Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$

## Plan du chapitre

6.1	Structure vectorielle. . . . .	<b>93</b>
6.2	Sous-espace vectoriel. . . . .	<b>94</b>
6.2.1	Définition. . . . .	94
6.2.2	Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	94
6.3	$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ . . . . .	<b>94</b>
6.3.1	Combinaisons linéaires. . . . .	95
6.3.2	Définitions - notations. . . . .	95
6.3.3	C'est un sous-espace vectoriel. . . . .	95
6.3.4	Opérations élémentaires. . . . .	95
6.3.5	Familles génératrices. . . . .	96
6.3.6	Bases canoniques. . . . .	96
6.4	Familles libres. . . . .	<b>96</b>
6.4.1	Définition. . . . .	96
6.4.2	Identification. . . . .	96
6.5	Bases. . . . .	<b>97</b>
6.5.1	Définition d'une base. . . . .	97
6.5.2	Caractérisation d'une base. . . . .	97
6.6	Coordonnées dans une base. . . . .	<b>97</b>
6.6.1	Définition. . . . .	97
6.6.2	Application $v \mapsto \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$ . . . . .	98
6.6.3	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. . . . .	98
6.7	Dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . .	<b>99</b>
6.7.1	Définition. . . . .	99
6.7.2	Compléter une famille libre ou extraire d'une famille génératrice. . . . .	100
6.8	Famille libre, famille génératrice et dimension. . . . .	<b>100</b>
6.8.1	Famille génératrice en dimension $n$ . . . . .	100
6.8.2	Famille libre en dimension $n$ . . . . .	100
6.8.3	Dimension et sous-espace vectoriel. . . . .	100
6.9	Systèmes linéaires homogènes et dimension. . . . .	<b>101</b>
6.10	Rangs. . . . .	<b>101</b>
6.10.1	Rang d'une famille de vecteurs. . . . .	101
6.10.2	Rang d'une matrice. . . . .	101
6.10.3	Matrices et familles de vecteurs. . . . .	102
6.10.4	Rang d'un système. . . . .	102

## 6.1 Structure vectorielle.

La lettre  $n$  désigne ici un entier naturel non nul.

On rappelle que  $\mathbb{K}^n$  désigne les  $n$ -uplets (les  $n$ -listes, les suites finies ...) d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

on les note :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec les  $x_i$  dans  $\mathbb{K}$ ,

On rappelle la propriété fondamentale :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x_i = x'_i$$

**Définitions**

Sur  $\mathbb{K}^n$  on définit deux opérations :

- Pour  $\begin{cases} u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ v = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \end{cases}$   $u + v \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$
- Pour  $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{K} \\ u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$   $\alpha.u \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

**Remarques :**

- $\mathbb{K}^n$  muni des deux opérations ci-dessus est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (*définition vue en deuxième année*).
- $(0, 0, \dots, 0)$  est appelé vecteur nul de  $\mathbb{K}^n$ .
- Dans  $\mathbb{K}^n$ , pour  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , on note :  $-u = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ .

## 6.2 Sous-espace vectoriel

### 6.2.1 Définition.

**Définition :**

Soit  $F$  un ensemble,  
 $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $\mathbb{K}^n$  signifie que :

- ❶  $F \subset \mathbb{K}^n$ .
- ❷  $0_E \in F$ .
- ❸  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (u, v) \in F^2, \quad \alpha u + \beta v \in F$

**Remarques :**

- Certains remplacent ❷ par  $F \neq \emptyset$ .
- Certains remplacent ❸ par  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (u, v) \in F^2, \quad u + \lambda v \in F$
- D'autres remplacent ❸ par  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \quad \alpha u \in F$  et  $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$ .
- Le singleton  $\{0_E\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , c'est d'ailleurs le seul qui contient un nombre fini d'éléments.  
*(Tous les autres contiennent un nombre infini de vecteurs)*

### 6.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

**Théorème :**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F_1, F_2$  deux parties de  $E$ .  
 Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$   
 alors  $F_1 \cap F_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration.** (*Refaites en deuxième année*)

**Théorème :** (*Généralisation*)

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $F_1, \dots, F_p$  des parties de  $\mathbb{K}^n$ .  
 Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$ ,  
 alors  $\bigcap_{i=1}^p F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

**Démonstration.**

**Attention :** En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

*Une condition nécessaire et suffisante : "l'un est inclus dans l'autre".*

## 6.3 Vect( $u_1, \dots, u_p$ )

On note  $E = \mathbb{K}^n$ .

### 6.3.1 Combinaisons linéaires.

Dire qu'un vecteur  $v$  de  $E$  est une **combinaison linéaire** des vecteurs  $u_1, \dots, u_p$  de  $E$  signifie qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des scalaires tels que :  $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ .

**Remarque :** Un espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires.

### 6.3.2 Définitions - notations.

**Définition.**

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ ,  
On note **Vect** $(u_1, \dots, u_p)$  l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont combinaisons linéaires des vecteurs  $u_1, \dots, u_p$ .

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\} \text{ ou encore } = \left\{ x \in E \mid \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n \ x = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \right\}$$

$$\text{Pour } x \in E, \quad x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$$

### 6.3.3 C'est un sous-espace vectoriel.

**Proposition :** Pour  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs de  $E$ ,  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration.** On note  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  où  $u_1, \dots, u_p$  sont des vecteurs de  $E$

- $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et les  $u_i$  sont dans  $E$  donc  $F \subset E$ .
- $0_E = \sum_{k=1}^p 0 u_k$  donc  $0_E \in F$
- Soient  $v_1 = \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k$  et  $v_2 = \sum_{k=1}^p \beta_k u_k$  deux vecteurs de  $F$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  deux éléments de  $\mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 &= \lambda_1 \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k + \lambda_2 \sum_{k=1}^p \beta_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_1 \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^p \lambda_2 \beta_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^p (\lambda_1 \alpha_k u_k + \lambda_2 \beta_k u_k) \\ &= \sum_{k=1}^p (\lambda_1 \alpha_k + \lambda_2 \beta_k) u_k \\ &\in F \end{aligned}$$

En conclusion :  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Remarques :**

- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les vecteurs  $(u_1, \dots, u_n)$
- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$ .
- C'est un autre moyen de montrer qu'une partie de  $E$  est un sous-espace vectoriel

### 6.3.4 Opérations élémentaires.

On appelle opérations élémentaires sur la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  les transformations :

- Permuter deux vecteurs :  $u_i \longleftrightarrow u_j$
- Multiplier un vecteur par un scalaire  $\lambda$  non nul :  $u_i \longleftarrow \lambda u_i$
- Ajouter un vecteur à un autre vecteur :  $u_i \longleftarrow u_i + u_j$

On combine souvent ces opérations. Par exemple on fait souvent des transvections :  $u_i \longleftarrow u_i - \alpha u_j$  avec  $i \neq j$

**Propositions**

Soit  $(u_1, \dots, u_m)$  une famille de vecteurs de  $E$  on note :  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ .

- ❶ On ne modifie pas  $F$  en changeant l'ordre des  $u_i$ .
- ❷ On ne modifie pas  $F$  par des opérations élémentaires sur les  $u_i$ .
- ❸ On ne modifie pas  $F$  en supprimant  $0_E$  s'il est dans la liste des  $u_i$ .
- ❹ On ne modifie pas  $F$  en ajoutant à un vecteur  $u_i$  une combinaison linéaire des autres vecteurs.

**Démonstrations.**

### 6.3.5 Familles génératrices.

**Définition :**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$

Dire que  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une **famille génératrice** de  $F$  signifie que,  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

**Remarque :** En pratique lorsque  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in F^n$ ,

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une **famille génératrice** de  $F$  si et seulement si,  $\forall v \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$

### 6.3.6 Bases canoniques.

La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  définie par :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

est appelée base canonique de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ .

**Remarque.** Pour tout  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$

## 6.4 Familles libres.

On note  $E = \mathbb{K}^n$ .

### 6.4.1 Définition.

**Définition :**

Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ ,

dire que  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une **famille libre** signifie que,

quel que soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ , si  $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$  alors  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_k = 0$

**Remarques :**

- La famille est **liée** lorsqu'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$  tel que  $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$
- $(u_1, \dots, u_p)$  est libre si, et seulement si,  $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_k = 0$

### 6.4.2 Identification.

**Théorème (Unicité de l'écriture sur une famille libre. Identification.) :**

Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ ,  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$  et  $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in \mathbb{K}^p$ .

Si  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est libre alors on a l'équivalence :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_p u_p \iff (a_1, a_2, \dots, a_p) = (b_1, b_2, \dots, b_p)$$

**En effet :**

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_p u_p \iff (a_1 - b_1)u_1 + (a_2 - b_2)u_2 + \dots + (a_p - b_p)u_p = 0_E$$

## 6.5 Bases.

On note  $E = \mathbb{K}^n$

### 6.5.1 Définition d'une base.

**Définition :**

Soient  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ ,  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs de  $F$ .

Dire que  $(u_1, \dots, u_p)$  est une base de  $F$  signifie que,

$(u_1, \dots, u_p)$  est une **famille libre et génératrice** de  $F$ .

**En effet :** Par définition (*d'une famille génératrice*)  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille génératrice de  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

**Remarques :**

- Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille libre alors c'est une base de  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ .
- La base canonique est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

### 6.5.2 Caractérisation d'une base.

**Théorème :**

Soient  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs de  $E$ ,

$(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  si, et seulement si,

pour tout vecteur  $v$  de  $E$ , il existe une unique  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :  $v = \sum_{k=1}^n x_k u_k$

**Démonstration.**

*Rapidement.*

D'une part  $(u_1, \dots, u_n)$  est génératrice si, et seulement si,  $\forall v \in E : \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$

existence

D'autre part  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre si, et seulement si,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^n \lambda'_k u_k}_{\text{unicité}} \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$$

On a bien

$(u_1, \dots, u_n)$  est libre et génératrice si, et seulement si,  $\forall v \in E : \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$

existence et unicité

## 6.6 Coordonnées dans une base.

On note  $E = \mathbb{K}^n$ .

### 6.6.1 Définition.

**Définition :**

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,

à chaque vecteur  $v$  de  $E$  on peut associer l'unique matrice  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  telle que :  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Cette matrice est appelée : **matrice colonne des coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$**

On note :  $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

**Remarque :** 
$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

### 6.6.2 Application $v \mapsto \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$

**Proposition :**

Si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  alors  
l'application  $\Phi : E \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  qui à  $v$  associe  $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$  est un isomorphisme.

**En effet :**  $\Phi$  est linéaire et bijective.

- Linéaire :  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, \Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha \Phi(u) + \beta \Phi(v)$

Si  $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  et  $v = \sum_{k=1}^n y_k e_k$  alors  $\alpha u + \beta v = \sum_{k=1}^n (\alpha x_k + \beta y_k) e_k$

$$\text{donc } \text{Coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta v) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$$

- Bijective :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! u \in E : \Phi(u) = X$

Le théorème de 6.5.2 donne :

tout élément  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  possède un et un seul antécédent par  $\Phi$  : le vecteur  $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$

**Proposition :**

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs de  $E$ .

- ❶ Pour tout  $v \in E, v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \iff \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) \in \text{Vect}(\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_p))$
- ❷  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre si, et seulement si,  $(\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_p))$  est libre.

**En effet :** Comme  $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(\cdot)$  est un isomorphisme on a

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \iff \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \lambda_1 \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1) + \dots + \lambda_p \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_p) \quad \text{ce qui permet de montrer } \text{❶}$$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E \iff \lambda_1 \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1) + \dots + \lambda_p \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_p) = 0_{n \times 1} \quad \text{ce qui permet de montrer } \text{❷}$$

□

### 6.6.3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

**Définition** (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base) :

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , à chaque famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_m)$  de  $E$  on peut associer l'unique matrice de  $M$  de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  telle que : pour tout  $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$ , la  $j$ -ième colonne de  $M$  est  $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_j)$ .

Cette matrice est la **matrice de la famille de vecteurs** de  $(v_1, \dots, v_m)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On la note :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m)$

**Remarques :**

- On peut résumer avec la relation.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m) = \left( \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_1) \mid \dots \mid \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_m) \right)$$

- Multiplication par une matrice colonne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m x_k \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v_k)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \text{Coord}_{\mathcal{B}} \left( \sum_{k=1}^m x_k v_k \right)$$

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^p \begin{pmatrix} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^p x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$AX$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$

## 6.7 Dimension d'un sous-espace vectoriel

On note  $E = \mathbb{K}^n$ .

### 6.7.1 Définition.

#### Théorème et définition

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  différent de  $\{0_E\}$ .

- ❶  $F$  possède au moins une base.
- ❷ toutes les bases de  $F$  ont le même nombre de vecteurs.
- ❸ Le nombre de vecteurs d'une base de  $F$  est appelée dimension de  $F$ .  
on note  $\dim(F)$  la dimension de  $F$ .

#### Remarques :

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$  (La base canonique est une base formée de  $n$  vecteurs)
- L'espace vectoriel  $\{0_E\}$  a par convention une dimension nulle.  $\dim(\{0_E\}) = 0$ .

(Sa base est la famille vide)

#### Théorème.

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .  
Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre alors  $p \leq \dim(E)$ .

#### Démonstration :

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

(On note  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ )

on a donc : (définition de la liberté)

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^p x_k u_k = 0_E \iff (x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$$

ce qui donne dans la base  $\mathcal{B}$  : en notant  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$$

donc le système  $MX = 0$  a une unique solution et ainsi il a autant ou plus d'équations que d'inconnues.

(Voir cours sur les systèmes linéaires.)

autrement dit  $p \leq n$ .

### 6.7.2 Compléter une famille libre ou extraire d'une famille génératrice.

**Théorème.**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

- ❶ De toute famille génératrice de  $F$  on peut extraire une base de  $F$ .
- ❷ Toute famille libre de  $F$  peut être complétée en une base de  $F$ .

- Remarques :**
- Une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  a au moins  $p$  vecteurs.
  - Une famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  a au plus  $p$  vecteurs.

## 6.8 Famille libre, famille génératrice et dimension.

$n$  désigne ici un entier naturel non nul.

### 6.8.1 Famille génératrice en dimension $n$ .

**Théorème :**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .  
Si  $F$  est dimension  $p$ , toute famille génératrice de  $F$  formée de  $p$  vecteurs est une base de  $F$ .

**Rédaction type :** On a montré que  $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ est génératrice de } F \\ \mathcal{F} \text{ contient } p \text{ vecteurs} \\ \dim(F) = p \end{cases} \quad \text{donc } \mathcal{F} \text{ est une base de } F.$

En effet.

### 6.8.2 Famille libre en dimension $n$ .

**Théorème :**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .  
Si  $F$  est dimension  $p$ , toute famille libre de  $F$  formée de  $p$  vecteurs est une base de  $F$ .

**Rédaction type :** On a montré que  $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ est une famille libre} \\ \mathcal{F} \text{ contient } n \text{ vecteurs de } E \\ \dim(E) = n \end{cases} \quad \text{donc } \mathcal{F} \text{ est une base de } E.$

En effet.

### 6.8.3 Dimension et sous-espace vectoriel.

**Théorème :**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$ ,

- ❶ Si  $F \subset G$  alors  $\dim(F) \leq \dim(G)$
- ❷  $[F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G)] \iff F = G$

**Démonstration.**

## 6.9 Systèmes linéaires homogènes et dimension.

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , on s'intéresse ici à la résolution du système linéaire  $MX = 0$ .

*$p$  équations et  $n$  inconnues.*

### Rappels :

L'algorithme du pivot de Gauss permet de réduire le système  $MX = 0$  en un système échelonné  $TX = 0$ .

Le nombre de lignes non nulles de  $TX = 0$  est égal au nombre d'inconnues principales noté  $r$ .

Le nombre d'inconnues secondaires vaut  $n - r$ . *(C'est le rang du système)*

### Théorème.

L'ensemble des solutions du système  $MX = 0$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - r$ .

### Démonstration :

*Conseil général : N'utilisez ce théorème uniquement si vous êtes sûr de vous et que cela est nécessaire.*

### Théorème.

S'il y a strictement plus d'inconnues que d'équations ( $n > p$ )  
alors le système  $MX = 0$  a une infinité de solutions.  
Si  $(0, \dots, 0)$  est l'unique solution de  $MX = 0$ ,  
alors il y a autant ou plus d'équations que d'inconnues ( $n \leq p$ ).

## 6.10 Rangs.

$E = \mathbb{K}^n$

### 6.10.1 Rang d'une famille de vecteurs.

Soit  $p$  un entier naturel non nul.

#### Définition.

Pour  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

**Remarque :** On ne change pas le rang en faisant des opérations élémentaires sur les vecteurs.

#### Théorèmes :

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de vecteurs de  $E$

- ❶  $\text{rg}(\mathcal{F})$  est égal au nombre de vecteurs de  $\mathcal{F}$  si, et seulement si,  $\mathcal{F}$  est libre
- ❷  $\text{rg}(\mathcal{F})$  est égal à  $n$  si, et seulement si,  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ .
- ❸  $\left\{ \begin{array}{l} \text{rg}(\mathcal{F}) \text{ est égal au nombre de vecteurs de } \mathcal{F} \\ \text{et est égal à } n \end{array} \right.$  si, et seulement si,  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

#### Démonstration.

### 6.10.2 Rang d'une matrice.

#### Définition. (Définition du rang d'une matrice)

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,

On appelle rang de la matrice  $M$ , la dimension de l'espace engendré par les colonnes de  $M$ .

Notation : on note  $\text{rg}(M)$  le rang de la matrice  $M$ .

#### Théorèmes :

- ❶ Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $\text{rg}(M^T) = \text{rg}(M)$ .
- ❷ Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{rg}(M) = n$  si, et seulement si,  $M$  est inversible.

**Démonstration.**

**Remarques :**

- Le rang d'une matrice est (*aussi*) la dimension de l'espace engendré par ses lignes.
- On ne modifie pas le rang d'une matrice en faisant des opérations élémentaires sur ses colonnes et ses lignes.
- Si  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  alors  $\text{rg}(M) \leq n$  et  $\text{rg}(M) \leq p$  ( ou encore  $\text{rg}(M) \leq \min(n, p)$  )
- On obtient ce rang en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice.

### 6.10.3 Matrices et familles de vecteurs.

**Proposition.**

Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

**Démonstration :**

**Théorèmes.**

Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

On note  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$

- ❶  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est libre si, et seulement si,  $\text{rg}(M) = n$
- ❷  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est génératrice si, et seulement si,  $\text{rg}(M) = \dim(E)$
- ❸  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une base de  $E$  si, et seulement si,  $M$  est inversible.

**Démonstration :**

### 6.10.4 Rang d'un système.

**Définition :**

Le rang d'un système est le nombre d'inconnues principales après réduction par l'algorithme du pivot de Gauss.

**Proposition :**

Soient  $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\Sigma$  le système  $MX = B$

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(\Sigma)$$

# Application linéaires

## Plan du chapitre

7.1	Applications linéaires. . . . .	<b>103</b>
7.1.1	Définitions et vocabulaire. . . . .	103
7.1.2	Propriétés. . . . .	104
7.2	Opérations et applications linéaires. . . . .	<b>105</b>
7.2.1	Combinaison linéaire. . . . .	105
7.2.2	Composition. . . . .	105
7.2.3	Réciproque d'un isomorphisme. . . . .	106
7.3	Noyau et Image. . . . .	<b>106</b>
7.3.1	Définitions. . . . .	106
7.3.2	Propriétés. . . . .	106
7.3.3	Image et surjectivité. . . . .	107
7.3.4	Noyau et injectivité. . . . .	107
7.4	Image d'une base. . . . .	<b>108</b>
7.5	Représentation matricielle. . . . .	<b>109</b>
7.5.1	Matrice d'une application linéaire. . . . .	109
7.5.2	Matrices et opérations. . . . .	110
7.6	Rang d'une application linéaire. . . . .	<b>110</b>
7.6.1	Définition. . . . .	110
7.6.2	Lien avec les autres notions de rang. . . . .	110
7.6.3	Théorème du rang . . . . .	111
7.6.4	Caractérisation des isomorphismes . . . . .	111

## 7.1 Applications linéaires.

Dans ce cours  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$  désignent deux espaces vectoriels quelconques sur  $\mathbb{K}$ . ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

### 7.1.1 Définitions et vocabulaire.

#### Définition :

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

Dire que  $f$  est une application linéaire signifie que :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in E^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

#### Vocabulaire et notations :

- On note :  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .
- (Lorsque  $F = \mathbb{K}$ ). On appelle **forme linéaire** sur  $E$  les applications linéaires de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .
- (Lorsque  $F = E$ ). On appelle **endomorphisme** de  $E$  les applications linéaires de  $E$  dans  $E$ .

- On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .
- Les applications linéaires bijectives sont appelées **isomorphismes**.
- Les endomorphismes bijectifs sont appelés **automorphismes**.
- On note  $GL(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ . (*Groupe Linéaire*)

### Des cas particuliers importants.

L'application nulle de  $E$  dans  $F$  est linéaire.

L'application identité de  $E$  est un endomorphisme de  $E$ . (*c'est même un isomorphisme*)

### 7.1.2 Propriétés.

#### Propositions :

- ❶ Si  $f$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ , on a alors :  $f(0_E) = 0_F$
- ❷ Si  $f$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ ,
- pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$

#### Démonstration :

❶ Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)$   
donc en particulier  $f(0.0_E + 0.0_E) = 0.f(0_E) + 0.f(0_E)$  et comme  $0.f(u) = 0_F$  il vient

$$\text{si } f \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } F \text{ alors } f(0_E) = 0_F$$

❷ On suppose que  $f$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  
pour chaque entier  $n$  on note :  $\mathcal{P}_n$  la proposition :

$$\text{pour tout } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$$

montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

• Pour  $n = 2$ ,

La proposition est vraie, c'est exactement la définition d'une application linéaire.

• Soit  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}_n$  est vraie,

Soient  $(u_1, \dots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} u_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) + \lambda_{n+1} f(u_{n+1}) && \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i) + \lambda_{n+1} f(u_{n+1}) && \text{en utilisant } \mathcal{P}_n \\ f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i\right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(u_i) && \text{on a bien } \mathcal{P}_{n+1} \end{aligned}$$

On a bien montré que pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\text{pour tout } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$$

#### Remarque :

Pour démontrer qu'une application de  $E$  dans  $F$  **n'est pas linéaire**, on montre au choix :

❶  $f(0_E) \neq 0_F$

❷ En prenant  $\alpha = \dots$  dans  $\mathbb{K}$  et  $u = \dots$  dans  $E$ , on a  $f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$

❸ En prenant  $u = \dots$  dans  $E$  et  $v = \dots$  dans  $E$ , on a  $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$

## 7.2 Opérations et applications linéaires.

### 7.2.1 Combinaison linéaire.

Des précisions sur l'espace vectoriel  $F^E$  où  $E$  et  $F$  désignent deux espaces vectoriels.

**Définition :**

Pour  $f$  une application  $E$  dans  $F$  et  $\alpha$  un scalaire on définit les applications :

$$\begin{array}{ll} \alpha f : E \longrightarrow F & f + g : E \longrightarrow F \\ u \longmapsto \alpha f(u) & u \longmapsto f(u) + g(u) \end{array}$$

**Remarques :**

- On admet que  $F^E$  muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
- Le vecteur nul de  $F^E$  est la fonction nulle, plus précisément c'est l'application  $E \longrightarrow F$   
 $u \longmapsto 0_F$

**Théorème :**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $E$  dans  $F$ ,

Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires alors  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Démonstration :**

Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ , on note  $h = \alpha f + \beta g$ ,

Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  et  $(u, v) \in E^2$ ,

$$\begin{aligned} h(\lambda u + \mu v) &= \alpha f(\lambda u + \mu v) + \beta g(\lambda u + \mu v) && \text{(Définitions des opérations ci-dessus)} \\ &= \alpha \lambda f(u) + \alpha \mu f(v) + \beta \lambda g(u) + \beta \mu g(v) && \text{(} f \text{ et } g \text{ sont linéaires)} \\ &= \lambda(\alpha f(u) + \beta g(u)) + \mu(\alpha f(v) + \beta g(v)) \\ &= \lambda h(u) + \mu h(v) \end{aligned}$$

$$\text{donc } h = \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$$

On a bien démontré que :  $\boxed{\text{si } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(E, F) \text{ alors } \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)}$

**Remarque :**

Plus généralement : Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

$$\text{Si pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ et } f_k \in \mathcal{L}(E, F) \text{ alors } \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k \in \mathcal{L}(E, F)$$

### 7.2.2 Composition.

**Théorème :**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ .

**Si**  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  **alors**  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

**Démonstration :**

On suppose  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ ,

Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  et  $(u, v) \in E^2$ ,

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha u + \beta v) &= g(\alpha f(u) + \beta f(v)) && \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) && \text{car } g \in \mathcal{L}(F, G) \\ &= \alpha g \circ f(u) + \beta g \circ f(v) \end{aligned}$$

$$\text{donc } g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

**Remarque :** Plus généralement : Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

### 7.2.3 Réciproque d'un isomorphisme.

**Théorème :**

La réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

**Démonstration :**

On suppose connaître  $f$  une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$

Soient  $(v_1, v_2) \in F^2$  et  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{F}^2$ ,

comme  $f$  est bijective on peut définir  $u_1 = f^{-1}(v_1)$  et  $u_2 = f^{-1}(v_2)$ ,

ce qui nous donne :  $v_1 = f(u_1)$  et  $v_2 = f(u_2)$ .

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= f^{-1}(\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad \text{car } f^{-1} \circ f = Id_E \\ &= \alpha_1 f^{-1}(v_1) + \alpha_2 f^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

*Ce qui achève la démonstration*

Autrement dit sachant que la réciproque d'une bijection est une bijection :

Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  alors  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ .

## 7.3 Noyau et Image.

### 7.3.1 Définitions.

**Définition :**

Etant donné une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , on appelle :

- **noyau de  $f$** , le sous-ensemble de  $E$  suivant :  $\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$
- **image de  $f$** , le sous-ensemble de  $F$  suivant :  $\text{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in E\}$

**Remarques :**

- $\ker(f) \subset E$  et  $\text{Im}(f) \subset F$ .
- $\ker(f)$  est l'ensemble des antécédents de  $0_F$  par  $f$ .  $\text{Im}(f)$  est l'image directe de  $E$  par  $f$ .
- $\text{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E : f(u) = v\}$
- Si  $f$  est l'application nulle alors  $\text{Im}(f) = \{0_F\}$  et  $\ker(f) = E$ .
- Si  $f$  est l'application identité de  $E$  alors  $\text{Im}(f) = E$  et  $\ker(f) = \{0_E\}$ .

### 7.3.2 Propriétés.

**Théorème :**

Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors :

- ❶  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
- ❷  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Démonstrations :**

- ❶ •  $\ker(f) \subset E$ ,
- $f(0_E) = 0_F$  donc  $0_E \in \ker(f)$
- Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  et  $(u, v) \in \ker(f)^2$ ,

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= \alpha 0_F + \beta 0_F \quad \text{car } u, v \in \ker(f) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

donc  $\alpha u + \beta v \in \ker(f)$

En conclusion :  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

- $\text{Im}(f) \subset F$ ,
- $0_F = f(0_E)$  donc  $0_F \in \text{Im}(f)$
- Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  et  $(v_1, v_2) \in \text{Im}(f)^2$ ,  
on note  $v_1 = f(u_1)$  et  $v_2 = f(u_2)$  avec  $u_1, u_2 \in E$ ,

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 &= \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) \\ &= f(\alpha u_1 + \beta u_2) \quad \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &\in \text{Im}(f) \end{aligned}$$

En conclusion :  $\boxed{\text{Im}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } F}$

### 7.3.3 Image et surjectivité.

**Proposition :**  $\boxed{\text{Pour } f \in \mathcal{L}(E, F), \quad f \text{ est surjective si, et seulement si, } \text{Im}(f) = F.}$

**Théorème :**

$\boxed{\text{Soit } f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \text{Si } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E \text{ alors, } \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).}$

**Démonstration 1 :**

*Raisonnons par double inclusion*

$\square$  Sachant que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) \in \text{Im}(f)$  et que  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  
on a bien  $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \text{Im}(f)$

$\square$  Soit  $y \in \text{Im}(f)$ , on note  $y = f(x)$  avec  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,

comme  $f$  est linéaire, il vient  $y = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ , et ainsi  $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

on a bien  $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))}$$

**Démonstration 2 :** *Une autre démonstration plus efficace mais moins élémentaire.*

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(u) \mid u \in E\} \\ &= \left\{ f \left( \sum_{k=1}^n x_k e_k \right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

### 7.3.4 Noyau et injectivité.

**Théorème :**

$\boxed{\text{Soit } f \text{ une application linéaire de } E \text{ dans } F,$   
 $\quad f \text{ est injective si, et seulement si, } \ker(f) = \{0_E\}$

**Démonstration 1** (*Faite au tableau*)

$\Rightarrow$  On suppose que  $f$  est injective.

Pour  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = f(0_E) \\ &\iff x = 0_E \quad (\text{car } f \text{ est injective}) \end{aligned}$$

donc  $\ker(f) = \{0_E\}$  ■.

*Remarque : au tableau, nous n'avons pas fait un raisonnement par équivalence.*

⇐ On suppose que  $\ker(f) = \{0_E\}$ .

Soient  $(x_1, x_2) \in E^2$  tel que  $f(x_1) = f(x_2)$ ,

on a alors :  $f(x_1) - f(x_2) = 0_F$ , et comme  $f$  est linéaire il vient  $f(x_1 - x_2) = 0_F$

d'où  $(x_1 - x_2) \in \ker(f)$  et en utilisant l'hypothèse  $\ker(f) = \{0_E\}$  il vient  $x_1 - x_2 = 0_E$

ou encore  $x_1 = x_2$ .

donc  $f$  est injective ■.

**Démonstration 2**

Une autre approche par équivalence : (ce n'est pas la démonstration "classique" que j'ai faite au tableau.)

$$\begin{aligned}
 f \text{ est injective} &\iff [\forall(u, v) \in E^2, f(u) = f(v) \iff u = v] \\
 &\iff [\forall(u, v) \in E^2, f(u) - f(v) = 0_F \iff u = v] \\
 &\iff [\forall(u, v) \in E^2, f(u - v) = 0_F \iff u - v = 0_E] \quad \text{car } f \text{ linéaire} \\
 &\iff [\forall u \in E, f(u) = 0_F \iff u = 0_E] \\
 &\iff [\forall u \in E, u \in \ker(f) \iff u = 0_E] \\
 &\iff \ker(f) = \{0_E\}
 \end{aligned}$$

f est injective si, et seulement si,  $\ker(f) = \{0_E\}$

## 7.4 Image d'une base.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels de **dimension finie**.

**Théorème :**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  
 quel que soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $F$ , il existe une et une seule application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(e_i) = v_i$$

**Autrement dit :** Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.

*Extrait du programme :* "Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base."

**Démonstration :** (ce qui a été fait au tableau)

**Idee :** Comme  $f$  est linéaire alors si  $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  alors  $f(u) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k)$

La seule connaissance des coordonnées de  $u$  et les  $f(e_i)$  permet de calculer  $f(u)$ .

**Existence :** L'application suivante convient : (ie : elle est linéaire et vérifie  $\forall i f(e_i) = v_i$ )

$$\begin{aligned}
 f : E &\longrightarrow F \\
 u &\longmapsto \sum_{k=1}^n x_k v_k \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)
 \end{aligned}$$

Au tableau j'ai défini  $f : E \longrightarrow F$  c'est une autre approche mais c'est peut-être plus simple avec les  $v_i$ .

$$u \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k f(e_k)$$

**Unicité :** Supposons connaître deux applications  $f_1$  et  $f_2$  qui conviennent.

(ie : elles sont linéaires et vérifient  $\forall i f(e_i) = v_i$ )

Soit  $u \in E$ , on note  $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,

$$f_1(u) = f_1\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n x_i f_1(e_i) && \text{car } f_1 \in \mathcal{L}(E, F) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i f_2(e_i) && \text{car } f_1(e_i) = f_2(e_i) = v_i \\
 &= f_2 \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) && \text{car } f_2 \in \mathcal{L}(E, F) \\
 &= f_2(u)
 \end{aligned}$$

Donc  $\forall u \in E, f_1(u) = f_2(u)$  donc  $f_1 = f_2$  ■

Remarque :

Cette partie de la démonstration a été présentée différemment au tableau, seule la présentation est différente.

## 7.5 Représentation matricielle.

On note  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$

On notera si nécessaire :  $p = \dim(E)$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $n = \dim(F)$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une base de  $F$ .

### 7.5.1 Matrice d'une application linéaire.

Définition

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  
 on appelle **matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$**  la matrice (notée :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ )  

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \quad \text{ou encore} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}))$$

Remarques :

- La matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  dépend du choix des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
- On dit que la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  représente  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
- Lorsque  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  on note :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .
- La matrice de l'application nulle est la matrice nulle.

Illustration permettant de retenir la définition.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} f(e_1) & f(e_j) & f(e_p) \end{matrix}}^{f(\mathcal{B})} & & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \left( \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \right) & & & \left. \begin{matrix} \rightarrow e'_1 \\ \vdots \\ \rightarrow e'_i \\ \vdots \\ \rightarrow e'_n \end{matrix} \right\} \mathcal{B}' \end{matrix}$$

Théorème :

Pour  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$  (deux bases fixées)  
 l'application  $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  est une bijection de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En effet : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.

Remarques :

- ❶ Pour montrer que  $f = g$ , il suffit de montrer que pour des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  quelconques,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$$

- ❷ On peut définir une application linéaire en donnant sa matrice dans deux bases quelconques.

Relation importante au centre du cours de deuxième année :

Pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ .

$$\forall u \in E, \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

### 7.5.2 Matrices et opérations.

#### Matrice d'une combinaison de deux applications linéaires.

##### Théorème

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ ,  
 Pour tout  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \beta \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$$

**Démonstration :** (*En deuxième année*)

#### Matrice de la composée de deux applications linéaires.

##### Théorème

Soient  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_2$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}_3$  une base de  $G$ ,

Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  on a :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$

**Démonstration :** (*En deuxième année*)

#### Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.

##### Théorème

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

$f$  est bijective si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  est inversible

et alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))^{-1}$$

**Démonstration :** (*En deuxième année*)

## 7.6 Rang d'une application linéaire.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels de dimension finie. On note  $p = \dim(E)$  et  $n = \dim(F)$ .

### 7.6.1 Définition.

#### Définition :

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  
 on appelle rang de l'application linéaire  $f$  l'entier naturel noté  $\text{rg}(f)$  et défini par :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

### 7.6.2 Lien avec les autres notions de rang.

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ .

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(\text{Vect}\langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p) \rangle) \\ &= \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) \\ &= \text{rg}(\text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(e_1)), \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(e_2)), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(e_p))) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)) \end{aligned}$$

### 7.6.3 Théorème du rang

**Théorème :**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

**Démonstration :** (*En deuxième année*)

### 7.6.4 Caractérisation des isomorphismes

**Théorème :**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$f$  est bijective si, et seulement si,  $\text{rg}(f) = n$

**En effet :**

- D'une part le théorème du rang donne  $\dim(\ker(f)) = 0$  donc  $f$  est injective.
- D'autre part  $\text{Im}(f) \subset F$  et  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(F)$  donc  $\text{Im}(f) = F$  et ainsi  $f$  est surjective.

□



# Probabilité sur un univers fini.

## Plan du chapitre

8.1	Probabilité sur un univers fini. . . . .	<b>113</b>
8.1.1	Vocabulaire des événements. . . . .	113
8.1.2	Probabilité. . . . .	114
8.2	Conditionnement et indépendance. . . . .	<b>116</b>
8.2.1	Probabilité conditionnelle. . . . .	116
8.2.2	Événements indépendants. . . . .	118
8.2.3	Expériences indépendantes. . . . .	119

## 8.1 Probabilité sur un univers fini.

### 8.1.1 Vocabulaire des événements.

#### Espace probabilisable.

Pour décrire une expérience aléatoire ( $\mathcal{E}$ ) on commence par choisir un ensemble représentant l'ensemble des résultats de cette expérience.

L'ensemble des résultats possibles est appelé l'**univers** (souvent noté  $\Omega$ )  
 Les parties de l'univers sont appelées les **événements**. (noté  $\mathcal{P}(\Omega)$ )  
 Le couple  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est appelé **espace probabilisable** associé à  $(\mathcal{E})$ .

#### Vocabulaire et opérations sur les événements.

$\bar{A}$  : l'événement contraire de  $A$ ,  $\emptyset$  : l'événement impossible,  $\Omega$  : l'événement certain.

Les événements formés d'un élément (les singletons) sont les **événements élémentaires**.

On note parfois  $(A \text{ et } B)$  l'événement  $A \cap B$  et  $(A \text{ ou } B)$  l'événement  $A \cup B$ .

Dire que  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** signifie que  $A \cap B = \emptyset$ .

Pour  $\omega$  un résultat et  $A$  un événement, " $\omega \in A$ " se dit : " $\omega$  réalise  $A$ ".

#### **Propriétés :**

Soient  $A, B$  et  $C$  des événements,

$$\bar{\emptyset} = \Omega \quad \bar{\Omega} = \emptyset \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

$$\overline{\bar{A}} = A \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Distributivités :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

**Système complet d'événements.**

**Définition :**

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements.  
 Dire que  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  est un **système complet d'événements** signifie que :

$\textcircled{1} \bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$        $\textcircled{2} \underbrace{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset}_{2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles}}$

**Remarques :**

- Lorsque  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements, les résultats se répartissent dans les différents événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Dans le secondaire on parle plutôt de partition.
- On dit aussi que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment un système complet d'événements.

**8.1.2 Probabilité.**

**Espace probabilisé.**

**Définition :**

Soit  $\Omega$  un ensemble fini non vide.  
 On appelle **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  (ou plus simplement sur  $\Omega$ ), une application  $\mathbb{P}$  qui à toute partie de  $\Omega$  associe un nombre réel et qui vérifie :

$\textcircled{1} \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$        $\textcircled{2} \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\textcircled{3}$  Pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ , si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

**Remarques :**

- Le triplet  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  est alors un **espace probabilisé fini**
- $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$   
 $A \mapsto P(A)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ . *En effet :* En prenant  $A = B = \emptyset$  on obtient la relation :  $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$
- On parle aussi bien de loi de probabilité que de probabilité.
- Dire que  $A$  est **négligeable** pour la probabilité  $\mathbb{P}$  signifie que  $\mathbb{P}(A) = 0$ .
- Sur un même espace probabilisable, on peut définir plusieurs probabilités.

**Probabilité et opérations sur les événements.**

**Théorème :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements de  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .  
 Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont deux à deux incompatibles **alors**  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

**Démonstration.**

*(C'est l'occasion de voir la rédaction d'un raisonnement par récurrence finie. Simple mais rarement utilisé).*

On fixe un  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et on considère  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n$  événements de  $\Omega$  que l'on suppose deux à deux incompatibles.

Montrons par récurrence (*finie*) sur  $k$  que : pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$

- Pour  $k = 1$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^1 A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^1 \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1)$$

La propriété est vraie pour  $k = 1$

- Soit  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  tel que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$ ,

On sait que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right)$ . Or les événements  $\bigcup_{i=1}^k A_i$  et  $A_{k+1}$  sont incompatibles car on a supposé que les  $A_i$  sont deux à deux incompatibles, on en déduit que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + \mathbb{P}(A_{k+1})$ , et enfin en utilisant

l'hypothèse de récurrence on obtient bien :  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(A_i)$

- En conclusion :  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$ , et en particulier on a bien :  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

**Une autre rédaction de cette démonstration :**

Montrons par récurrence sur  $n$  que :

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont  $n$  événements deux à deux incompatibles alors on a :  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

- Pour  $n = 1$ , on considère  $A_1$  un événement quelconque,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^1 A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^1 \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1)$$

La propriété est vraie pour  $n = 1$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que la propriété est vraie au rang  $n$ ,

on considère  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ ,  $n + 1$  événements 2 à 2 incompatibles,

On sait que :  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$ .

Or les 2 événements  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  et  $A_{n+1}$  sont incompatibles car on a supposé que les  $A_i$  sont deux à deux incompatibles,

on en déduit que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1})$  et en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient bien :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

- En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ Si } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ sont } n \text{ événements deux à deux incompatibles alors on a : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

**Conséquence.**

$$\text{Si } (A_1, A_2, \dots, A_n) \text{ est un système complet d'événements alors } \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$$

**Proposition :**

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

**En effet :**  $A$  et  $\bar{A}$  forment un système complet d'événements donc  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$

**Théorème :**

$$\textcircled{1} \forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\textcircled{2} \forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(\Omega))^3,$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

**Démonstration :**

$$\textcircled{1} \text{ On a deux réunions disjointes : } B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \quad \text{et} \quad A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\text{on en déduit : } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

$$\text{ces deux égalités donnent bien : } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\textcircled{2}$  En utilisant plusieurs fois le résultat de  $\textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C \cap B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

**Proposition :**

$$\textcircled{1} \text{ Pour tout } (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

$$\textcircled{2} \text{ Pour toute liste } (A_1, A_2, \dots, A_n) \text{ de } n \text{ événements, } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$$

**Démonstration :**

$\textcircled{1}$  On suppose que  $A \subset B$ ,

$$\text{on a alors la réunion disjointe : } B = A \cup (B \cap \bar{A}) \text{ donc } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \text{ et ainsi } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

$\textcircled{2}$  Pour  $n = 2$  c'est une conséquence du théorème précédent, ensuite on raisonne par récurrence sur  $n$ .

## Equiprobabilité.

**Définition**

Les événements élémentaires sont équiprobables signifie qu'ils ont tous la même probabilité.

**Théorème :**

Soit  $\Omega$  un univers fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans **une situation d'équiprobabilité** sur  $\Omega$  on a :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à :  $\frac{1}{n}$
- La probabilité d'un événement  $A$  est  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

## 8.2 Conditionnement et indépendance.

On se place dans  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

### 8.2.1 Probabilité conditionnelle.

**Définition.**

**Définition et proposition :**

Soit  $A$  un événement de probabilité non nulle.

L'application  $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$  est une probabilité sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

L'application  $\mathbb{P}_A$  est appelée probabilité sachant  $A$  (probabilité conditionnelle relative à  $A$ ).

**Démonstration :**

- On a bien :  $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$
- $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$ .
- Soit  $B_1$  et  $B_2$  deux événements tels que :  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,

$$\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \dots = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2)$$

**Remarques :**

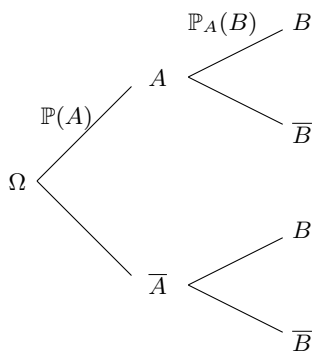
- Toutes les propositions énoncées sur  $\mathbb{P}$  sont encore valables pour  $\mathbb{P}_A$  par exemple :

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$$

- $\mathbb{P}_A(A) = 1$

**Remarques :**

- On note aussi :  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$
- Attention à cette notation  $\mathbb{P}(B|A)$  car  $BA$  n'est pas un événement.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$



- Si  $P$  est la probabilité uniforme alors  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$ , tout se passe comme si on changeait d'univers.
- On peut enchaîner les conditionnements :  $(\mathbb{P}_A)_B(C) = \mathbb{P}_{A \cap B}(C)$ .

**Formule des probabilités composées.**

**Théorème :** (*Formule des probabilités composées*)

Pour  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements ( $n \geq 2$ ) vérifiant  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

**Démonstration.**

On utilise les conventions :  $\bigcap_{i=1}^0 A_i = \Omega$  et  $\mathbb{P}_\Omega(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \quad (\text{Produit télescopique}) \end{aligned}$$

**Remarque :** La condition  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$  entraîne  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \neq 0$  pour  $k$  entre 1 et  $n - 1$ .

**Formule des probabilités totales.**

**Théorème :** (*Formule des probabilités totales*)

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, \dots, A_n$   $n$  événements de  $\Omega$ .

❶ Si  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

❷ Si  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements non négligeables pour  $\mathbb{P}$  (i.e : pour tout  $i$ ,  $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ ) alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

**Démonstration. ❶**

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B) \end{aligned}$$

les événements  $(A_k \cap B)$  sont deux à deux disjoints donc  $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$

❷ En reprenant le résultat précédent et en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle il vient :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

**Remarque :** En prenant la convention suivante : si  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  alors  $\mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B) = 0$  on peut énoncer ❷ plus simplement :

❷ Si  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

**Formule de Bayes.**

**Proposition :**

Soient  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements non négligeables pour  $\mathbb{P}$  et  $B$  un événement également non négligeable pour  $\mathbb{P}$  alors pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

**En effet :**  $\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

**8.2.2 Événements indépendants.**

**Indépendance de deux événements.**

**Définition :**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements,  
 Dire que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** signifie que :  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

**Remarque :**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements de  $\Omega$ ,  
 Dire que que ces événements sont **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

**Proposition :**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements quelconques de  $\Omega$ ,

- ①  $A$  et  $B$  sont indépendants équivaut à  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.
- ②  $A$  et  $B$  sont indépendants équivaut à  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.
- ③  $A$  et  $B$  sont indépendants équivaut à  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**Démonstration :**

Pour montrer ces trois équivalences, il suffit de montrer l'implication suivante :

Quels que soient  $M$  et  $N$  deux événements de  $\Omega$ ,

Si  $M$  et  $N$  sont indépendants alors  $M$  et  $\bar{N}$  sont indépendants.

Prenons deux événements  $M$  et  $N$  deux événements indépendants de  $\Omega$ ,

On sait que  $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \cap N) + \mathbb{P}(M \cap \bar{N})$

et comme  $M$  et  $N$  sont indépendants il vient :  $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(M \cap \bar{N})$ , puis :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \cap \bar{N}) &= \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N) \\ &= \mathbb{P}(M)(1 - \mathbb{P}(N)) \\ &= \mathbb{P}(M) \mathbb{P}(\bar{N}) \end{aligned}$$

**Indépendance mutuelle de  $n$  événements.****Définition :**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements de  $\Omega$ ,

Dire que ces événements sont **mutuellement indépendants** signifie que :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

**Proposition :**

Si  $n$  événements sont mutuellement indépendants alors ils sont 2 à 2 indépendants.

**8.2.3 Expériences indépendantes.**

On considère une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$  se décomposant en  $n$  sous-expériences (ou  $n$  épreuves) aléatoires :

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$$

Chacune de ces expériences est modélisée par des espaces probabilisés :

$$(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1), \quad (\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2), \quad \dots, \quad (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$$

On admet que l'on peut modéliser  $\mathcal{E}$  par  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  de telle sorte qu'on ait les deux propriétés suivantes :

**Propriétés :**

Si  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  sont indépendantes, on a alors les propositions suivantes :

- ❶ si  $A$  est un événement de l'expérience  $\mathcal{E}_i$  alors  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_i(A)$ .

Pour calculer la probabilité de  $A$  on n'observe que l'expérience  $\mathcal{E}_i$

- ❷ si  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sont  $p$  événements de  $p$  expériences distinctes, alors les événements  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sont **mutuellement** indépendants.

en particulier :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_p)$$

**Remarques :**

- Les tirages successifs avec remise sont souvent modélisés ainsi.
- Cette indépendance peut être conditionnée. (Exemple : une fois le dé choisi, les tirages sont indépendants).



# Variables aléatoires finies.

## Plan du chapitre

9.1	Définitions. . . . .	121
9.1.1	Variables aléatoires. . . . .	121
9.2	Ensemble des valeurs prises. . . . .	122
9.3	Variables aléatoires et événements. . . . .	122
9.4	Système complet associé à une variable aléatoire. . . . .	122
9.5	Loi de probabilité. . . . .	122
9.6	Fonction de répartition. . . . .	123
9.6.1	Espérance . . . . .	124
9.6.2	Variance. . . . .	125
9.7	Indépendance . . . . .	126
9.7.1	Définition . . . . .	126
9.7.2	Propriété . . . . .	126
9.7.3	$n$ variables aléatoires . . . . .	126
9.7.4	Propriétés . . . . .	126
9.7.5	Espérance de $XY$ et variance de $(X + Y)$ . . . . .	127
9.8	Lois usuelles. . . . .	127
9.8.1	Loi certaine. . . . .	127
9.8.2	Loi de Bernoulli. . . . .	127
9.8.3	Loi uniforme. . . . .	127
9.8.4	Loi binomiale. . . . .	128

## 9.1 Définitions.

Soient  $\Omega$  un univers fini et un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ .

### 9.1.1 Variables aléatoires.

#### Définition

Les variables aléatoires sur  $\Omega$  sont les applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

#### Remarques :

- On associe à chaque résultat (*un élément de  $\Omega$* ) une valeur numérique (*un nombre réel*).
- Sur une même expérience on peut définir plusieurs variables aléatoires.
- A partir d'une ou plusieurs variables aléatoires on peut en construire d'autres :

$$\max(X, Y) \quad X + Y \quad X^2 + 1 \quad e^X \quad |Y - X| \quad \sqrt{X^2 + Y^2}$$

## 9.2 Ensemble des valeurs prises.

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

Si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  prenant les valeurs  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  le plus souvent on note :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \quad \text{avec } x_1 < x_2 < \dots < x_r$$

$X(\Omega)$  ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$ .

## 9.3 Variables aléatoires et événements.

Soient  $B$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $a, b, x$  des nombres réels, on peut définir à l'aide d'une variable aléatoire  $X$  les événements :

$$[X \in B] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

$$[a \leq X \leq b] = \{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) \leq b\}$$

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} \quad (\text{ce sont les antécédents de } a \text{ par } X).$$

## 9.4 Système complet associé à une variable aléatoire.

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ , avec  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ .

La famille  $([X = x_i])_{1 \leq i \leq r}$  est un système complet d'événements.

Application de la formule des probabilités totales :

$$\text{Si } A \text{ est un événement de } \Omega \quad \text{alors} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^r \mathbb{P}([X = x_i]) \mathbb{P}_{[X=x_i]}(A)$$

## 9.5 Loi de probabilité.

**Définition.**

La loi de probabilité de  $X$  est l'application de  $X(\Omega)$  dans  $[0; 1]$  qui à chaque valeur  $x$  prise par  $X$ , associe le nombre  $\mathbb{P}([X = x])$

C'est l'application  $X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$   
 $x \mapsto \mathbb{P}([X = x])$

et on a :  $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = x]) \geq 0$  et  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$

**Remarques :**

• Déterminer la loi de probabilité de  $X$ , c'est

❶ donner  $X(\Omega)$  et ❷  $\mathbb{P}([X = x_i])$  pour toutes les valeurs  $x_i$  de  $X(\Omega)$ .

Parfois (*mais pas toujours*) on donne la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

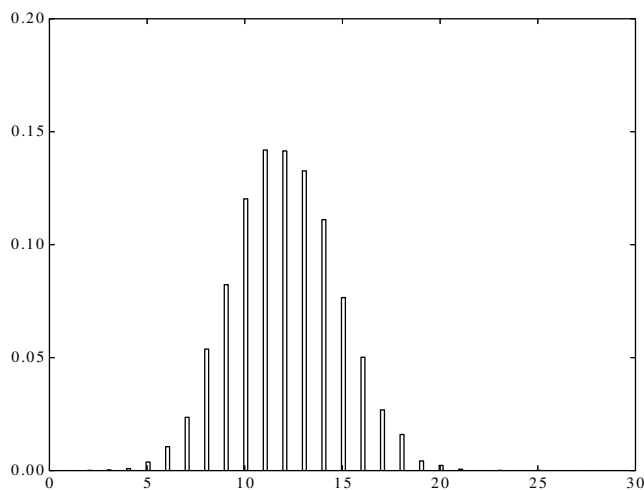
Valeurs ( $x_i$ )	$x_1$	...	...	$x_s$
Probabilités ( $p_i$ )	$p_1$	...	...	$p_s$

où  $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$

• Souvent on définit une loi en donnant une expression.

Dire que  $X \hookrightarrow B(n, p)$  signifie que  $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

• On représente graphiquement une loi de probabilité par un diagramme en bâtons.



Loi de probabilité

- Si  $B$  est une partie de  $X(\Omega)$  alors :  $\mathbb{P}([X \in B]) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}([X = x])$
- Si  $a < b$  alors :  $\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \sum_{\substack{a \leq x \leq b \\ x \in X(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x])$

## 9.6 Fonction de répartition.

### Définition

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  fini.  
 Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ ,  
 On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $[0; 1]$  qui à chaque nombre réel  $x$  associe le nombre  $\mathbb{P}([X \leq x])$ .

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \mathbb{P}([X \leq x])$$

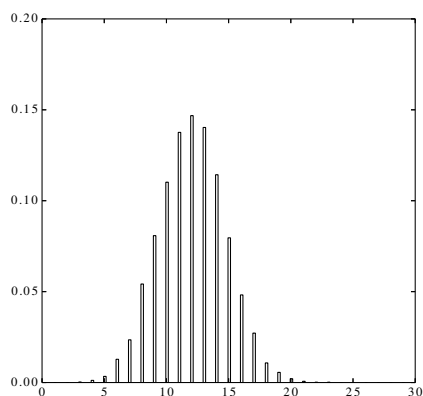
### Proposition :

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a \leq b$  on a :  $\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F(b) - F(a)$

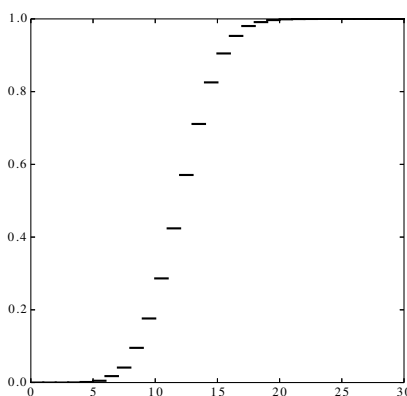
### Démonstration :

La réunion disjointe :  $(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$  entraîne :  $\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(a < X \leq b)$   
 et donc  $\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F(b) - F(a)$

### Représentation graphique :



Loi de probabilité



Fonction de répartition.

**Proposition :**

Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  alors :

- $F$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- $F$  est constante par morceaux. (car  $X(\Omega)$  est fini)
- $F$  est discontinue à gauche en les  $x_i$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

**Remarques :** (passer de l'une à l'autre).

- On peut construire la loi de probabilité de  $X$  à partir de sa fonction de répartition :

$$\mathbb{P}([X = x_1]) = F(x_1) \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k \in \llbracket 2; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = x_k]) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

- On peut construire la fonction de répartition de  $X$  à partir de sa loi de probabilité de  $X$  :

$$\text{si } x < x_1, \quad F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{si } x_k \leq x < x_{k+1} \quad \text{alors} \quad F(x) = F(x_{k-1}) + \mathbb{P}([X = x_k])$$

$$\text{ou encore} \quad \text{si } x_k \leq x < x_{k+1} \quad \text{alors} \quad F(x) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}([X = x_i])$$

**9.6.1 Espérance****Définition.****Définition**

Soit  $X$  une variable aléatoire.

L'espérance mathématique de  $X$  est le réel  $\mathbb{E}(X)$  défini par :  $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x])$

**Autrement dit :**

si on note :  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_r$  et pour  $1 \leq i \leq r$  :  $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r x_i p_i$$

**Remarques :**

- Au cours de simulations, la moyenne arithmétique des résultats tend vers l'espérance (moyenne théorique).
- On note parfois :  $\mathbb{E}(X) = \bar{X}$  ou  $E(X)$  ou  $E[X]$ .
- Lorsque  $\mathbb{E}(X) = 0$  on dit que la variable aléatoire  $X$  est **centrée**.
- Si  $X$  est positive (à valeurs positives) alors  $\mathbb{E}(X) \geq 0$

**Linéarité.**

**Théorème : (linéarité de l'espérance)**

$X, Y$  sont deux variables aléatoires sur  $\Omega$  et  $a$  et  $b$  deux réels.

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

**Démonstration :** (Complément)

**Remarques :**

- On a aussi :  $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$        $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$        $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ .
- Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires sur  $\Omega$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels alors :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$$

$$\mathbb{E}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 \mathbb{E}(X_1) + \alpha_2 \mathbb{E}(X_2) + \dots + \alpha_n \mathbb{E}(X_n)$$

- Si  $X \leq Y$  (c-a-d : pour tout  $\omega$ ,  $X(\omega) \leq Y(\omega)$ ) alors  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

**Théorème de transfert.****Théorème :**

Soient  $\varphi$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (définie sur  $X(\Omega)$ ) et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ ,  
 La variable aléatoire  $\varphi(X)$  a pour espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}([X = x])$$

**Remarques :**

- $\varphi(X)$  est la variable aléatoire  $\omega \mapsto \varphi(X(\omega))$ , (c'est  $\varphi \circ X$ )
- Pour calculer l'espérance de la variable aléatoire  $\varphi(X)$  on utilise la loi de probabilité de  $X$ .
- On peut ainsi calculer l'espérance de  $\frac{1}{X}$ , de  $X^2$  ... en ne connaissant que la loi de  $X$ .

**9.6.2 Variance.****Définitions.****Définition**

La variance d'une variable aléatoire  $X$  est le réel  $V(X)$  défini par :  $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$

**Autrement dit :**En notant  $m = \mathbb{E}(X)$ ,

$$V(X) = \mathbb{E}((X - m)^2) \quad V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - m)^2 \mathbb{P}(\{X = x\}) \quad V(X) = \sum_{i=1}^r (x_i - m)^2 p_i$$

**Remarques :**

- Quelle que soit la variable aléatoire  $X$ , on a :  $V(X) \geq 0$ .
- Si  $V(X) = 0$  alors  $\mathbb{P}([X = m]) = 1$ , ou encore  $\mathbb{P}([X \neq m]) = 0$

*On dit que  $X$  est une variable quasi-certaine.*

- Au cours de simulations, la variance empirique des résultats tend vers la variance (théorique).

**Formule de Kœnig-Huygens.****Proposition :**

Pour toute variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$ , on a :  $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ .

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 && \text{linéarité} \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

**Propriétés.****Proposition :**

Pour toute variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$ , et pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ .

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) \\ &= \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2) \\ &= \mathbb{E}(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= a^2 V(X) && \text{linéarité} \end{aligned}$$

**Ecart-type.**

L'écart-type d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

**Définitions :**

- On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** lorsque  $V(X) = 1$ .
- Pour  $X$  une variable aléatoire telle que  $V(X) \neq 0$ ,  
 $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$  est appelée **variable aléatoire centrée réduite** associée à  $X$ .

**En effet.**

- La linéarité donne  $\mathbb{E}(X^*) = \frac{1}{\sigma_X}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$ ,  $X^*$  est centrée.
- La propriété  $V(aX + b) = a^2V(X)$  donne  $V(X^*) = \frac{1}{\sigma_X^2}V(X) = 1$ ,  $X^*$  est réduite.

## 9.7 Indépendance

### 9.7.1 Définition

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires,

Dire que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes signifie que :

quel que soit le couple  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$

**Autrement dit :** Quel que soit  $x$  et  $y$ ,  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont deux événements indépendants.

### 9.7.2 Propriété

**Proposition.**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires,  $u : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,

**si**  $X$  et  $Y$  sont indépendantes **alors**  $u(X)$  et  $v(Y)$  sont indépendantes.

### 9.7.3 $n$ variables aléatoires

**Définition.**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de variables aléatoires,

Dire que les  $X_k$  sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :

quel que soit la liste  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que  $x_k \in X_k(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k)$

### 9.7.4 Propriétés

**Propositions :**

Soit  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ,

❶ **Si**  $X_1, \dots, X_n$  sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

toute sous-famille de  $(X_1, \dots, X_n)$  l'est aussi.

❷ (**Lemme des coalitions**)

Soient  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,

**si**  $X_1, \dots, X_p, \dots, X_n$  sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

$f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

❸ Soit  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,

**si**  $X_1, \dots, X_n$  sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont (*mutuellement*) indépendantes.

### 9.7.5 Espérance de $XY$ et variance de $(X + Y)$

**Théorème :**

- ❶ Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$  et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- ❷ Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes alors  $E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$  et  $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$

## 9.8 Lois usuelles.

Soient  $n$  un entier non nul et  $X$  une variable aléatoire de  $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ,

### 9.8.1 Loi certaine.

Soit  $a$  un nombre réel.

La variable certaine égale à  $a$  est la fonction constante  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\omega \mapsto a$

On a :  $X(\Omega) = \{a\}$  et  $\mathbb{P}([X = a]) = 1$ ,  $\mathbb{E}(X) = a$   $V(X) = 0$ .

### 9.8.2 Loi de Bernoulli.

**Définition :**

Soit  $p$  un réel de  $]0, 1[$ ,

Dire que  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$$

On note :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et on a :  $\mathbb{E}(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$

**Remarque :** (fonction indicatrice)

Si  $A$  est un événement de  $\Omega$  alors  $\mathbb{1}_A$  est une variable aléatoire et  $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

**Simulation avec une fonction Python :**

```
def bernoulli(p):
    if random() <= p:
        return 1
    return 0
```

### 9.8.3 Loi uniforme.

**Définition :**

Dire que  $X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$  signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

On note :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  et on redémontre que  $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Pour  $a$  et  $b$  des entiers ( $a < b$ ),  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$  signifie  $\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket a; b \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \frac{1}{b-a+1} \end{cases}$

On a alors :  $E(X) = \frac{a+b}{2}$

**Simulation avec une fonction Python** de la réalisation de  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$

```
def uniforme_discret(a,b):
    return a + int((b-a+1)*random())
```

**9.8.4 Loi binomiale.**

**Définition :**

Soit  $p$  un réel de  $]0, 1[$ ,

Dire que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

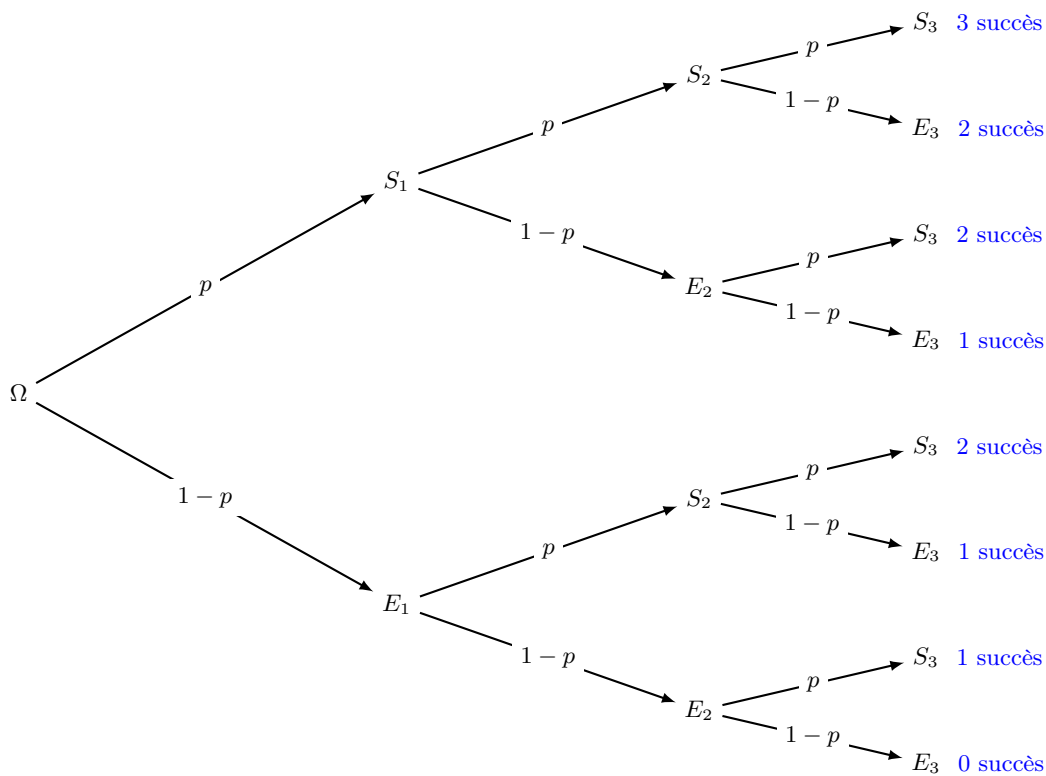
On note :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et on a  $\mathbb{E}(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$

**Dans quelles situations peut-on observer une loi binomiale ?**

Soit  $\mathcal{E}$  une expérience constituée de  $n$  épreuves **identiques et indépendantes**  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$   
 ( toutes modélisées par  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  ) et  $A$  un événement de  $\Omega$  de probabilité  $\mathbb{P}(A) = p$ .

Si  $X$  est la variable aléatoire égale **au nombre de réalisation** de  $A$  au cours des  $n$  épreuves alors :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

*Schéma de Bernoulli*



**Autre situation.**

**Théorème :** Somme de  $n$  variables de Bernoulli identiques et indépendantes.

La somme de  $n$  variables de Bernoulli de paramètre  $p$  (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$

Soient  $n$  un entier naturel non nuls et  $p$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$

Si  $\begin{cases} \textcircled{1} X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ \textcircled{2} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \\ \textcircled{3} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{cases}$ , alors  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

**Simulation avec une fonction Python :**

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```

# Equations différentielles.

## Plan du chapitre

---

10.1	Equations différentielles homogènes. . . . .	129
10.1.1	Equations différentielles linéaire homogènes d'ordre 1 sous forme résolue. . . . .	129
10.1.2	Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. . . . .	130
10.2	Equation avec second membre. . . . .	130
10.2.1	Première ordre. . . . .	131
10.2.2	Deuxième ordre à coefficients constants. . . . .	131
10.3	Principe de superposition. . . . .	132
10.3.1	Première ordre. . . . .	132
10.3.2	Deuxième ordre. . . . .	132
10.4	Méthode de variation de la constante. . . . .	133
10.5	Condition initiale. . . . .	133
10.5.1	Premier ordre. . . . .	133
10.5.2	Deuxième ordre. . . . .	134

---

## 10.1 Equations différentielles homogènes.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (*non trivial*), on note  $D^k(I)$  l'espace vectoriel des fonctions  $k$  fois dérivables sur  $I$ .

### 10.1.1 Equations différentielles linéaire homogènes d'ordre 1 sous forme résolue.

Soit  $a$  une fonction continue sur  $I$ , on note  $(E_0)$  l'équation différentielle  $y' + a(t)y = 0$ .

**Définition :**

l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = 0 \right\}$$

**Théorème.**

On note  $A$  une primitive quelconque de  $a$  sur  $I$ ,  
 l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-A(t)} \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

**Démonstration :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ , on note  $g : t \longmapsto e^{A(t)}f(t)$ ,

$$\begin{aligned} f \in S_{(E_0)} &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, e^{A(t)}f'(t) + a(t)e^{A(t)}f(t) = 0 \quad \text{car } e^{A(t)} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \forall t \in I, \quad g'(t) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad g(t) = k \quad \text{car } I \text{ est un intervalle} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)} f(t) = k \\ \Leftrightarrow \quad & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad f(t) = k e^{-A(t)} \quad \text{car } e^{-A(t)} \neq 0 \end{aligned}$$

**Remarques :**

- Les solutions non nulles de  $(E_0)$  ne s'annulent pas sur  $I$ .
- Si une solution de  $(E_0)$  s'annule alors c'est la fonction nulle.

**Corollaire.** (*Cas particulier, équation à coefficients constants*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \neq 0$ , on note  $E_0 : y'(t) + ay(t) = 0$ .  
 l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k e^{-at} \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

**10.1.2 Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a \neq 0$ , on note  $(E_0)$  l'équation différentielle :

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

**Définition :**

l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0 \right\}$$

**Théorème**

On distingue trois cas :

❶ si  $ax^2 + bx + c = 0$  a deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ ,  
 alors l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$$

❷ si  $ax^2 + bx + c = 0$  a une racine réelle double  $r_0$ ,  
 alors l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{r_0 t} + k_2 t e^{r_0 t} \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto t e^{r_0 t})$$

❸ si  $ax^2 + bx + c = 0$  a deux racines complexes conjuguées  $\alpha + i\omega$  et  $\overline{\alpha + i\omega}$ ,  
 alors l'ensemble des solutions de l'équation  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 \cos(\omega t) e^{\alpha t} + k_2 \sin(\omega t) e^{\alpha t} \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \mapsto \cos(\omega t) e^{\alpha t}, t \mapsto \sin(\omega t) e^{\alpha t})$$

**Remarque.**

Dans le cas ❸ on peut aussi écrire les solutions sous la forme :  $t \mapsto A e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$

**10.2 Equation avec second membre.**

Soit  $\varphi$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

**10.2.1 Première ordre.**

Soit  $a$  une fonction continue sur  $I$ , on note :

$$(E) : y' + a(t)y = \varphi(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : y' + a(t)y = 0$$

**Définition :**

l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \right\}$$

**Théorème :**

Si  $g$  est une solution (*particulière*) de  $(E)$  sur  $I$  alors

$$\begin{aligned} \text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ sur } I \text{ est : } S_{(E)} &= \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto h(t) + g(t) \end{array} \mid h \in S_{(E_0)} \right\} \\ \text{ou plus simplement : } S_{(E)} &= \{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \} \end{aligned}$$

**Démonstration :**

On suppose que  $g$  est une solution de  $(E)$ , (On sait que :  $\forall t \in I, g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t)$ )

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ ,

$$\begin{aligned} f \in S_{(E)} &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = g'(t) + a(t)g(t) \\ &\iff \forall t \in I, (f - g)'(t) + a(t)(f - g)(t) = 0 \\ &\iff f - g \in S_{E_0} \\ &\iff \exists h \in S_{E_0} : f - g = h \\ &\iff \exists h \in S_{E_0} : f = h + g \end{aligned}$$

$$S_{(E)} = \{ f \in D^1(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} : f = g + h \} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \}$$

**Théorème :** (*Autre formulation*)

Si  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$  et  $g$  est une solution de  $(E)$  alors

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-A(t)} + g(t) \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

**Corollaire.** (*Cas particulier, équation à coefficients constants*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \neq 0$ , on note  $E : y'(t) + ay(t) = b$ .

l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-at} + \frac{b}{a} \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

**10.2.2 Deuxième ordre à coefficients constants.**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a \neq 0$ , on note :

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

**Définition :**

l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $I$  est :

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = \varphi(t) \right\}$$

**Théorème :**

Si  $g$  est une solution (*particulière*) de  $(E)$  sur  $I$  alors

$$\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ sur } I \text{ est : } S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto h(t) + g(t) \end{array} \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$$

ou plus simplement :  $S_{(E)} = \{h + g \mid h \in S_{(E_0)}\}$

**Démonstration :**

On suppose que  $g$  est une solution de  $(E)$ , (On sait que :  $\forall t \in I, ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) = \varphi(t)$ ).

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$ ,

$$\begin{aligned} f \in S_{(E)} &\iff \forall t \in I, af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) \\ &\iff \forall t \in I, a(f-g)''(t) + b(f-g)'(t) + c(f-g)(t) = 0 \\ &\iff f-g \in S_{E_0} \\ &\iff \exists h \in S_{E_0} : f = h + g \end{aligned}$$

$$S_{(E)} = \{f \in D^2(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} : f = g + h\} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \{h + g \mid h \in S_{(E_0)}\}$$

■

### 10.3 Principe de superposition.

#### 10.3.1 Première ordre.

**Proposition :**

Soient  $a, \varphi_1, \varphi_2$  trois fonctions continues sur  $I$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,  
on considère trois équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t) \qquad (E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$$

Si  $g_1$  est une solution de  $(E_1)$ ,  $g_2$  est une solution de  $(E_2)$  alors  $\alpha g_1 + \beta g_2$  est une solution de  $(E)$ .

**Démonstration :**

On suppose que :  $\forall t \in I, g_1'(t) + a(t)g_1(t) = \varphi_1(t)$  et  $\forall t \in I, g_2'(t) + a(t)g_2(t) = \varphi_2(t)$

On a alors pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} (\alpha g_1 + \beta g_2)'(t) + a(t)(\alpha g_1 + \beta g_2)(t) &= \alpha(g_1'(t) + a(t)g_1(t)) + \beta(g_2'(t) + a(t)g_2(t)) \\ &= \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) \end{aligned}$$

donc  $\alpha g_1 + \beta g_2$  est solution de  $(E)$

■

Ce principe permet de simplifier une équation différentielle  $(E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$  en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t)$$

#### 10.3.2 Deuxième ordre.

**Proposition :**

Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  des fonctions définies sur l'intervalle  $I$  et  $\alpha, \beta$  des réels,

On considère les équations différentielles :  $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ ,

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

Si  $g_1$  est une solution de  $(E_1)$  sur  $I$  et  $g_2$  est une solution de  $(E_2)$  sur  $I$

alors  $\alpha g_1 + \beta g_2$  est une solution de  $(E)$  sur  $I$

**Démonstration :**

Cette proposition permet de simplifier une équation différentielle  $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$  en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

## 10.4 Méthode de variation de la constante.

On ici s'intéresse aux équations différentielles de la forme  $(E) : y' + a(t)y = \varphi(t)$ .

avec  $a$  et  $\varphi$  deux **fonctions continues** sur l'intervalle  $I$ .

Ces équations sont appelées **équations différentielles linéaires résolues** du premier ordre.

**Théorème :**  $(E)$  possède au moins une solution sur  $I$

**Démonstration :** (*Méthode de la variation de la constante*)

**En trois étapes :**

❶ On commence par résoudre  $(E_0)$ ,  $a$  est continue sur  $I$ , on note  $A$  une de ses primitives sur  $I$  :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto k \exp(-A(t)) \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

dans la suite, on pose  $f_0(t) = \exp(-A(t))$  et ainsi :  $S_0 = \text{Vect}(f_0)$

❷ On cherche une solution de  $(E)$  (on cherche une solution particulière)

Soit  $k$  une fonction dérivable sur  $I$ , on note :  $g : t \mapsto k(t) \times f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff \forall t \in I, \quad g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) + k(t)f_0'(t) + a(t)k(t)f_0(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) + k(t) \underbrace{(f_0'(t) + a(t)f_0(t))}_{=0} = \varphi(t) \quad \text{car } f_0 \in S_{E_0} \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t) = \varphi(t) \exp(A(t)) \end{aligned}$$

donc en choisissant pour  $k$  une des primitives de  $t \mapsto \varphi(t) \exp(A(t))$

(cette primitive existe car cette fonction est continue sur  $I$ ),

on obtient bien  $g : t \mapsto k(t) \times \exp(-A(t))$  est une solution de  $(E)$ . ■

❸ Connaissant les solutions de  $(E_0)$  et une solution de  $(E)$  on peut conclure.

**Quand utilise-t-on cette méthode :**

- ① Sur une équation différentielle du premier ordre  $y' + a(t)y = \varphi(t)$ .
- ② Quand l'énoncé ne donne pas la forme d'une solution particulière.
- ③ Quand on ne trouve pas de solution en faisant : une conjecture sur la forme d'une solution suivie d'une vérification par calcul.

**Remarques :**

- pour ③ certains utilisent la phrase<sup>1</sup> : "Chercher une solution sous la forme du second membre"
- pour ceux qui veulent aller plus loin ils peuvent étudier le chapitre 6 de ce cours.

## 10.5 Condition initiale.

### 10.5.1 Premier ordre.

Soient  $I$  un intervalle,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $I$ ,

on note  $(E)$  l'équation différentielle :  $y' + a(t)y = \varphi(t)$

**Théorème :**

Quel que soient  $t_0, y_0$  deux nombres réels avec  $t_0 \in I$ , il existe une et une seule solution  $f$  de  $(E)$  sur  $I$  vérifiant :

$$f(t_0) = y_0$$

1. cette phrase sert à guider la recherche en proposant une conjecture, sans constituer une méthode rigoureuse ni une preuve

**Démonstration :**

Soit  $f$  une solution de  $(E)$  et  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $f : t \mapsto k e^{-A(t)} + g(t)$ ,

$$\begin{aligned} f(t_0) = y_0 &\iff k e^{-A(t_0)} + g(t_0) = y_0 \\ &\iff k e^{-A(t_0)} = y_0 - g(t_0) \\ &\iff k = (y_0 - g(t_0)) e^{A(t_0)} \\ &\iff f : t \mapsto (y_0 - g(t_0)) e^{-(A(t) - A(t_0))} + g(t) \end{aligned}$$

■

**10.5.2 Deuxième ordre.**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a \neq 0$ , on note  $(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$

On suppose ici que  $(E)$  possède au moins une solution sur  $I$ .

**Théorème :**

Soit  $t_0, y_0$  et  $y_1$  trois nombres réels avec  $t_0 \in I$ , il existe une et une seule solution  $f$  de  $(E)$  vérifiant :

$$f(t_0) = y_0, \quad f'(t_0) = y_1$$

**Démonstration :**

# Géométrie dans le plan et dans l'espace.

## Plan du chapitre

11.1	Introduction. . . . .	135
11.1.1	Des vecteurs. . . . .	135
11.1.2	Repères, coordonnées. . . . .	136
11.1.3	Calculs sur les vecteurs. . . . .	136
11.1.4	Norme d'un vecteur . . . . .	137
11.1.5	Vecteurs colinéaires. . . . .	137
11.2	Produit scalaire. . . . .	138
11.2.1	Définition. . . . .	138
11.2.2	Propriétés du produit scalaire et de la norme. . . . .	139
11.3	Droites et cercles du plan. . . . .	139
11.3.1	Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite. . . . .	139
11.3.2	Equation cartésienne d'une droite, vecteur normal. . . . .	140
11.3.3	Equation cartésienne d'un cercle du plan. . . . .	140
11.3.4	Représentation paramétrique d'un cercle du plan. . . . .	140
11.4	Droites et plans de l'espace. . . . .	140
11.4.1	Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite. . . . .	141
11.4.2	Base d'un plan, représentation paramétrique d'un plan. . . . .	141
11.4.3	Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan. . . . .	141
11.4.4	Système d'équations cartésiennes définissant une droite. . . . .	142
11.4.5	Positions relatives de trois plans. . . . .	142
11.5	Projection orthogonale . . . . .	143
11.5.1	Projection orthogonale sur une droite . . . . .	143
11.5.2	Projection orthogonale sur un plan . . . . .	144

## 11.1 Introduction.

### 11.1.1 Des vecteurs.

La translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est la transformation du plan (ou de l'espace) qui à tout point  $M$  associe l'unique point  $M'$  telle que :  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ .

La translation de vecteur nul est l'identité du plan (ou de l'espace).

Pour quatre points  $A, B, C, D$  du plan (ou de l'espace) :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  équivaut à  $ABCD$  est un parallélogramme.

Pour quatre points  $A, B, C, D$  du plan (ou de l'espace) :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  équivaut à  $[AC]$  et  $[BD]$  ont même milieu.

Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

Un vecteur a une infinité de représentants : on peut représenter un vecteur à partir de tout point de l'espace :

Etant donné un vecteur  $\vec{u}$  et un point  $A$ , il existe un unique point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

### 11.1.2 Repères, coordonnées.

On se place ici dans le plan et l'espace géométrique usuels munis chacun d'un repère orthonormal.

On note  $\mathcal{P}$  le plan et  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal. On note  $\mathcal{B}$  la base  $(\vec{i}, \vec{j})$

- on écrit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  pour indiquer que  $M$  est le point de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , autrement dit l'unique point  $M$  vérifiant :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- on écrit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  pour indiquer que  $\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées  $(a, b)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , autrement dit l'unique point  $\vec{u}$  vérifiant :  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

On note  $\mathcal{E}$  l'espace et  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormal.

- on écrit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  pour indiquer que  $M$  est le point de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , autrement dit l'unique point  $M$  vérifiant :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- on écrit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  pour indiquer que  $\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées  $(a, b, c)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , autrement dit l'unique point  $M$  vérifiant :  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Une fois ce repère fixé,

L'application qui à  $(x, y, z)$  associe  $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  est une bijection, l'image de  $(x, y, z)$  est le vecteur de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

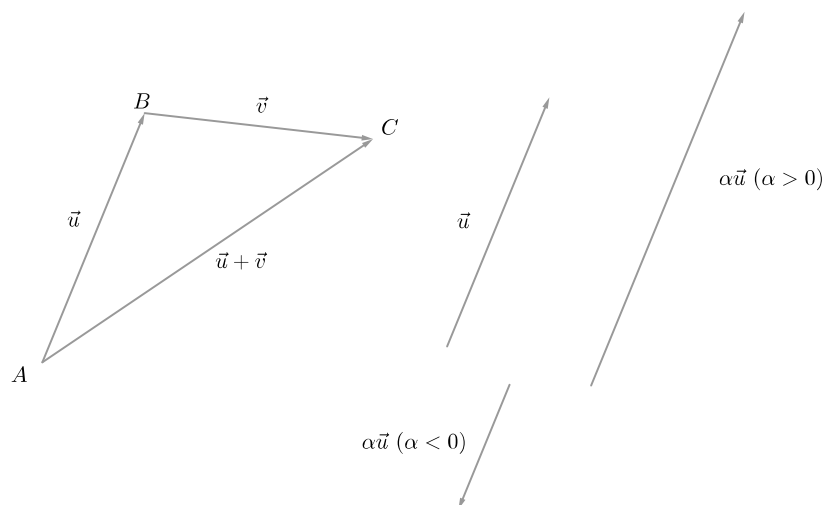
### 11.1.3 Calculs sur les vecteurs.

On définit deux opérations sur l'ensemble des vecteurs.

La définition de la somme est la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$



nit alors deux opérations sur  $\mathbb{R}^3$  compatibles avec les opérations sur les vecteurs :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{et} \quad k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

Si  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$ , alors les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont :  $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

L'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) est un espace vectoriel.

Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs,  $a$  et  $b$  deux scalaires, on a alors :

1.  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2.  $\exists \vec{0} \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
3.  $\exists \vec{u}' \quad \vec{u} + \vec{u}' = \vec{0} \quad (\text{on note : } \vec{u}' = -\vec{u})$
4.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
5.  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
6.  $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
7.  $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$
8.  $0 \vec{u} = \vec{0}$
9.  $1 \vec{u} = \vec{u}$

Généralisation de la relation de Chasles avec  $A_0, A_1, \dots, A_n$  des points de l'espace.

$$\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \overrightarrow{A_0A_n}$$

### 11.1.4 Norme d'un vecteur

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace, la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est la longueur  $AB$ .

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Si  $\vec{u}$  est vecteur de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$  alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Propositions :**

① $\ \vec{u}\  \geq 0$	② $\ \vec{u}\  = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
③ $\ \lambda\vec{u}\  =  \lambda  \cdot \ \vec{u}\ $	④ $\ \vec{u} + \vec{v}\  \leq \ \vec{u}\  + \ \vec{v}\ $

### 11.1.5 Vecteurs colinéaires.

**Définition :**

Dire que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires signifie qu'il existe  $(a, b) \neq (0, 0)$  tel que :

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

**Remarques :**

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

**Définition (famille libre de deux vecteurs).**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires si, et seulement si,  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \implies a = b = 0$ .

**Cas particulier de deux vecteurs du plan.**

**Proposition :** Condition (CNS) de colinéarité.

Soient  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y')$  deux vecteurs du plan,  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si, et seulement si,  $xy' - x'y = 0$

**Définition :**

Soient  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y')$ ,  
 on appelle **déterminant** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel :  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ .

## 11.2 Produit scalaire.

On se place toujours dans un repère orthonormal.

### 11.2.1 Définition.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace respectivement de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$

Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarques :

- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- Définition similaire pour le produit scalaire de deux vecteurs du plan :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

D'autres moyens de calculer le produit scalaire de deux vecteurs.

avec les normes :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \end{aligned}$$

avec le cosinus :

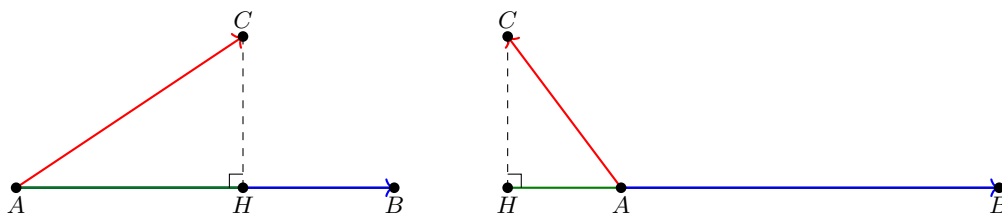
Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls,  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$   
 Soient  $A, B$  et  $C$  tels que  $A \neq B$  et  $A \neq C$ ,  
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$

avec le projeté orthogonal :

Soient  $A, B$  et  $C$  tels que  $A \neq B$ ,  
 on note  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ ,  
 si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  ont le même sens  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$   
 sinon  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$

Avec la notion de valeur algébrique :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$



Même sens  
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$

Sens contraires  
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$

Orthogonalité.

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Deux droites  $(AB)$  et  $(DC)$  sont **orthogonales** si, et seulement si,  $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0$ .

### 11.2.2 Propriétés du produit scalaire et de la norme.

**Propositions :**

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0 \\ \textcircled{2} \quad & \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \textcircled{3} \quad & \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3, \\ & (\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \alpha \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \beta \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \\ \textcircled{4} \quad & \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3, \\ & \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Pour  $\textcircled{3}$  et  $\textcircled{4}$  on parle de bilinéarité du produit scalaire.

**Propositions :**

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ \textcircled{2} \quad & \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (\text{aussi noté } \vec{u}^2) \\ \textcircled{3} \quad & (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \textcircled{4} \quad & (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \textcircled{5} \quad & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

## 11.3 Droites et cercles du plan.

On note  $\mathcal{P}$  le plan (un ensemble de points) et  $P$  l'ensemble des vecteurs du plan.

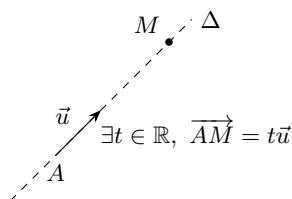
On munit le plan d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

### 11.3.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite.

Soient  $A$  un point du plan et  $\vec{u}$  un vecteur non nul du plan.

La droite  $D$  passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  (vecteur directeur) est l'ensemble : (noté  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ )

$$\left\{ M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}$$



Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur non nul de  $P$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t a \\ y = y_A + t b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{est une représentation paramétrique de la droite de } \mathcal{D}(A, \vec{u})$$

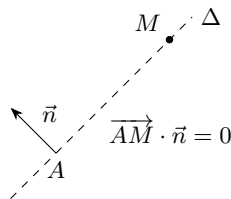
**Remarques :** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

### 11.3.2 Equation cartésienne d'une droite, vecteur normal.

**Définition :**

Soit  $\mathcal{D}$  une droite passant par le point  $A$ ,  
 Dire que  $\vec{n}$  est un vecteur normal de  $\mathcal{D}$  signifie que  $M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



Si le vecteur  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  alors il existe  $c$  tel que  $\mathcal{D} : ax + by = c$

$$\mathcal{D} : ax + by = c \quad \text{signifie que} \quad \mathcal{D} = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \mid ax + by = c \right\}$$

L'équation :  $ax + by = c$  est appelée **équation cartésienne** de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Remarques :** Soient  $\mathcal{D}$  de vecteur normal  $\vec{n}$  et  $\mathcal{D}'$  de vecteur normal  $\vec{n}'$ ,

- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.
- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.

**Propositions :**

- ① Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de la droite  $D$  d'équation cartésienne  $ax + by = c$
- ② Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $D$  d'équation cartésienne  $ax + by = c$
- ③ Les vecteurs de  $D : ax + by = c$  sont les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vérifiant  $ax + by = 0$

**Remarques :** Soient  $\mathcal{D} : ax + by = c$  et  $\mathcal{D}' : a'x + b'y = c'$ ,

- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles si, et seulement si,  $ab' - a'b = 0$
- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $aa' + bb' = 0$

### 11.3.3 Equation cartésienne d'un cercle du plan.

Soient  $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$  un point et  $R \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ .

Les points de  $\mathcal{C}$  sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

### 11.3.4 Représentation paramétrique d'un cercle du plan.

Soient  $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$  un point et  $R \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ .

Les points de  $\mathcal{C}$  sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff \exists t \in [0; 2\pi[, \quad \begin{cases} x = x_\Omega + R \cos(t) \\ y = y_\Omega + R \sin(t) \end{cases}$$

## 11.4 Droites et plans de l'espace.

On note  $\mathcal{E}$  l'espace (*un ensemble de points*) et  $E$  l'ensemble des vecteurs de l'espace.

On munit l'espace d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

### 11.4.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite.

Soient  $A$  un point de l'espace et  $\vec{u}$  un vecteur non nul de l'espace.

La droite  $D$  passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  (vecteur directeur) est l'ensemble : (noté  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ )

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \mid \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}$$

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur non nul.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{est une \textbf{représentation paramétrique de la droite } } \mathcal{D}(A, \vec{u})$$

**Remarques :** Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$  sont orthogonales si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.
- Attention :  
Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si, et seulement si, elles sont orthogonales et sécantes.

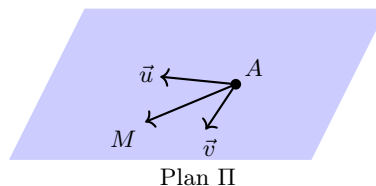
### 11.4.2 Base d'un plan, représentation paramétrique d'un plan.

Soient  $A$  un point,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Le plan passant par  $A$  et dirigée par  $(\vec{u}, \vec{v})$  (base du plan) est l'ensemble :

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \mid \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \right\}$$

On notera  $\Pi(A, \vec{u}, \vec{v})$  ce plan.



Plan  $\Pi$

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  un point de l'espace,  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs non colinéaires.

Les points du plan  $\Pi(A, \vec{u}, \vec{v})$  sont caractérisés par l'équivalence :

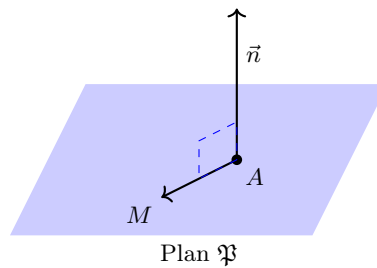
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \quad ((t, t') \in \mathbb{R}^2) \quad \text{est une \textbf{représentation paramétrique du plan } } \Pi(A, \vec{u}, \vec{v}).$$

### 11.4.3 Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan.

Soit  $\mathfrak{P}$  un plan passant par le point  $A$ ,

Dire que  $\vec{n}$  est un vecteur normal de  $\mathfrak{P}$  signifie que  $M \in \mathfrak{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



**Remarques :**

- Les vecteurs normaux d'un plan de l'espace sont non nuls.
- Les vecteurs normaux d'un plan  $\Pi(A, \vec{u}, \vec{v})$  sont les vecteurs  $\vec{n}$  non nuls vérifiant :  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .  
(Il suffit d'être orthogonal à deux vecteurs non colinéaires pour l'être à tous les vecteurs du plan).
- Si  $\mathfrak{P} : ax + by + cz = d$  alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathfrak{P}$ .
- Si le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathfrak{P}$  alors il existe  $d$  tel que  $\mathfrak{P} : ax + by + cz = d$

L'équation :  $ax + by + cz = d$  est appelée **équation cartésienne** du plan  $\mathfrak{P}$ .

Soient deux plans  $\mathfrak{P} : ax + by + cz = d$  et  $\mathfrak{P}' : a'x + b'y + c'z = d'$

- $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}'$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  sont colinéaires.
- $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}'$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  sont orthogonaux.
- $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}'$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $aa' + bb' + cc' = 0$ .

Soient un plan  $\mathfrak{P}$  de vecteurs normal  $\vec{n}$  et  $\mathcal{D}$  une droite de vecteur directeur  $\vec{v}$ .

- $\mathcal{D}$  et  $\mathfrak{P}$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{v}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux.
- $\mathcal{D}$  et  $\mathfrak{P}$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $\vec{v}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires.

**11.4.4 Système d'équations cartésiennes définissant une droite.**

Toute droite de l'espace peut s'exprimer comme l'intersection de deux plans sécants.

On obtient alors une caractérisation des points  $M(x, y, z)$  d'une droite par un système d'équations linéaires.

$$\Delta : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

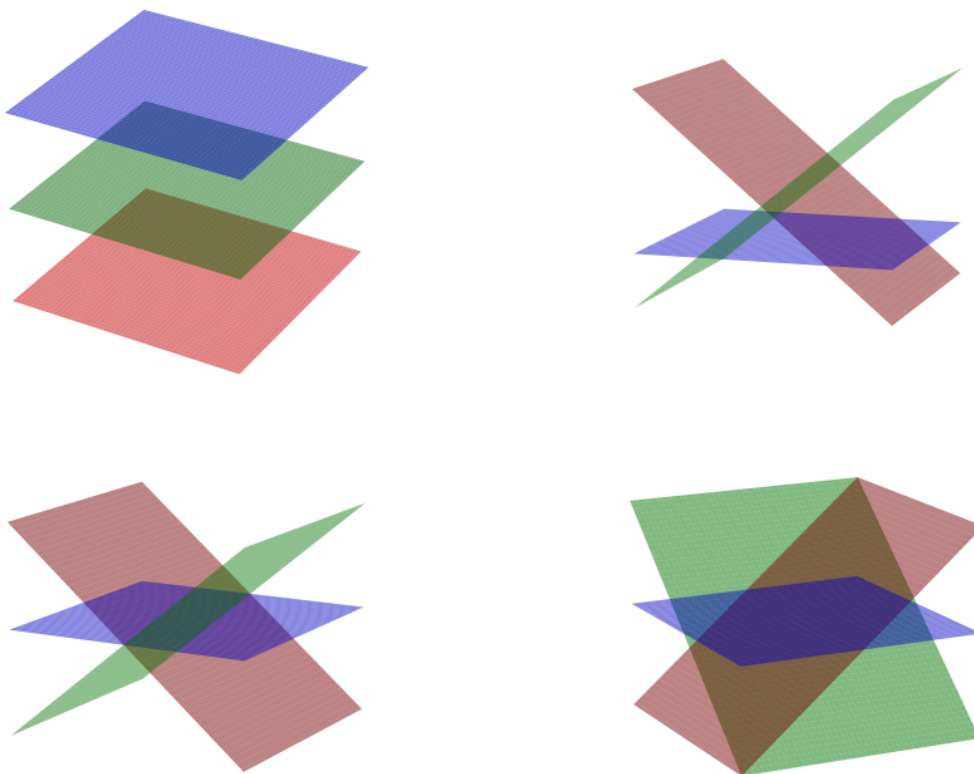
**Remarques :**

- Pour que ce système caractérise les points d'une droite, les vecteurs  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  sont nécessairement non colinéaires.
- Un vecteur non nul  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$  si, et seulement si,  $\vec{u} \perp \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \perp \vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ .

**11.4.5 Positions relatives de trois plans.**

$$\text{On note : } \Sigma \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & \mathcal{P}_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & \mathcal{P}_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 & \mathcal{P}_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$$

1. Trois plans parallèles. ( $\mathcal{S}$  est vide ou  $\mathcal{S}$  est un plan).
2. Exactement deux plans parallèles. ( $\mathcal{S}$  est vide ou  $\mathcal{S}$  est une droite )
3. Aucun couple de plans parallèles. ( $\mathcal{S}$  est vide, une droite ou  $\mathcal{S}$  est un point).



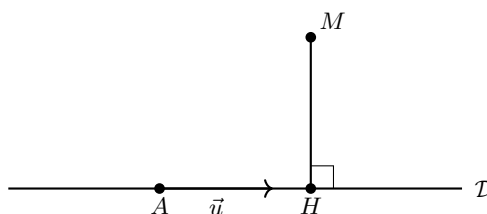
## 11.5 Projection orthogonale

### 11.5.1 Projection orthogonale sur une droite

#### Définition

Soit  $\mathcal{D}$  une droite définie par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$ .  
La projeté orthogonal d'un point  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est l'unique point  $H \in \mathcal{D}$  tel que :

$$\overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$



**Remarque :** Cette définition est la même dans le plan et dans l'espace. ( $\mathcal{D}$  est une droite du plan ou de l'espace).

#### Définition

Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan ou de l'espace.  
La projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  est l'application qui à tout point  $M$  associe son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$ .

**Remarque sur le vocabulaire :** (*Mauvaise formulation du programme de première année*)

- Le projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$  d'un point est un point de  $\mathcal{D}$ .
- La projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  est une application du plan dans le plan (ou de l'espace dans l'espace).

- On évitera de confondre la projection orthogonale et l'image d'un point par cette application que l'on appelle projeté orthogonal.

**Définition**

On se place dans le plan ou dans l'espace.

Soit  $\mathcal{D}$  une droite et  $M$  un point.

La distance de  $M$  à  $\mathcal{D}$  est la longueur  $MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Remarque :**  $H$  minimise la distance de  $M$  aux points de  $\mathcal{D}$

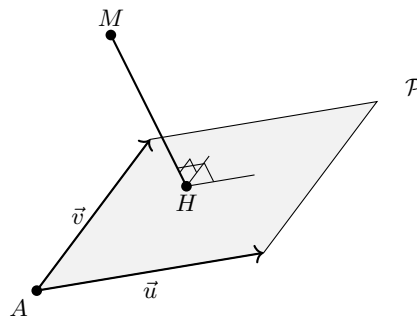
**11.5.2 Projection orthogonale sur un plan****Définition.**

Dans l'espace.

Soit  $\mathcal{P}$  un plan *affine* défini par un point  $A$  et deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur  $\mathcal{P}$  est l'unique point  $H \in \mathcal{P}$  tel que :

$$\overrightarrow{HM} \perp \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HM} \perp \vec{v}.$$

**Définition**

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace.

La projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  est l'application qui à tout point  $M$  associe son projeté orthogonal sur  $\mathcal{P}$ .

**Même remarque sur le vocabulaire :** ne pas confondre projeté orthogonal et projection orthogonale.

**Définition**

Dans l'espace.

Soit  $\mathcal{P}$  un plan et  $M$  un point.

La distance de  $M$  à  $\mathcal{P}$  est la longueur  $MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{P}$ .

**Remarque :**  $H$  minimise la distance de  $M$  aux points de  $\mathcal{P}$

## 12

# Fonctions réelles de deux variables réelles.

## Plan du chapitre

12.1	Surface représentative. . . . .	145
12.2	Courbes (lignes) de niveaux. . . . .	145
12.3	Dérivées partielles du premier ordre. . . . .	146
12.4	Fonctions de classe $C^1$ . . . . .	146
12.5	Développement limité d'ordre 1 . . . . .	147
12.6	Gradient. . . . .	147
12.7	Dérivation de $t \mapsto f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ . . . . .	148
12.8	Dérivées partielles de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ . . . . .	148
12.9	Condition nécessaire pour avoir un extremum local. . . . .	148
12.10	Dérivée partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz. . . . .	149

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $-\infty \leq c < d \leq +\infty$ .

Dans ce chapitre  $f$  désigne une application de  $P = ]a, b[ \times ]c, d[$  dans  $\mathbb{R}$ . ( $P$  est un pavé ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$ ).

$$\begin{aligned} f : P &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

## 12.1 Surface représentative.

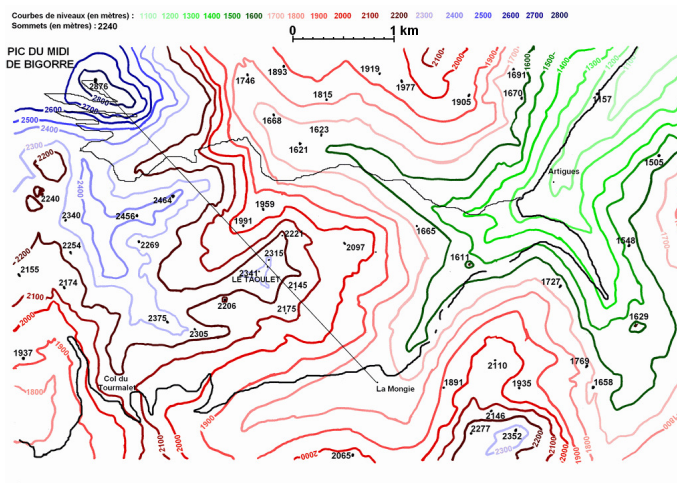
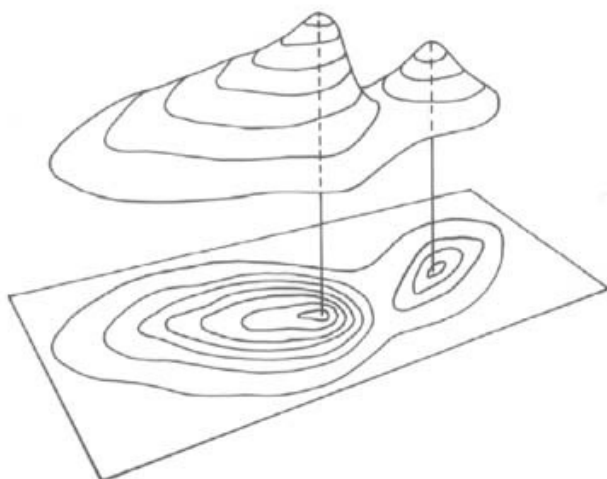
La représentation graphique de  $f$  dans un repère de l'espace est une surface, c'est l'ensemble :

$$S_f = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid z = f(x, y)\}$$

## 12.2 Courbes (lignes) de niveaux.

On appelle courbes (ou lignes) de niveau de la surface  $S : z = f(x, y)$  les ensembles de la forme :

$$\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid f(x, y) = c\} \quad \text{où } c \text{ est une constante réelle}$$



### 12.3 Dérivées partielles du premier ordre.

**Définitions :**

Soit  $(x_0, y_0) \in P$ .

- Dire que  $f$  est dérivable par rapport à  $x$  en  $(x_0, y_0)$ , signifie que la fonction partielle  $x \mapsto f(x, y_0)$  est dérivable en  $x_0$ , ou encore  $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$  admet une limite finie quand  $h$  tend vers 0 ;

on note alors :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

- Dire que  $f$  est dérivable par rapport à  $y$  en  $(x_0, y_0)$ , signifie que la fonction partielle  $y \mapsto f(x_0, y)$  est dérivable en  $y_0$ , ou encore  $\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$  admet une limite finie quand  $h$  tend vers 0 ;

on note alors :  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

**Remarques :**

- Pour déterminer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , on dérive  $x \mapsto f(x, y)$  en considérant que  $y$  est une constante.
- Pour déterminer  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , on dérive  $y \mapsto f(x, y)$  en considérant que  $x$  est une constante.
- On définit ici des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :  $\frac{\partial f}{\partial x} : P \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} : P \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

**Proposition.**

Soit  $f$  admettant des dérivées partielles sur  $P$  :

- ❶ Si  $\forall (x, y) \in P, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  alors  $\exists \varphi : ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R} : \forall (x, y) \in P, f(x, y) = \varphi(y)$
- ❷ Si  $\forall (x, y) \in P, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  alors  $\exists \varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} : \forall (x, y) \in P, f(x, y) = \varphi(x)$

### 12.4 Fonctions de classe $C^1$ .

**Définition.**

Dire que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $P$  signifie que :

- ❶  $f$  admet en tout point des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de  $P$  et
- ❷ ses dérivées partielles sont continues sur  $P$ .

## 12.5 Développement limité d'ordre 1

### Théorème

Si  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $P$  alors  
 Pour chaque  $(x_0, y_0) \in P$  fixé, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que pour tout  $(x, y) \in P$  :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + d \varepsilon(d)$$

$$\text{avec } d = \|(x - x_0, y - y_0)\| \text{ et } \lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(d) = 0$$

**Remarque :**  $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

**Complément.** La différentielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  notée  $df_{(x_0, y_0)}$  est la forme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  suivante :

$$(a, b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) b$$

on note aussi :  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

## 12.6 Gradient.

### Définition :

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $P$ ,  
 on appelle gradient de la fonction  $f$  en  $(x_0, y_0)$  le vecteur :

$$\text{grad}(f)(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

### Remarques.

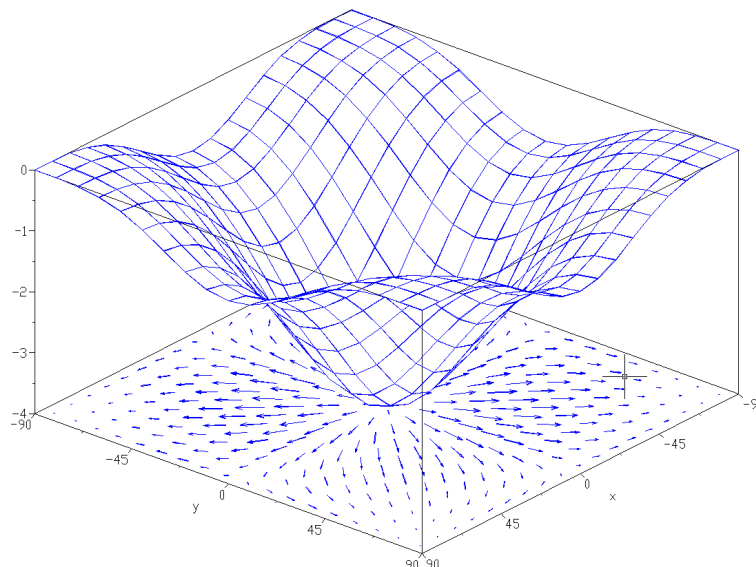
- On note aussi  $\nabla(f)(x_0, y_0)$  ou  $\vec{\nabla}(f)(x_0, y_0)$  le gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ .
- Le DL peut s'écrire en notant  $M(x, y)$  et  $M_0(x_0, y_0)$  :

$$f(M) = f(M_0) + \underbrace{\vec{\text{grad}}(f)(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0M}}_{\text{produit scalaire}} + d \varepsilon(d)$$

$$\text{avec } d = M_0M \text{ et } \lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

Le gradient représenté dans le plan  $(Oxy)$  :

- ① le gradient est un vecteur normal aux courbes de niveaux.
- ② le gradient indique la direction de plus grande pente et dans le sens des plus grandes valeurs.



## 12.7 Dérivation de $t \mapsto f(x(t), y(t))$ .

**Théorème :**

Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ ,  
 $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables telles que :  $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in P$ .  
 La fonction  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est la fonction :

$$t \mapsto x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Si  $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$  alors  $g'(t) = \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } f} \right\rangle = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$

**Interprétation :** La variation de  $f$  le long d'une trajectoire est donnée par la projection du vecteur tangent sur la direction du gradient.

## 12.8 Dérivées partielles de $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$

**Proposition.**

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $C^1$ . On pose

$$g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \end{pmatrix}.$$

## 12.9 Condition nécessaire pour avoir un extremum local.

**Définition.**

Dire que  $f$  présente un maximum local (resp. minimum local) en  $(x_0, y_0) \in P$  signifie qu'il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $(x_0, y_0)$  tel que :

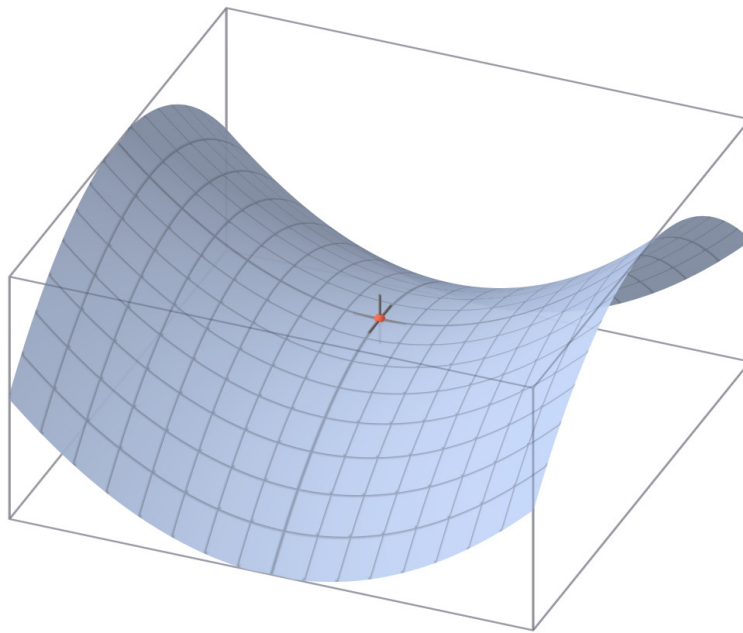
$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}, f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{ resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0) )$$

**Proposition :**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $P$  et  $(x_0, y_0) \in P$

si  $f$  admet un extremum en  $(x_0, y_0)$  alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

*Cette proposition n'est qu'une implication, il existe des contre-exemples à sa réciproque. La nullité des dérivées partielles n'implique pas la présence d'un extremum local.*



**Définition :**

On appelle **points critiques** de  $f$  les couples  $(x_0, y_0)$  de  $P$  vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

## 12.10 Dérivée partielle d'ordre 2, théorème de Schwarz.

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $P = ]a, b[ \times ]c, d[$ ,

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ admet des dérivées partielles sur } P \text{ on note } & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \text{Si } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ admet des dérivées partielles sur } P \text{ on note } & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

**Théorème de Schwarz :**

On note  $P = ]a, b[ \times ]c, d[$  et  $f$  une fonction de  $P$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{Si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ sont continues sur } P \text{ alors } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$



# Statistique.

## Plan du chapitre

---

13.1	Statistique univariée. . . . .	151
13.1.1	Les résultats d'une expérience. . . . .	151
13.1.2	Des nombres caractéristiques. . . . .	152
13.2	Statistique bivariée. . . . .	153
13.2.1	Nuage de points. . . . .	153
13.2.2	Covariance et coefficient de corrélation linéaire. . . . .	154
13.2.3	Droite de régression linéaire . . . . .	154

---

## 13.1 Statistique univariée.

### 13.1.1 Les résultats d'une expérience.

Les résultats d'une expérience peuvent être qualitatives ou quantitatives.

Nous nous intéresserons ici aux résultats numériques. (souvent le résultat d'une mesure).

On note :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la liste des données ( $n$ -uplets). Chaque  $x_i$  est un nombre réel.

On commence souvent par rassembler les résultats identiques pour présenter les données sous la forme :

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
effectifs	$e_1$	$e_2$	$\cdots$	$e_{p-1}$	$e_p$

Les valeurs distinctes sont classées dans l'ordre croissant.  $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \cdots < \tilde{x}_{p-1} < \tilde{x}_p$

L'effectif  $e_i$  est le nombre de résultats égaux à  $\tilde{x}_i$ ,  $n = \sum_{i=1}^p e_i$  est l'effectif total.

Souvent on préfère souvent utiliser les fréquences plutôt que les effectifs.

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
fréquences	$f_1$	$f_2$	$\cdots$	$f_{p-1}$	$f_p$

La fréquence  $f_i = \frac{e_i}{n}$  est la proportion de données dont la valeur est égale  $\tilde{x}_i$ .      Remarque :  $\sum_{i=1}^p f_i = 1$

On présente aussi les résultats avec les effectifs cumulés.

L'effectif cumulé en un réel  $x$  est égal au nombre de données dont la valeur est inférieure ou égale à  $x$ .

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
effectifs cumulés	$c_1$	$c_2$	$\cdots$	$c_{p-1}$	$c_p$

pour  $i$  compris entre 1 et  $p$ ,  $c_i = \sum_{k=1}^i e_k$

On utilise aussi les fréquences cumulées :

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\dots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
fréquences cumulées	$F_1$	$F_2$	$\dots$	$F_{p-1}$	$F_p$

pour  $i$  compris entre 1 et  $p$ ,  $F_i = \sum_{k=1}^i f_k$

c'est la proportion de données dont la valeur est inférieure ou égale à  $\tilde{x}_i$  et  $F_p = 1$ .

### 13.1.2 Des nombres caractéristiques.

#### Caractéristiques de position.

Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) = \frac{1}{\sum_{k=1}^p e_k} \left( \sum_{k=1}^p e_k \tilde{x}_k \right) = \sum_{k=1}^p f_k \tilde{x}_k$$

Médiane : (*Définition*)

On suppose ici que les données brutes sont triées :  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$ .  
 si  $n$  est impair alors on choisit pour médiane le réel  $x_{\frac{n+1}{2}}$   
 si  $n$  est pair alors on choisit pour médiane le réel  $\frac{1}{2} (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$

Si on note  $\text{med}(x)$  la médiane on a :

$$\text{card}\{ i \mid x_i < \text{med}(x) \} = \text{card}\{ i \mid X_i > \text{med}(x) \}$$

**Interprétation :** La médiane est un réel qui partage la série en deux parties de même effectifs. (*Il n'y a pas unicité de ce paramètre*)

Si on change la numérotation comme avec Python :  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-2} \leq x_{n-1}$

si  $n$  est impair alors on choisit pour médiane le réel  $x_{\frac{n-1}{2}}$   
 si  $n$  est pair alors on choisit pour médiane le réel  $\frac{1}{2} (x_{\frac{n}{2}-1} + x_{\frac{n}{2}})$

Premier et troisième quartiles. (*notées  $Q_1$  et  $Q_3$* )

Le **premier quartile** est l'unique valeur  $x_i$  où  $i$  est l'unique  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{n}{4} \quad \sum_{k=1}^i e_k \geq \frac{n}{4}$$

Le **troisième quartile** est l'unique valeur  $x_i$  où  $i$  est l'unique  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{3n}{4} \quad \sum_{k=1}^i e_k \geq \frac{3n}{4}$$

**Interprétation :** Les quartiles partagent en 4 parts *approximativement* égales.

Premier et neuvième déciles (*notées  $D_1$  et  $D_9$* ) :

Le **premier décile** est l'unique valeur  $x_i$  où  $i$  est l'unique  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{n}{10} \quad \sum_{k=1}^i e_k \geq \frac{n}{10}$$

Le **neuvième décile** est l'unique valeur  $x_i$  où  $i$  est l'unique  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{9n}{10} \quad \sum_{k=1}^i e_k \geq \frac{9n}{10}$$

**Interprétation :** Les déciles partagent en 10 parts *approximativement* égales.

**Remarques :**

- L'ensemble de ses valeurs se présente souvent sous la forme d'un **boxplot** ou encore **une boîte à moustaches**.
- On rencontre une autre définition des fractiles : les quartiles sont alors les quatre intervalles séparant la population en quatre (*Voir sujet 0 de Biologie*).

**Modes ou valeurs modales :**

L'ensemble des valeurs des valeurs modales :

$$\{ \tilde{x}_i \mid 1 \leq i \leq p \text{ et } e_i = \max_{1 \leq k \leq p} (e_k) \}$$

**Interprétation :**

- C'est un  $\tilde{x}_i$  correspondant à la plus grande valeur des  $e_i$ . (*Il n'y a pas unicité de ce paramètre*).
- C'est une valeur qui apparaît le plus souvent.

### Caractéristiques de dispersion.

L'écart-type est donné par chacune des formules :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^p f_k (\tilde{x}_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{k=1}^p e_k} \left( \sum_{k=1}^p e_k (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 \right)}$$

**Remarques :**

- On a toujours  $\sigma_x \geq 0$ .
- Si les  $x_i$  ont une unité alors  $\sigma_x$  a la même unité.
- $\sigma_x = 0$  si, et seulement si,  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{vect} \langle (1, \dots, 1) \rangle$

On appelle **variance** (empirique) le carré de l'écart-type :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^p f_k (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^p e_k} \left( \sum_{k=1}^p e_k (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 \right)$$

**Remarque :**

Dans la suite du cours nous allons définir une variable aléatoire que l'on appellera aussi variance empirique.

## 13.2 Statistique bivariée.

### 13.2.1 Nuage de points.

Au cours d'une expérience on recueille des valeurs de deux caractères :

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{et} \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

Lorsqu'on étudie la relation éventuelle entre les deux caractères on commence par représenter tous les points de coordonnées  $(x_i, y_i)$ . On obtient alors un nuage de points.

On place le **point moyen** du nuage : le point de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

On peut organiser ces données dans le tableau suivant :

valeurs du premier caractère	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\dots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
valeurs du deuxième caractère	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	$\dots$	$\tilde{y}_{p-1}$	$\tilde{y}_p$
effectifs	$e_1$	$e_2$	$\dots$	$e_{p-1}$	$e_p$

**Remarque :**  $n = \sum_{k=1}^p e_k$

### 13.2.2 Covariance et coefficient de corrélation linéaire.

**Définition :**

On appelle **covariance** des séries  $x$  et  $y$  le réel :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad \text{ou encore} \quad \text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k (\tilde{x}_k - \bar{x})(\tilde{y}_k - \bar{y})$$

**Proposition :**

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n e_k \tilde{x}_k \tilde{y}_k \right) - \bar{x} \bar{y}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k y_k - x_k \bar{y} - \bar{x} y_k + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \frac{1}{n} \bar{y} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) - \frac{1}{n} \bar{x} \left( \sum_{k=1}^n y_k \right) + \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

**Définition**

On appelle **coefficient de corrélation (linéaire)** le nombre :

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

**Remarques :**

- Ce coefficient est sans unité.
- Savoir calculer cette valeur avec votre calculatrice, un tableur et en faisant une fonction Python.

**Propositions :**

$$\textcircled{1} \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

$$\textcircled{2} \quad r_{xy} = 1 \text{ ou } -1 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \text{les points } M_1, M_2, \dots, M_n \text{ sont alignés.}$$

### 13.2.3 Droite de régression linéaire

**Définition :**

La **droite de régression linéaire de  $y$  en  $x$**  est la droite d'équation  $y = ax + b$  où :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

**Démonstration :** (Voir Annexe C)

**Savoir faire :** calculer  $a$  et  $b$  avec une calculatrice, un tableur et en faisant une fonction Python.

En donnant cette droite on dit que réalise un ajustement affine selon la *méthode des moindres carrés*.

- (Il existe une deuxième droite de régression linéaire :)

On définit la droite de **régression linéaire de  $x$  en  $y$**  qui est la droite d'équation  $x = \alpha y + \beta$  où :

$$\alpha = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_y^2} \quad \text{et} \quad \beta = \bar{x} - \alpha \bar{y}$$

- Ces deux droites de régression passent par le point milieu.

# Annexes



# Suites usuelles.

## Plan du chapitre

A.1	Suites arithmétiques. . . . .	157
A.2	Suites géométriques. . . . .	157
A.3	Suites arithmético-géométriques. . . . .	158
A.4	Récurrance linéaire d'ordre 2. . . . .	158

## A.1 Suites arithmétiques.

### Définition :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes et  $r$  un nombre complexe,  
dire que  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$

### Proposition : (Formule explicite)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes et  $r$  un nombre complexe,  
 $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$ , **si, et seulement si**,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

### Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite,  $r$  un nombre complexe et  $p$  un entier.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r$ , alors  $\forall n \in \llbracket p; +\infty \llbracket$ ,  $\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$

$$\sum_{k=p}^n u_k = \underbrace{(n - p + 1)}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_n}{2}}_{\text{Moyenne arithmétique du 1er et du dernier terme}}$$

## A.2 Suites géométriques.

### Définition :

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes et  $q$  un nombre complexe,  
dire que  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  signifie que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$

### Proposition : (Formule explicite)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes et  $q$  un nombre complexe,  
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$  **si, et seulement si**,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$

### Sommes.

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes,  $q$  un nombre complexe tel que  $q \neq 1$  et  $p$  un entier naturel,

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$ , alors  $\forall n \in \llbracket p; +\infty \llbracket$ ,  $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

$$\sum_{k=p}^n u_k = \underbrace{u_p}_{\text{premier terme}} \frac{1 - q \overbrace{(n-p+1)}^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

**Remarque :** lorsque  $q = 1$  la suite est constante et alors  $\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) u_p$

### A.3 Suites arithmético-géométriques.

**Définition :**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres complexes,  
dire que  $(u_n)$  est une suite **arithmético-géométrique** signifie que :  
il existe deux complexes  $a$  et  $b$  avec  $a \neq 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = a u_n + b$

**Méthode pratique :**

- ① On cherche le point fixe :  $\ell = a\ell + b \iff \dots$   $\ell = \dots$
- ② On montre que  $(u_n - \ell)$  est géométrique de raison  $a$  (une ligne suffit).
- ③ On exprime  $u_n - \ell$  en fonction de  $n$ .
- ④ On conclut :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (u_0 - \ell) a^n + \ell$

### A.4 Récurrence linéaire d'ordre 2.

**Définition :**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels,  
dire que  $(u_n)$  suit une relation de **récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** signifie qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  (fixés) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad (*)$$

**Remarque :** Une telle suite est entièrement définie par la donnée de ses deux premiers termes.

**Définition :**

Si  $(u_n)$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$  alors  
l'équation :  $x^2 = ax + b$  est appelée **équation caractéristique** de cette relation de récurrence.

**Théorème :**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels avec  $b \neq 0$  et  $(u_n)$  la suite vérifiant :

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

**Cas 1 :** Si  $x^2 = ax + b$  possède deux solutions réelles distinctes  $q_1$  et  $q_2$ ,  
alors il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

**Cas 2 :** Si  $x^2 = ax + b$  possède une unique solution réelle  $q_0$ , alors il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_0^n + \beta n q_0^n$$

**Cas 3 :** Si  $x^2 = ax + b$  possède deux racines complexes conjugués  $q = r e^{i\theta}$  et  $\bar{q} = r e^{-i\theta}$ ,  
alors il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta)$$

**En pratique :**

- ① « On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants »

- ② On donne l'équation caractéristique.
- ③ On résout l'équation caractéristique et on précise dans quel cas on se trouve.
- ④ On donne l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  à déterminer.
- ⑤ On détermine le système linéaire en  $\alpha$  et  $\beta$  avec les premières valeurs et on le résout.
- ⑥ On conclut en donnant l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .



## B

Suites  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

## B.1 Intervalle stable.

**Définition :**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ .  
Dire que " $I$  est stable par  $f$ " signifie que  $f(I) \subset I$  ( autrement dit :  $\forall x \in I, f(x) \in I$  )

**Remarque :**

pour montrer que  $I$  est stable par  $f$  le plus simple est de construire le tableau de variations de  $f$  sur  $I$ .

❶ Cela permet de justifier qu'une telle suite est bien définie.

**Proposition :**

Si  $\begin{cases} a \in I \\ I \text{ est stable par } f \end{cases}$  alors on peut définir une suite  $(u_n)$  par :  $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

**Démonstration (à savoir faire) :**

On suppose :  $\begin{cases} a \in I \\ I \text{ est stable par } f \end{cases}$

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(u_n \text{ est bien défini et } u_n \in I)$ .

- Pour  $n = 0$ , on a  $u_0$  qui est bien défini et vaut  $a$  et on a bien  $u_0 \in I$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in I$   
on sait que  $u_n \in I$ , donc on peut définir  $u_{n+1}$  par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$   
et comme  $I$  est stable par  $f$  on a :  $u_{n+1} \in I$ ,

En conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini.

(Autrement dit : La suite  $(u_n)$  est bien définie)

❷ Cela permet de démontrer que toutes les valeurs de  $(u_n)$  sont dans  $I$ .

**Proposition :**

Si  $I$  est stable par  $f$  et si :  $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

**Démonstration (à savoir faire) :**

On suppose :  $I$  est stable par  $f$  et :  $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ .

- Pour  $n = 0$ , on a bien  $u_0 \in I$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \in I$   
on sait que  $u_n \in I$ , comme  $I$  est stable par  $f$  on a :  $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ ,

En conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$

## B.2 Que dire des limites possibles de $(u_n)$ ?

**Remarque.**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle quelconque.

Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$  et si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  alors  $\ell \in [a, b]$

**En effet :** On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$  et  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ ,  
donc en passant à la limite (*inégalités larges*) on obtient :  $a \leq \ell \leq b$

**Théorème du point fixe.** (*complément*)

Soit  $f$  une fonction et  $(u_n)$  une suite bien définie, telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et si  $\underbrace{\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)}_{f \text{ continue en } \ell}$  alors  $f(\ell) = \ell$

**Démonstration :** (*à savoir refaire*)

On suppose que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et  $\underbrace{\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)}_{f \text{ continue en } \ell}$

On a d'une part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ ,

d'autre part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ .

et comme :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , on obtient en passant à la limite :  $f(\ell) = \ell$

**Remarques :**

- Les limites possibles de la suite  $(u_n)$  sont les points fixes de  $f$ .
- Les points fixes sont les abscisses des points d'intersection de  $C_f$  et de  $\Delta$ .

## B.3 Comment étudier la monotonie de $(u_n)$ ?

On commence par faire une conjecture à partir de la représentation graphique et/ou des premiers termes.

❶ **En utilisant le signe de  $f(x) - x$ .**

Pour déterminer ce signe on étudie la fonction  $x \mapsto f(x) - x$ .

**Proposition.**

- ❶ Si  $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- ❷ Si  $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \leq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$  alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**Démonstration :** (*à savoir refaire*)

❶ Supposons  $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$  et montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \in I$  et pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) - x \geq 0$ ,

on peut en déduire que  $f(u_n) - u_n \geq 0$  et ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

$(u_n)$  est croissante.

② (*Démonstration identique*).

❶ **Par un raisonnement par récurrence.**

**Proposition.** (*Hors programme, mais à connaître*)

Soit  $D$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $(u_n)$  une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

① si  $f$  est croissante sur  $D$  alors  $(u_n)$  est monotone.

② si  $f$  est décroissante sur  $D$  alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones, de sens de variations opposés.

**Démonstration :** (*à savoir refaire*)

① Supposons  $f$  est croissante sur  $D$  et que  $u_0 \leq u_1$  et montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

- Pour  $n = 0$ , on a supposé que  $u_0 \leq u_1$ ,
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \leq u_{n+1}$ ,

on sait de plus que  $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } D \\ u_n \in D \text{ et } u_{n+1} \in D \end{cases}$  on en déduit que :  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$

et ainsi :  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$  (*ce qui achève la récurrence*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ . ( $(u_n)$  est croissante)

Supposons  $f$  est décroissante sur  $D$  et que  $u_0 \geq u_1$  et montrons que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ .

- Pour  $n = 0$ , on a supposé que  $u_0 \geq u_1$ ,
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \geq u_{n+1}$ ,

on sait de plus que  $\begin{cases} f \text{ est décroissante sur } D \\ u_n \in D \text{ et } u_{n+1} \in D \end{cases}$  on en déduit que :  $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$

et ainsi :  $u_{n+1} \geq u_{n+2}$  (*ce qui achève la récurrence*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ . ( $(u_n)$  est décroissante)

En conclusion : On a bien montré que lorsque  $f$  est croissante alors la suite est monotone.

(*Elle est croissante ou décroissante*)

**Attention :** On peut avoir  $f$  croissante et  $(u_n)$  décroissante. Vous devez pouvoir donner rapidement des exemples.

② Supposons  $f$  est décroissante sur  $D$  et montrons que la suite  $(u_{2n})$  est monotone.

En notant  $(v_n)$  la suite  $(u_{2n})$ , on remarque que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ .

or  $f$  est décroissante sur  $D$  donc  $f \circ f$  est croissante sur  $D$ .

On peut appliquer la proposition ① à la suite  $(v_n)$  et ainsi :  $(v_n)$  est monotone.

$(u_{2n})$  est monotone.

Montrons maintenant que  $(u_{2n+1})$  est monotone, et de monotonie opposée de celle de  $(u_{2n})$

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2n+1} = f(u_{2n})$

et comme  $f$  est décroissante :

si  $(u_{2n})$  est croissante alors  $(u_{2n+1})$  est décroissante

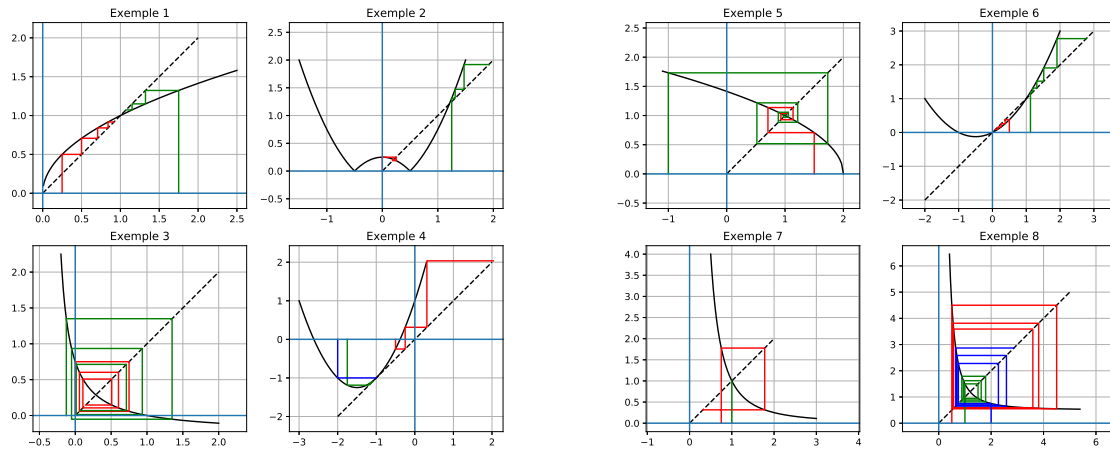
si  $(u_{2n})$  est décroissante alors  $(u_{2n+1})$  est croissante

$(u_{2n+1})$  est monotone, et de monotonie opposée de celle de  $(u_{2n})$

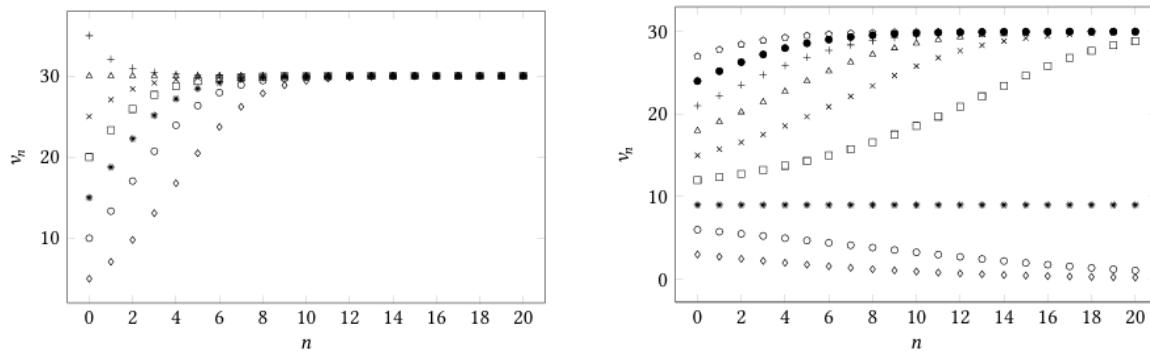
## B.4 Des représentations graphiques.

Dans ce contexte on a le choix entre deux représentations usuelles :

- ❶ On trace les segments  $(u_n, u_{n+1}) - (u_{n+1}, u_{n+1})$  et  $(u_{n+1}, u_{n+1}) - (u_{n+1}, u_{n+2})$



- ❷ On trace les points de coordonnées  $(n, u_n)$ .



# Fonctions usuelles

## Plan du chapitre

C.1	Polynômes du second degré. . . . .	165
C.2	Fonction $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{Z}^*$ . . . . .	166
C.3	Fonction valeur absolue. . . . .	167
C.4	Fonction racine carrée. . . . .	167
C.5	Exponentielle. . . . .	168
C.6	Logarithme népérien. . . . .	169
C.7	Lien entre exp et ln. . . . .	170
C.8	Logarithme décimal. . . . .	171
C.9	Fonctions cosinus et sinus. . . . .	172
C.10	Fonction tangente. . . . .	173
C.11	Fonction partie entière. . . . .	173
C.12	$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . . . . .	174
C.13	$x \mapsto a^x$ ( $a$ un réel strictement positif) . . . . .	175
C.14	Fonction racine $n$ -ième. . . . .	175
C.15	Fonction arctangente. . . . .	176
C.16	Graphes des fonctions associées. . . . .	177
C.16.1	$x \mapsto f(x) + a$ . . . . .	177
C.16.2	$x \mapsto f(a + x)$ . . . . .	177
C.16.3	$x \mapsto f(a - x)$ . . . . .	178
C.16.4	$x \mapsto f(ax)$ . . . . .	178
C.16.5	$x \mapsto af(x)$ . . . . .	178
C.17	Symétries des courbes représentatives. . . . .	179
C.17.1	Symétrie d'axe $\Delta : x = a$ . . . . .	179
C.17.2	Symétrie de centre $A(a, b)$ . . . . .	179

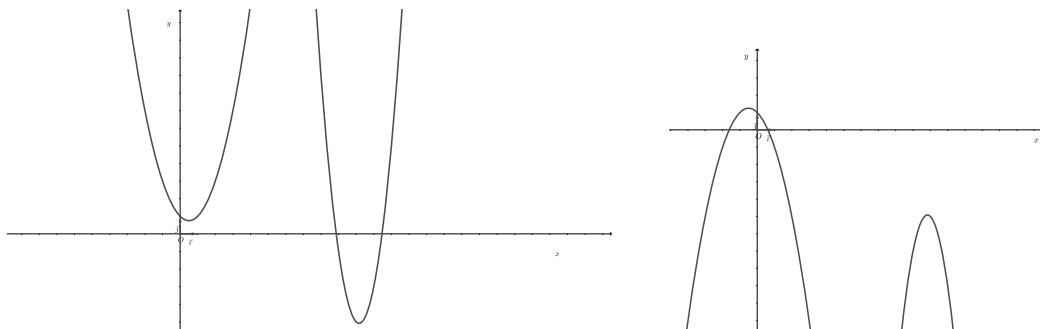
## C.1 Polynômes du second degré.

$f$  est un polynôme du second degré signifie qu'il existe des réels  $a, b, c$  avec  $a \neq 0$  tels que :

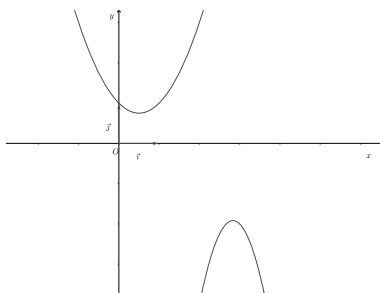
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

La représentation de ces fonctions est appelée **parabole**.

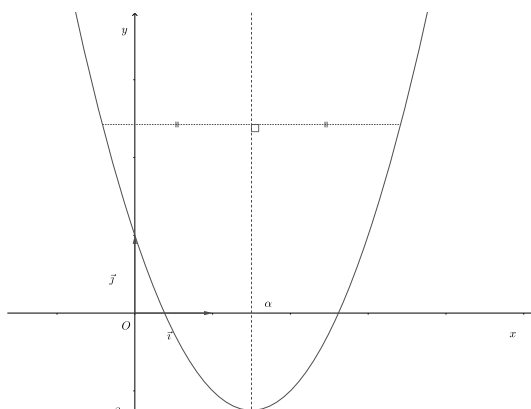
- Le signe de  $a$  donne l'allure de la parabole.



- Lorsque le polynôme n'a pas de racines réelles.



- La forme canonique donne le sommet et l'axe de symétrie.



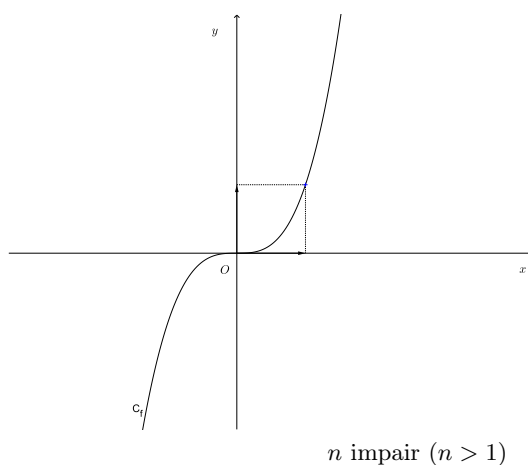
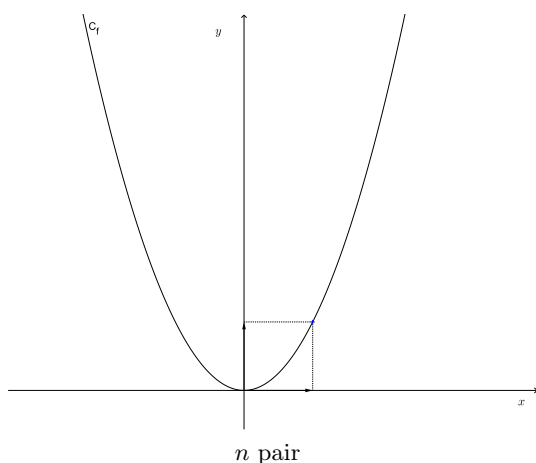
## C.2 Fonction $x \mapsto x^n$ . $n \in \mathbb{Z}^*$

- $n$  strictement positif.

La fonction  $f : x \mapsto x^n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = n x^{n-1}$

La fonction est paire quand l'entier  $n$  est pair, la fonction est impaire quand l'entier  $n$  est impair.

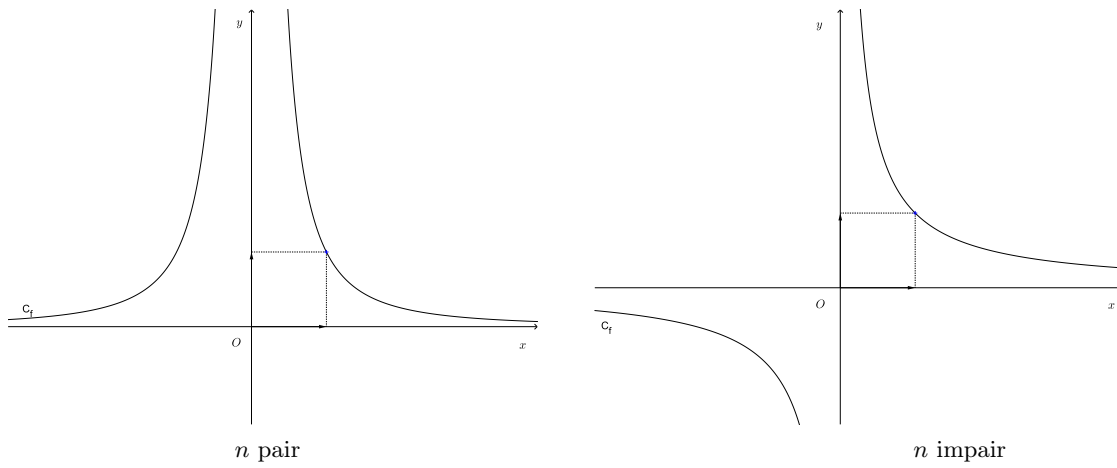


- $n$  strictement négatif.

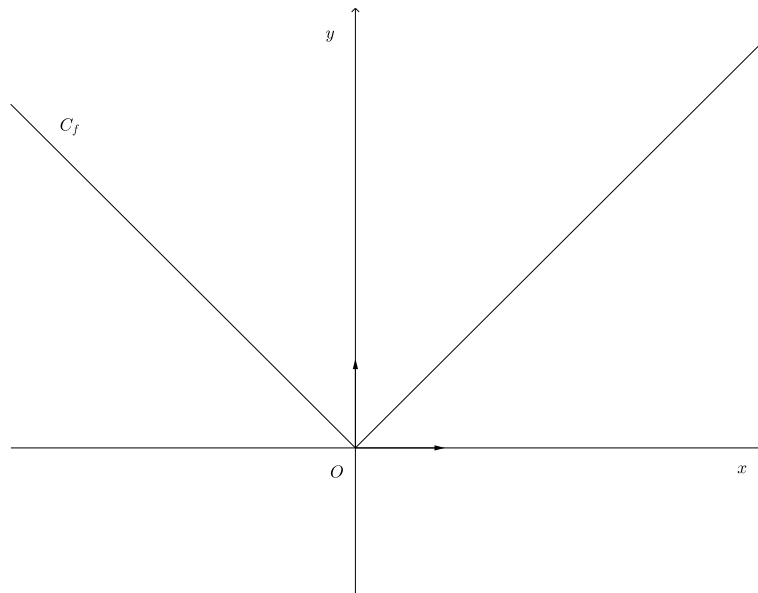
La fonction  $f : x \mapsto x^n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = n x^{n-1}$

La fonction est paire quand l'entier  $n$  est pair, la fonction est impaire quand l'entier  $n$  est impair.



### C.3 Fonction valeur absolue.



La fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 $x \mapsto |x|$

Elle est paire.

Elle n'est pas dérivable en 0.

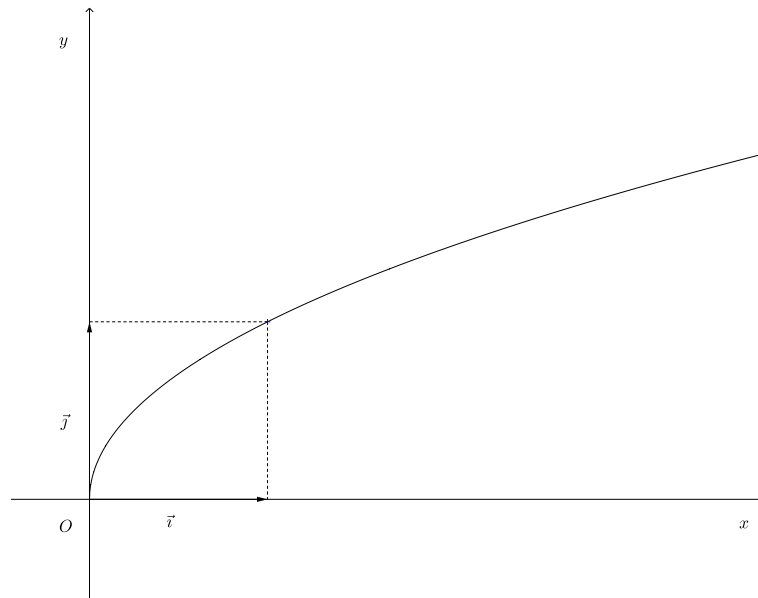
Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

### C.4 Fonction racine carrée.

La fonction  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 $x \mapsto \sqrt{x}$

Elle n'est pas dérivable en 0, sa courbe au point d'abscisse 0 possède une tangente verticale.

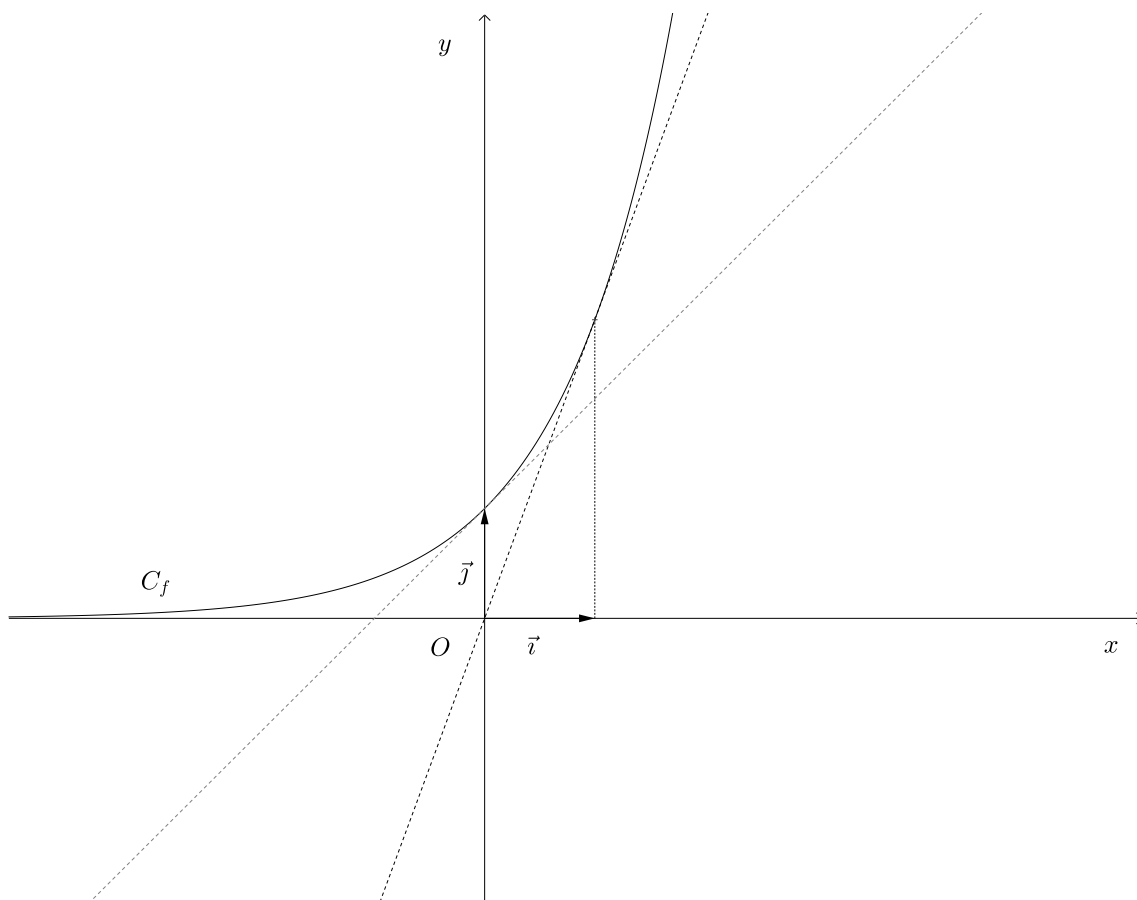
Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .



## C.5 Exponentielle.

**Définition :** la fonction exponentielle est la seule fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$



Remarque : La tangente au point de coordonnées  $(1, e)$  passe par l'origine. (*Démonstration à savoir faire*)

Cette fonction est à valeurs strictement positives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$

• **Propriétés algébriques :**

Pour tout réel  $a$  et  $b$  :

$$e^0 = 1 \quad e^{(a+b)} = e^a \times e^b \quad e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

• **Nombre dérivé en 0 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• **Croissances comparées en  $\infty$  : ( $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ )**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

• **Equations :**

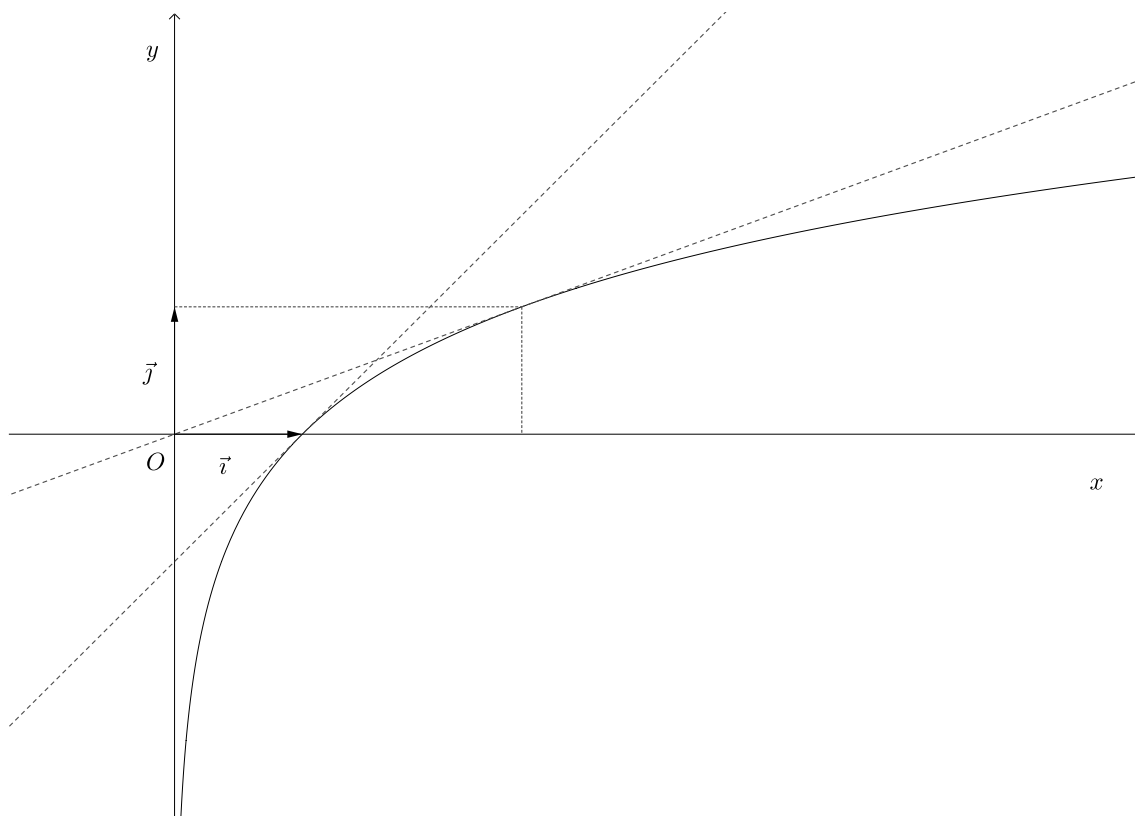
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a = e^b \iff a = b$$

• **Inéquations :**

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a < e^b \iff a < b, \quad e^a \leq e^b \iff a \leq b$$

## C.6 Logarithme népérien.

**Définition :** Pour un réel strictement positif  $x$ , on appelle logarithme népérien de  $x$ , noté  $\ln(x)$ , l'unique réel  $t$  vérifiant :  $\exp(t) = x$ .



La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est définie, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

### Propriétés algébriques :

Pour  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs,

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 & \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b) & \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) & \ln(\sqrt{a}) &= \frac{1}{2} \ln(a) & \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) &= n \ln(a) \end{aligned}$$

### • Primitive :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

C'est l'unique primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , s'annulant en 1.

### • Nombre dérivé en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

### • Croissance comparée en 0 ( $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$$

### • Croissances comparées en $+\infty$ ( $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

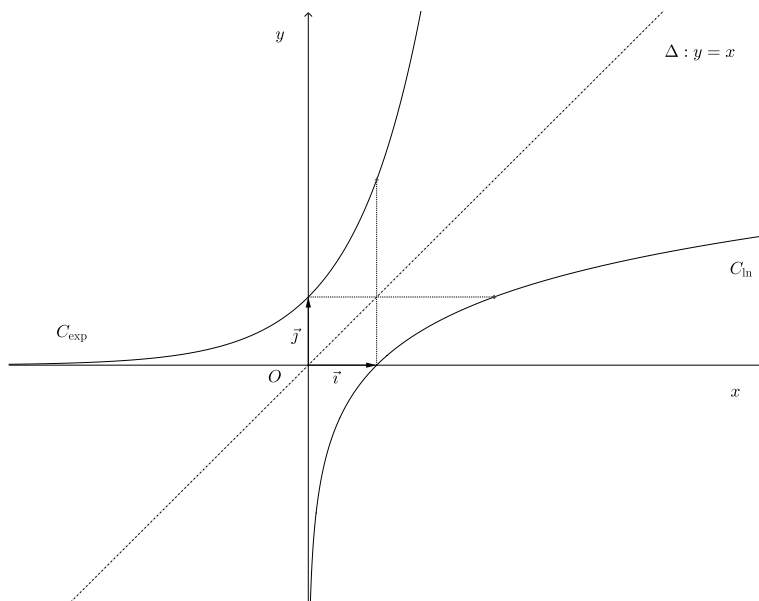
### • Equations :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

### • Inéquations :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln(a) < \ln(b) \iff a < b, \quad \ln(a) \leq \ln(b) \iff a \leq b$$

## C.7 Lien entre exp et ln.



Les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite  $\Delta: y = x$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$y = \ln(x) \iff x = e^y$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , le réel  $\ln(x)$  est par définition l'unique antécédent de  $x$  par  $\exp$  donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(x)) = x$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , le réel  $\ln(\exp(x))$  est par définition l'unique antécédent de  $\exp(x)$  par  $\exp$  donc :

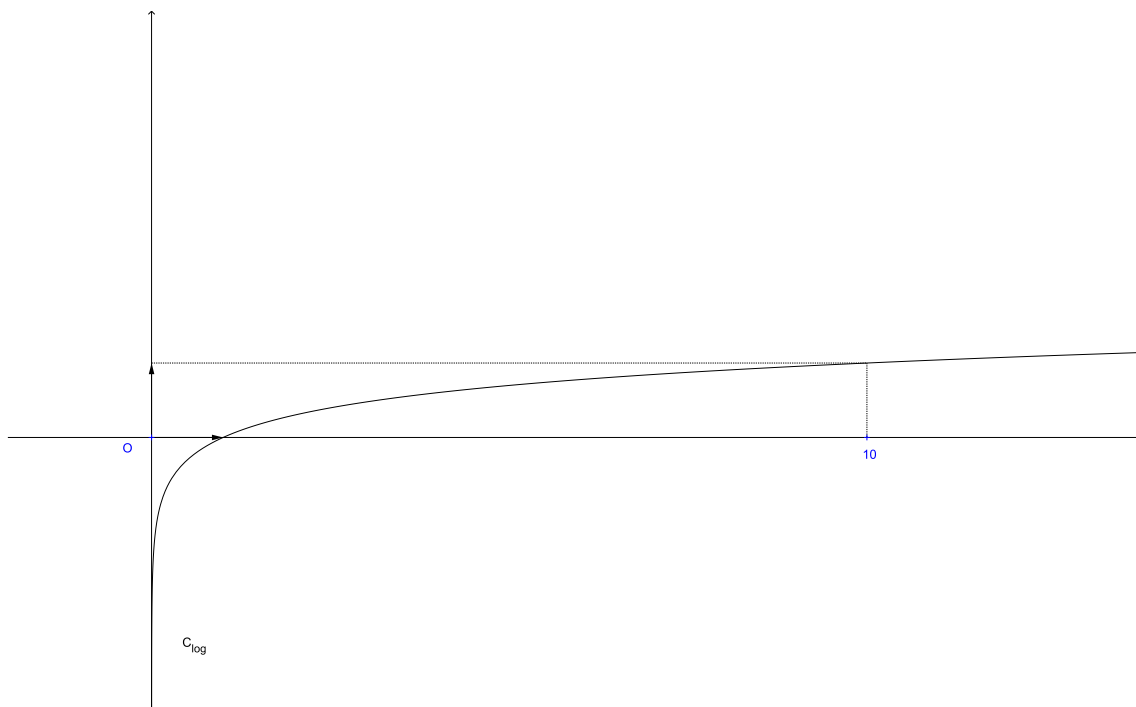
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

## C.8 Logarithme décimal.

**Définition :** Pour un réel strictement positif  $x$ , on appelle logarithme décimal de  $x$ , noté  $\log(x)$ , l'unique réel  $t$  vérifiant :  $10^t = x$ .

Il est simple de montrer :

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{aligned}$$



La fonction  $x \mapsto \log(x)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

La fonction  $\log$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x}$

**Propriétés algébriques :**

Pour  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs,

$$\log(1) = 0 \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \log(a) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \log(a^n) = n \log(a)$$

• Puissance de 10.

$$\log(10) = 1 \quad \log(10^n) = n \quad \log\left(\frac{1}{10^n}\right) = -n$$

Cette fonction est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

• Equations :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \log(a) = \log(b) \iff a = b$$

• Inéquations :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \log(a) < \log(b) \iff a < b, \quad \log(a) \leq \log(b) \iff a \leq b$$

Lien avec la fonction  $x \mapsto 10^x$  :

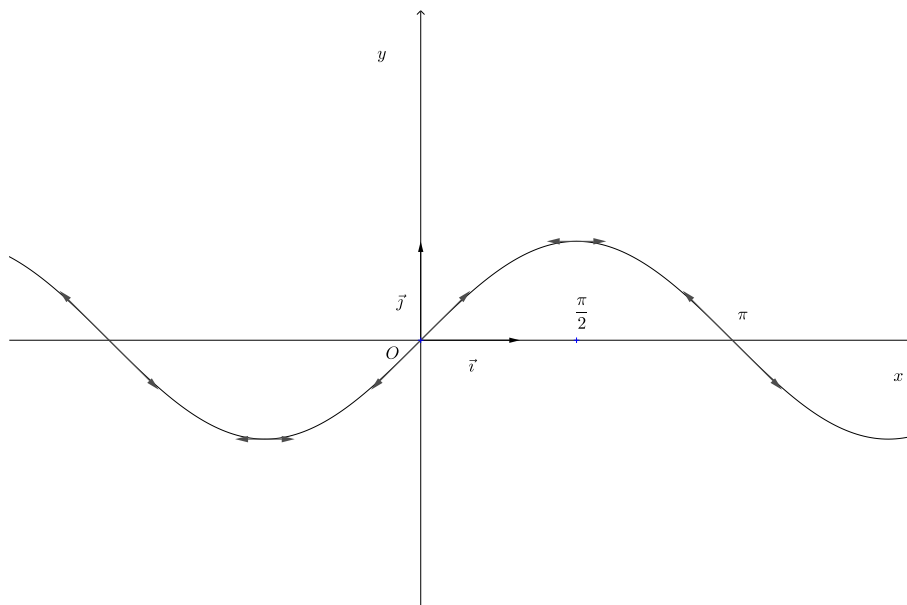
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in ]0; \infty[, \quad y = 10^x \iff x = \log(y)$$

## C.9 Fonctions cosinus et sinus.

### Fonction sinus.

La fonction sinus est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est impaire et  $2\pi$  périodique.

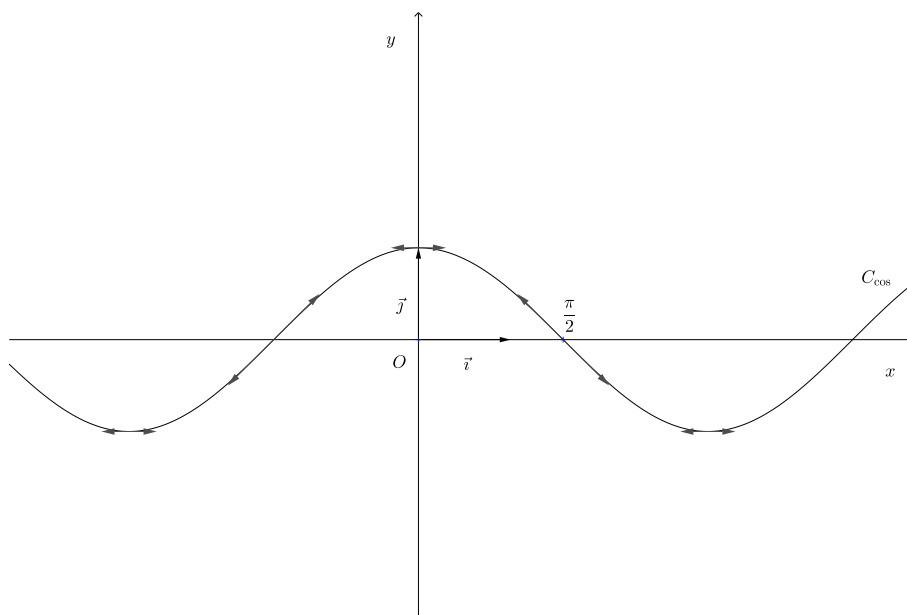
Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x)$ .



### Fonction cosinus.

La fonction cosinus est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est paire et  $2\pi$  périodique.

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x)$ .



## C.10 Fonction tangente.

La fonction tangente est définie sur :  $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

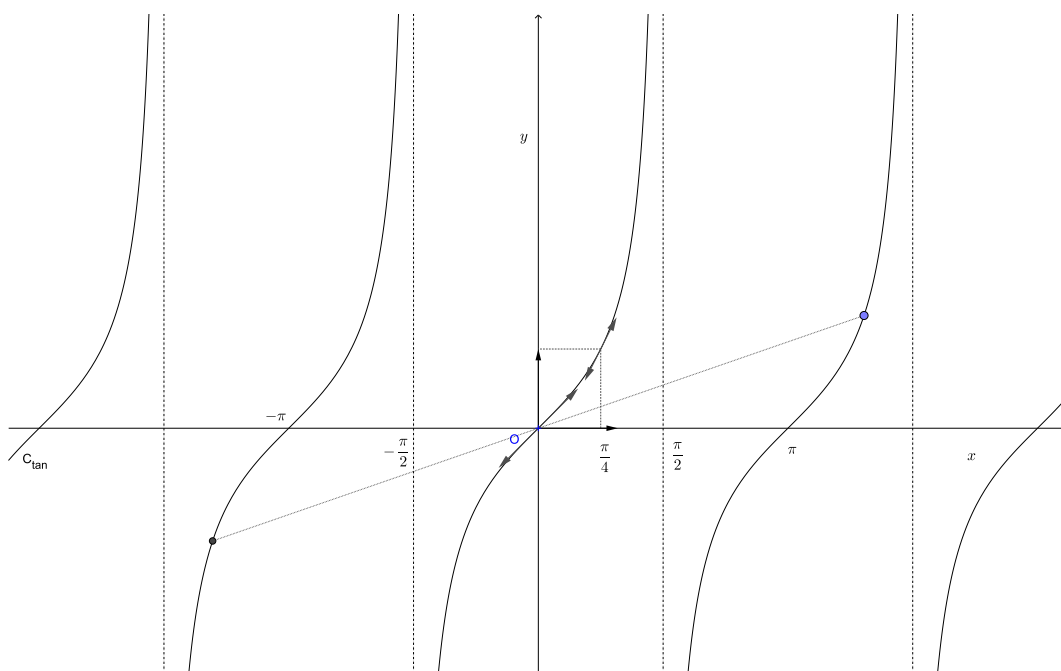
Cette fonction est continue sur  $D_{\tan}$ .

Limites :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan(x) = +\infty$$

Elle est dérivable sur  $D_{\tan}$  et  $\forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = \tan^2(x) + 1 \quad \text{ou} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .

Elle est impaire et  $\pi$ -périodique.



## C.11 Fonction partie entière.

Définition :

Soit  $x$  un réel, il existe un et un seul entier relatif  $n$  vérifiant :  $n \leq x < n + 1$   
cet entier s'appelle **la partie entière** de  $x$  et se note  $\lfloor x \rfloor$

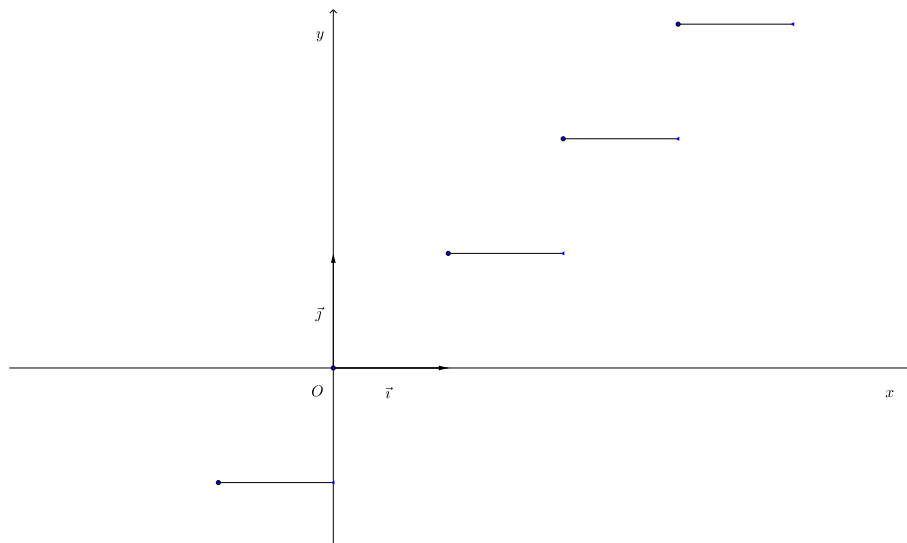
Autrement dit : "La partie entière d'un réel  $x$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ ".

Propriétés :

- ❶ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$
- ❷ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$
- ❸ La fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .



$x \mapsto [x]$  est définie sur  $\mathbb{R}$   
 $x \mapsto [x]$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et n'est pas continue sur  $\mathbb{Z}$ .  
 $x \mapsto [x]$  est constante sur tout intervalle inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

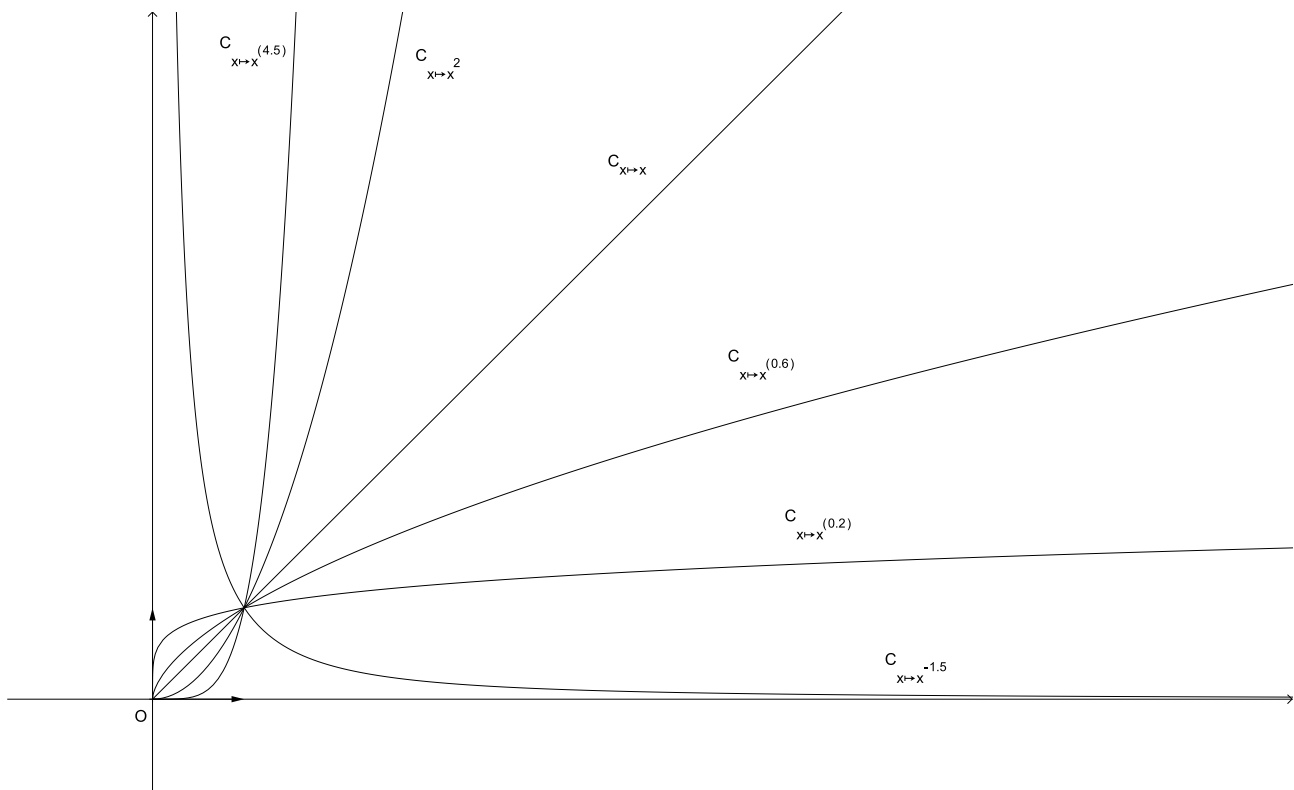
### C.12 $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

La fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée est :  $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ . (Cela se démontre facilement)

Sur la représentation suivante on peut distinguer les allures des courbes dans les trois cas suivants :

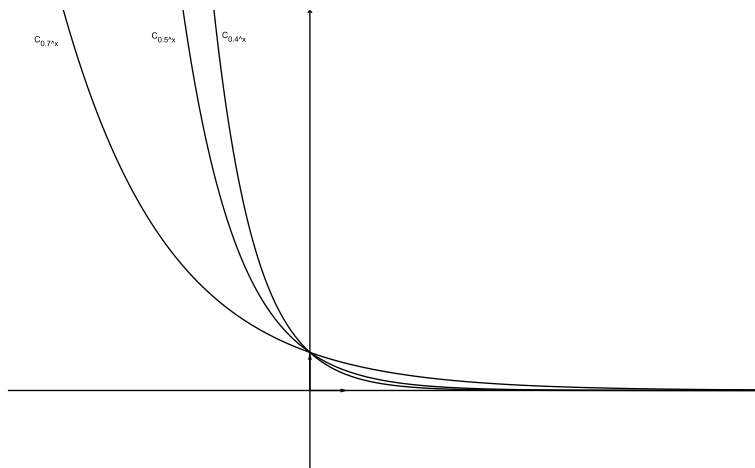
$\alpha < 0$        $0 < \alpha < 1$        $1 < \alpha$



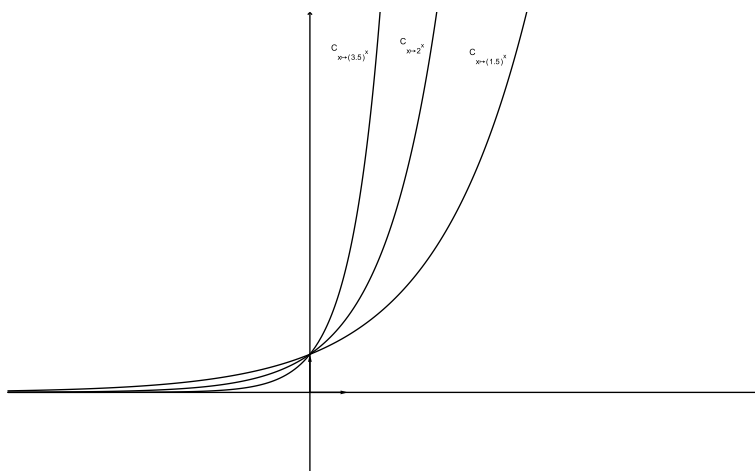
### C.13 $x \mapsto a^x$ ( $a$ un réel strictement positif)

La fonction  $x \mapsto a^x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est :  $x \mapsto \ln(a) a^x$

- Pour  $0 < a < 1$ , la fonction est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$



- Pour  $1 < a$ , la fonction est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$



### C.14 Fonction racine $n$ -ième.

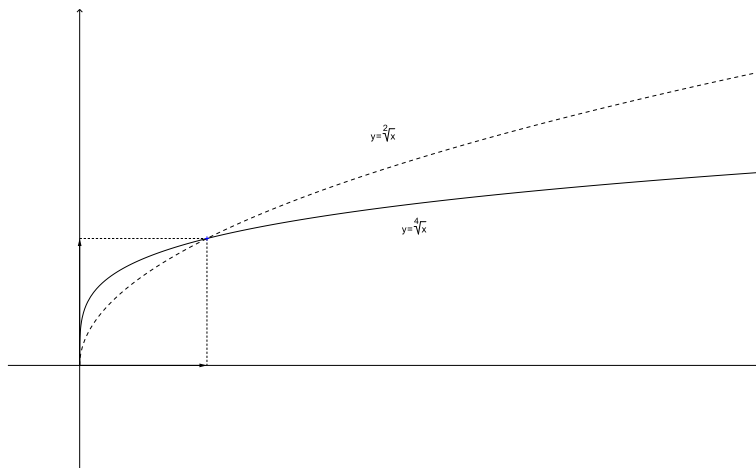
**Premier cas :**  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n$  pair.

**Définition :** On appelle racine  $n$ -ième la réciproque de l'application  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $x \mapsto x^n$

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est définie et continue sur  $[0; +\infty[$ .

Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Elle est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$



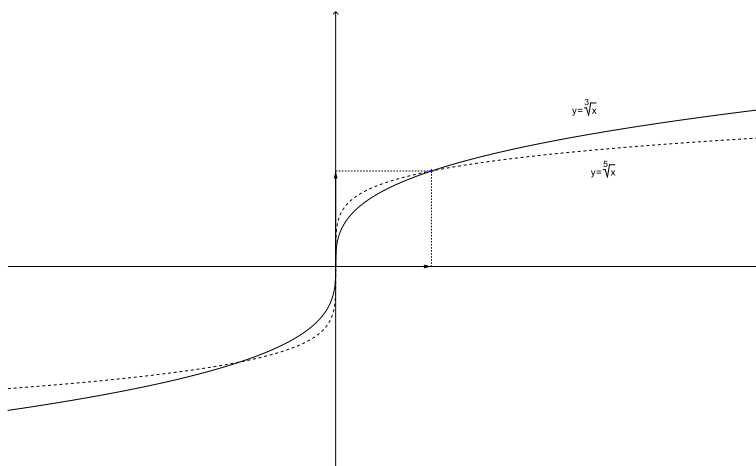
**Deuxième cas :**  $n \in \mathbb{N}$  et  $n$  impair.

**Définition :** On appelle racine  $n$ -ième la réciproque de l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $x \mapsto x^n$

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est impaire.

Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ .



### C.15 Fonction arctangente.

**Définition :** On appelle arctangente la réciproque de l'application  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $x \mapsto \tan(x)$

**Autrement dit :**

arctan est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et qui associe à tout réel  $x$ , l'unique réel  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vérifiant  $\tan(\theta) = x$

**Propriétés :**

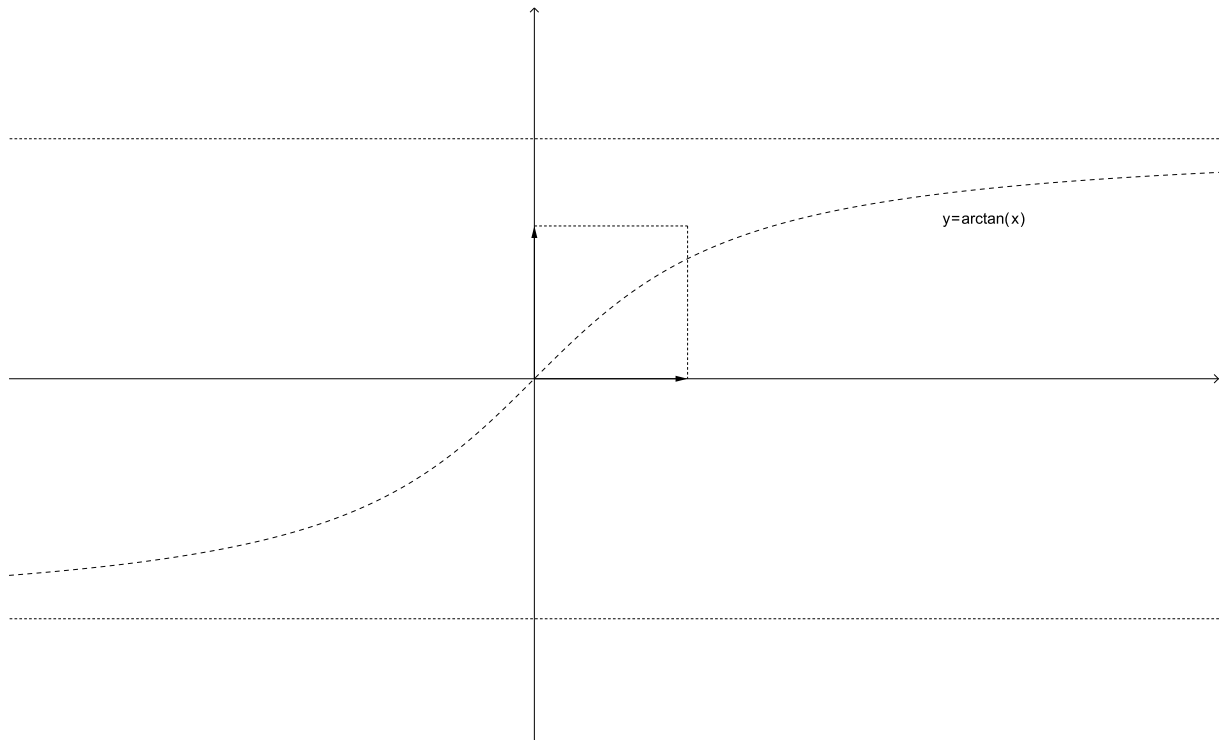
- $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$
- La fonction arctangente est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

- Elle est dérivable et sa dérivée est la fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

- Elle est strictement croissante et impaire.

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\arctan(x)) = x$
- Pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $\arctan(\tan(x)) = x$



## C.16 Graphes des fonctions associées.

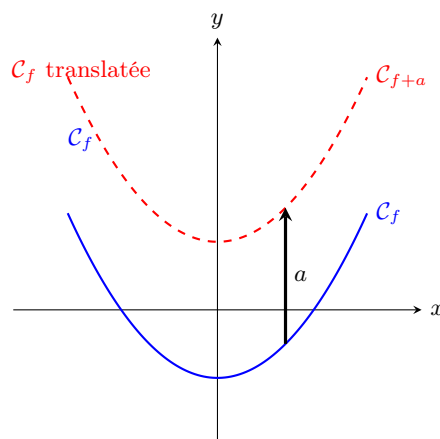
On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

### C.16.1 $x \mapsto f(x) + a$

La courbe de la fonction  $x \mapsto f(x) + a$  s'obtient en effectuant une **translation verticale** de  $\mathcal{C}_f$ .

**Transformation :** translation de vecteur  $(0, a)$ .

**Interprétation :** on ajoute  $a$  à toutes les ordonnées.



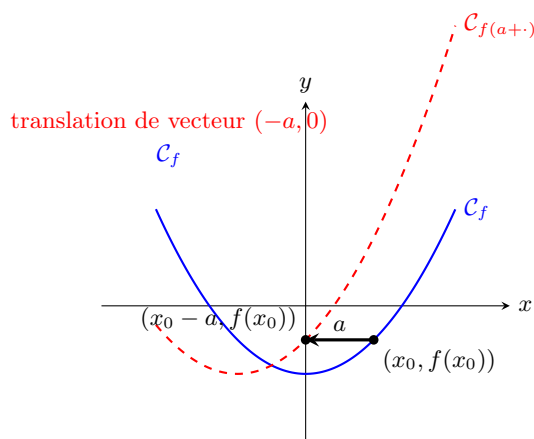
### C.16.2 $x \mapsto f(a + x)$

La courbe de la fonction  $x \mapsto f(a + x)$  s'obtient en effectuant une **translation horizontale** de  $\mathcal{C}_f$ .

**Transformation :** translation de vecteur  $(-a, 0)$ .

**Interprétation :** on remplace chaque abscisse  $x$  par  $x - a$  sur la courbe.

**Point important :** un point  $(x_0, f(x_0))$  de  $\mathcal{C}_f$  devient le point  $(x_0 - a, f(x_0))$ .



### C.16.3 $x \mapsto f(a - x)$

La courbe de la fonction  $x \mapsto f(a - x)$  s'obtient en effectuant une **symétrie par rapport à la droite  $\Delta : x = \frac{a}{2}$** .

**Méthode :**

- on remplace  $x$  par  $-x$  : symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
- puis on translate de vecteur  $(a, 0)$ .

**Transformation :** symétrie d'axe  $x = \frac{a}{2}$ .

### C.16.4 $x \mapsto f(ax)$

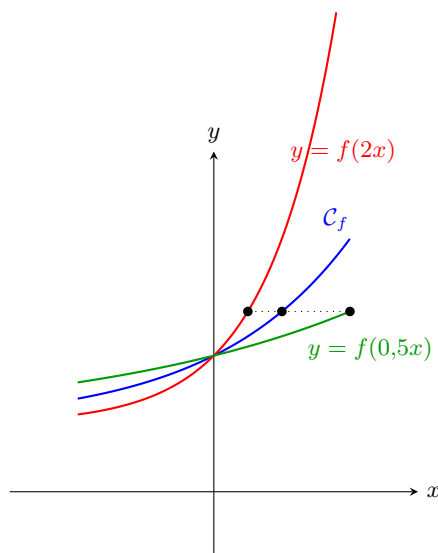
La courbe de la fonction  $x \mapsto f(ax)$  s'obtient par une **transformation horizontale**.

**Résultat :**

- si  $a > 1$  : **compression horizontale** ;
- si  $0 < a < 1$  : **étirement horizontal**.

**Interprétation :** les abscisses sont divisées par  $a$ .

**Point important :** un point  $(x_0, f(x_0))$  devient  $(\frac{x_0}{a}, f(x_0))$ .



### C.16.5 $x \mapsto af(x)$

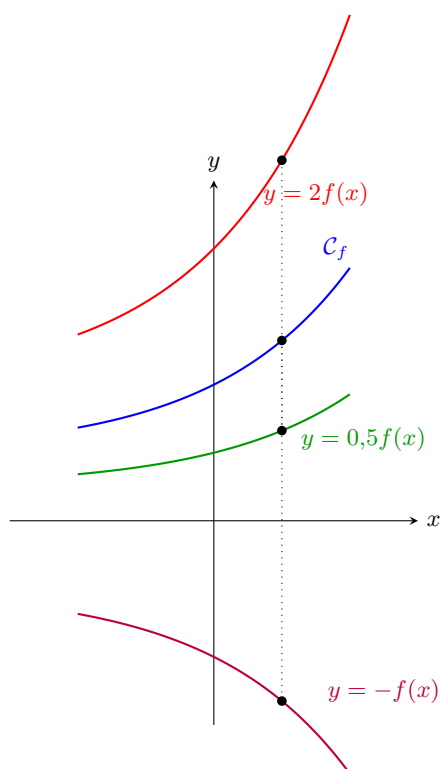
La courbe de la fonction  $x \mapsto af(x)$  s'obtient par une **transformation verticale**.

**Résultat :**

- si  $|a| > 1$  : **étirement vertical** ;
- si  $0 < |a| < 1$  : **compression verticale** ;

— si  $a = -1$  : symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

**Interprétation :** les ordonnées sont multipliées par  $a$ .



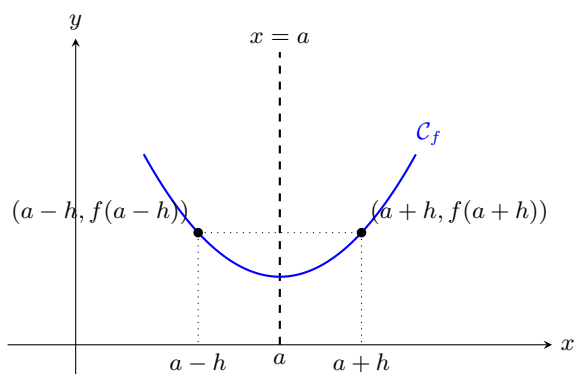
## C.17 Symétries des courbes représentatives.

### C.17.1 Symétrie d'axe $\Delta : x = a$

La courbe  $C_f$  admet la droite  $\Delta : x = a$  comme axe de symétrie si, et seulement si,

$$f(a+h) = f(a-h) \text{ pour tout } h \text{ tel que } a+h \text{ et } a-h \text{ appartiennent au domaine.}$$

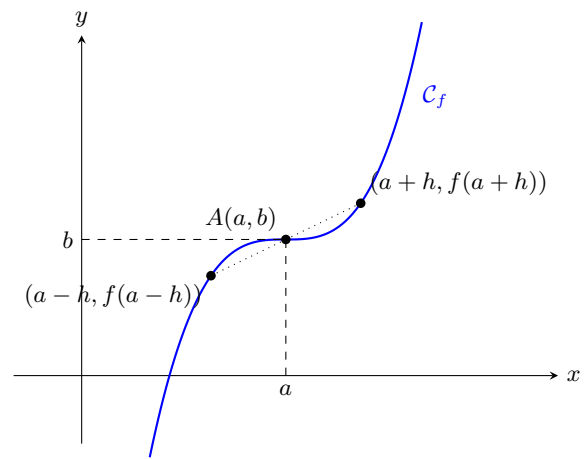
**Conséquence graphique :** les points  $(a+h, f(a+h))$  et  $(a-h, f(a-h))$  sont symétriques.



### C.17.2 Symétrie de centre $A(a, b)$

La courbe  $C_f$  admet le point  $A(a, b)$  comme centre de symétrie si, et seulement si,

$$f(a+h) + f(a-h) = 2b$$



# Fonctions à valeurs complexes

(En cours de rédaction)

## Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes.

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

on note  $u$  et  $v$  les deux fonctions définies sur  $I$  par  $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$  et  $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$  de sorte que

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

### Définitions.

Dire que  $f$  est continue sur  $I$  signifie que  $u$  et  $v$  sont continues sur  $I$ .

Dire que  $f$  est dérivable sur  $I$  signifie que  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$

et alors on définit la fonction  $f'$  sur  $I$  par :  $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$

Dire que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  signifie que  $F$  est dérivable sur  $I$  et que  $F' = f$ .

## Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

on note  $u$   $v$  les deux fonctions à valeurs réelles de sorte que :  $f = u + iv$

### Définition.

L'intégrale de  $f$  de  $a$  à  $b$  est le nombre complexe :

$$\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

On remarquera que toute fonction  $f$  continue sur  $I$  admet au moins une primitive  $F$  sur  $I$

et que pour tout  $(a, b) \in I^2$ ,  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

-----  
Extrait d'un DM.

### Partie A : Etude de la fonction $t \mapsto e^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $m = a + ib$  et  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = e^{mt}$

1. Déterminer pour chaque réel  $t$  la forme algébrique de  $f(t)$ .
2. Justifier que  $f$  est dérivable et calculer pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t)$ .
3. Démontrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = mf(t)$ .
4. En déduire, lorsque  $m \neq 0$ , une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B : Calculs d'intégrales.

On cherche par deux méthodes à calculer l'intégrale :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin(2x) dx$

1. (a) Montrer avec une double intégration par parties que :  $I = 2(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) - 4I$   
(b) En déduire la valeur de  $I$ .

2. (a) Calculer l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} e^{2ix} dx$  (on écrira le résultat sous forme algébrique)  
(b) En déduire la valeur de  $I$ .

**Partie C : Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle.**

On cherche par deux méthodes à déterminer une solution particulière de l'équation :

$$(E) : y'' + 2y' + 3y = 4 \cos(2t)$$

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$

1. Calculer pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit solution de  $(E)$ .
3. En déduire une solution de  $(E)$ . on notera  $f_p$  cette solution.
4. Déterminer deux réels  $A \geq 0$  et  $\varphi \in ]-\pi; \pi]$  tels que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f_p(t) = A \cos(2t + \varphi)$

# Fonctions polynomiales.

## Plan du chapitre

E.1	Généralités. . . . .	183
E.1.1	Définitions et notation. . . . .	183
E.1.2	Identification des coefficients. . . . .	183
E.1.3	Vocabulaire. . . . .	184
E.1.4	Opérations. . . . .	184
E.1.5	Dérivée . . . . .	184
E.1.6	Degré. . . . .	185
E.1.7	Intégrité . . . . .	185
E.2	Racine d'une fonction polynômiale. . . . .	185
E.2.1	Définition. . . . .	185
E.2.2	Racines et factorisation. . . . .	185
E.2.3	Nombres de racines d'un polynôme. . . . .	186
E.2.4	Ordre de multiplicité. . . . .	186
E.2.5	Lien entre dérivée et racines multiples. . . . .	186
E.2.6	Fonction polynomiale de degré impair . . . . .	186

## E.1 Généralités.

### E.1.1 Définitions et notation.

#### Définition

On appelle fonction polynomiale réelle toute application  $P$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  
il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  et  $n + 1$  réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

Cette application sera notée :  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et on note  $\mathbb{R}[x]$  l'ensemble des fonctions polynomiales réelles.

### E.1.2 Identification des coefficients.

#### Lemme :

Soient  $n$  un entier naturel et  $n + 1$  réels :  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .  
Si  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$  alors  $\forall k \in [0; n], a_k = 0$

#### Conséquence :

Une fonction polynomiale  $P$  est non nul si, et seulement si,  
il peut s'écrire :  $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  avec  $a_n \neq 0$

**Théorème :** (*Identification des coefficients*)

Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[x]$  non nuls avec :

$$\begin{cases} P : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n & \text{avec } a_n \neq 0 \\ Q : x \mapsto b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m & \text{avec } b_m \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{On a l'équivalence suivante : } P = Q \iff \begin{cases} n = m \\ \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = b_k \end{cases}$$

### E.1.3 Vocabulaire.

Pour  $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  avec  $a_n \neq 0$

On dit que la fonction polynômiale  $P$  est sous sa **forme développée réduite**.

- $x \mapsto a_nx^n$  est le monôme dominant de  $P$ .
- $n$  le degré de  $P$ .
- $a_n$  le coefficient dominant.
- $x \mapsto a_kx^k$  est le monôme d'ordre  $k$  de  $P$ . (ou de degré  $k$ )
- $a_k$  le coefficient d'ordre  $k$  de  $P$ . (ou de degré  $k$ )
- $a_0$  est le terme constant.

Dire qu'une fonction polynômiale est **unitaire**, signifie que son terme dominant vaut 1.

### E.1.4 Opérations.

La somme, produit et composée de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

$$\text{Si } (P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2 \text{ alors } P + Q \in \mathbb{R}[x], P \times Q \in \mathbb{R}[x] \text{ et } P \circ Q \in \mathbb{R}[x]$$

**Propriétés :** (de la somme et du produit)

Soient  $P, Q$  et  $R$  trois éléments de  $\mathbb{R}[x]$ , on a alors :

1.  $0 + P = P, P + Q = Q + P, (P + Q) + R = P + (Q + R)$
2.  $P \times 1 = P, P \times Q = Q \times P, P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$
3.  $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$

**Proposition.**

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

- ① Le produit de  $m$  fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.
- ② Si  $P \in \mathbb{R}[x]$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  alors  $P^m \in \mathbb{R}[x]$

**Complément :** Coefficients du produit de deux polynômes.

Soient  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_kx^k$  et  $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^m b_kx^k$

:

$$P(X) \times Q(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right)}_{\text{coefficients de } P \times Q} X^k$$

### E.1.5 Dérivée

**Proposition.**

La dérivée d'une fonction polynômiale est une fonction polynômiale.

**Remarque :**

$$\text{Si } P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_kx^k \text{ alors } P' : x \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \text{ ou encore : } P' : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

**E.1.6 Degré.****Définition :**

Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$ ,  
 si  $P = 0$  alors  $\deg(P) = -\infty$   
 si  $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  avec  $a_n \neq 0$  alors  $\deg(P) = n$

**Théorème :**

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynomiales.

- ❶  $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$
- ❷  $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- ❸ Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(P^m) = m \deg(P)$
- ❹ Si  $\deg(P) \geq 1$  alors  $\deg(P') = \deg(P) - 1$

**Démonstration.** *Faite en deuxième année et dans  $\mathbb{C}[X]$ .***E.1.7 Intégrité****Théorème :** *Intégrité.*

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynômes,  
 $P \times Q = 0 \iff P = 0$  ou  $Q = 0$

**Démonstration.** *Faite en deuxième année et dans  $\mathbb{C}[X]$ .***E.2 Racine d'une fonction polynôme.****E.2.1 Définition.****Définition** (*Racine de  $P$* ) :

Soient  $P \in \mathbb{R}[x]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  
 Dire que  $\alpha$  est une racine de  $P$  signifie que :  $P(\alpha) = 0$

**E.2.2 Racines et factorisation.****Lemme :**

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  
 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists Q_k \in \mathbb{R}[x] : \forall x \in \mathbb{R}, x^k - \alpha^k = (x - \alpha) Q_k(x)$

**Démonstration.** *Faite en deuxième année et dans  $\mathbb{C}[X]$ .***Théorème :**

Soient  $P \in \mathbb{R}[x]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  
 $P(\alpha) = 0$  si, et seulement si, il existe  $Q \in \mathbb{R}[x]$  tel que  $P : x \mapsto (x - \alpha)Q(x)$

**Démonstration.** *Faite en deuxième année et dans  $\mathbb{C}[X]$ .***Théorème :**

Soient  $P$  une fonction polynôme et  $k$  un entier naturel non nul,  
 Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont  $k$  **racines distinctes** de  $P$  alors  
 $\exists Q \in \mathbb{R}[x] : P : x \mapsto (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x)$

**Corollaire :**

Soient  $P$  une fonction polynôme et  $n$  un entier naturel non nul,  
 Si  $P$  est de degré  $n$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont  $n$  **racines distinctes** de  $P$  alors  
 $\exists \lambda \in \mathbb{R} : P : x \mapsto \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$

**E.2.3 Nombres de racines d'un polynôme.**

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynomiales et  $n$  un entier naturel.

- (1) Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont  $n$  racines **distinctes** de  $P$  et si  $\deg(P) = n$ ,  
alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$ ,
- (2) Si  $P$  est de degré  $n$  (*Ce qui impose  $P \neq 0$* ), alors  $P$  a au plus  $n$  racines **distinctes**.
- (3) Si  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $n$  et si  $P$  a  $(n + 1)$  racines **distinctes**, alors  $P = 0$ .
- (4) La seule fonction polynomiale ayant une infinité de racines est la fonction nulle.

**E.2.4 Ordre de multiplicité.**

**Définition :**

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $P$  une fonction polynomiale non nulle et  $m$  un entier naturel non nul.  
Dire que  $\alpha$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$   
signifie qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[x]$  tel que :  
$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

**E.2.5 Lien entre dérivée et racines multiples.**

**Théorème :**

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[x]$ ,  
 $\alpha$  est une racine multiple de  $P$ , si et seulement si,  $P(\alpha) = 0$  et  $P'(\alpha) = 0$ .

**Démonstration.**

Raisonnons par double implication :

$\Rightarrow$  Supposons que  $P : x \mapsto P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$  avec  $Q \in \mathbb{R}[x]$ .

(on suppose que  $\alpha$  est une racine multiple)

on a d'une part  $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)^2 Q(\alpha) = 0$  donc  $P(\alpha) = 0$

on a d'autre part pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x)$  d'où  $P'(\alpha) = 0$  ■

$\Leftarrow$  Supposons que  $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ .

- $P(\alpha) = 0$  donc il existe  $R \in \mathbb{R}[x]$  tel que  $P(x) = (x - \alpha)R(x)$  on en déduit que :  
 $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = R(x) + (x - \alpha)R'(x)$  ce qui entraîne que :  $P'(\alpha) = R(\alpha)$ ,
- $P'(\alpha) = 0$  donc  $R(\alpha) = 0$  et ainsi  $R : x \mapsto (x - \alpha)Q(x)$  avec  $Q \in \mathbb{R}[x]$ ,  
on en déduit qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[x]$  tel que :  $P : x \mapsto (x - \alpha)^2 Q(x)$ ,  
autrement dit :  $\alpha$  est une racine multiple de  $P$ . ■

Une racine  $\alpha$  d'un polynôme  $P$  est une racine multiple si, et seulement si,  $P'(\alpha) = 0$

**E.2.6 Fonction polynomiale de degré impair**

**Théorème :**

Soit  $P$  une fonction polynomiale réelle,  
Si le degré de  $P$  est un entier impair alors  $P$  a au moins une racine réelle.

**Démonstration.**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme tel que  $n$  est impaire et  $a_n \neq 0$

On note :  $f$  la fonction  $x \mapsto P(x)$ .

Discutons suivant le signe de  $a_n$  :

- si  $a_n > 0$ , on a :  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
donc (*Th. des valeurs intermédiaires*)  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$
- si  $a_n < 0$ , on a :  $\lim_{-\infty} f = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = -\infty$  et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
donc (TVI)  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$

Dans tous les cas, il existe un réel  $x$ , tel que :  $P(x) = 0$

# Développements limités

## Plan du chapitre

F.1	Définition, notation, unicité. . . . .	187
F.2	Troncature. . . . .	188
F.3	Lien avec les équivalents. . . . .	188
F.4	Formule de Taylor-Young. . . . .	188
F.5	DL usuels en 0. . . . .	188
F.6	Sommes et produits. . . . .	189
F.7	Primitivation d'un DL. . . . .	189
F.8	Lien avec la régularité de $f$ . . . . .	189

## F.1 Définition, notation, unicité.

$I$  est un intervalle non trivial tel que  $0$  est un élément de  $I$  ou  $0$  est une borne de  $I$ ,

**Définition :**

Soit  $n$  un entier naturel et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  
Dire que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$  signifie qu'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et une fonction  $\varepsilon$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \varepsilon(x)x^n \quad \text{et} \quad \lim_0 \varepsilon = 0$$

**Notation :**

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

**Précision :**  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$  signifie  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$  et se lit " $f(x)$  négligeable  $x^n$ ".

**Théorème (unicité)**

Le polynôme associé au développement limité d'ordre  $n$  est unique.

**Démonstration.**

Supposons qu'il existe deux polynômes  $P$  et  $Q$  tels que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$

Alors  $P(x) - Q(x) = o(x^n)$  avec  $P - Q$  un polynôme de degré au plus  $n$ .

S'il n'est pas nul, il existe  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $\lambda \neq 0$  tels que :  $P(x) - Q(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \lambda x^k$ , donc  $\frac{P(x) - Q(x)}{x^k} \rightarrow \lambda \neq 0$ , ce qui contredit  $P(x) - Q(x) = o(x^n)$ , ainsi  $P = Q$ . □

**Vocabulaire :** Ce polynôme est appelé *partie régulière* du  $DL_n(0)$ .

**Attention :** Deux fonctions distinctes peuvent avoir la même partie régulière d'ordre  $n$ .

## F.2 Troncature.

**Proposition :**

Soit  $N$  et  $n$  deux entiers naturels.

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^N a_k x^k + o(x^N) \text{ et } n \leq N \text{ alors } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

**En effet.**  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \underbrace{a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_N x^N + o(x^N)}_{=o(x^n)}$

## F.3 Lien avec les équivalents.

**Théorème :**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}^*$  (attention  $a \neq 0$ ),

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a x^n + o(x^n) \text{ si, et seulement si, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a x^n$$

**En effet.**  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a x^n + o(x^n) \iff \frac{f(x) - a x^n}{x^n} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \iff \frac{f(x) - a x^n}{a x^n} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \iff \frac{f(x)}{a x^n} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$

## F.4 Formule de Taylor-Young.

**Théorème :**

Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  alors  $f$  admet un  $DL_n(0)$  et

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

**Démonstration.** (*admis*)

## F.5 DL usuels en 0.

(*A connaître*)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

**En effet :** Il suffit d'appliquer le théorème de Taylor-Young.

## F.6 Sommes et produits.

Si  $\begin{cases} f(x) = P(x) + o(x^n) \\ g(x) = Q(x) + o(x^n) \end{cases}$  (On a des DL de  $f$  et  $g$  au même ordre en 0)

❶ alors  $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + o(x^n)$   
pour une combinaison linéaire il suffit de faire la combinaison linéaire des parties régulières.

❷ alors  $(f \times g)(x) = R(x) + o(x^n)$   
où  $R$  est le polynôme obtenu en conservant les termes  $\leq n$  de  $P \times Q$   
pour le produit on multiplie les parties régulières et on tronque à l'ordre  $n$ .

❸ alors pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^m(x) = R(x) + o(x^n)$   
où  $R$  est le polynôme obtenu en conservant les termes  $\leq n$  de  $P^m$

**En pratique (pour faire simple) :**

Pour obtenir un  $DL_n$  d'une expression formée de sommes et de produits on change tout par des DL d'ordre  $n$ .

## F.7 Primitivation d'un DL.

Ici  $I$  est un intervalle non trivial contenant 0.

**Théorème :**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Si } f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{alors} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

**Démonstration.** (admis)

## F.8 Lien avec la régularité de $f$ .

**Théorème :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $0 \in I$ .

$$f \text{ est dérivable en } 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x)$$

$$\text{et on a alors : } a_0 = f(0) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(0).$$

**Autrement dit :**  $f$  est dérivable en 0 si, et seulement si,  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

**Démonstration.**

☞ Si  $f$  est dérivable en 0, alors  $\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} f'(0)$ , donc  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ ,

$$\text{d'où } f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

☚ Si  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x)$ , on note  $f(x) = a_0 + a_1 x + \varepsilon(x)x$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} a_0$  donc  $a_0 = f(0)$ ,

$$\text{et } \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + \varepsilon(x)x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} a_1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = a_1.$$

□



# Raisonnements. Rédaction.

## Plan du chapitre

G.1	Pour montrer $A = B$ . . . . .	191
G.2	Démontrer une implication. . . . .	192
G.3	Démontrer une équivalence. . . . .	192
G.4	Raisonnement par disjonction des cas. . . . .	193
G.5	Raisonnement par contraposée. . . . .	193
G.6	Raisonnement par l'absurde. . . . .	193
G.7	Raisonnement par analyse-synthèse. . . . .	193
G.8	Résoudre une équation. . . . .	194

### G.1 Pour montrer $A = B$

- ① on montre souvent  $A \subset B$  et  $B \subset A$ . ("*Raisonnement par double inclusion*")
- ② on aussi raisonner par équivalence en montrant :  $\forall x \in E, x \in A \iff x \in B$

#### Rédaction type pour ① .

$\subset$	Prenons un élément $x$ de $A$ .	...donc ...	donc $x \in B$	■
$\supset$	Prenons un élément $x$ de $B$ ,	...donc ...	donc $x \in A$	■
En conclusion :		$A = B$		

Dans les cas les plus simples on peut raisonner par équivalence en s'appuyant sur la remarque suivante :

$$\text{Si } P \iff Q \text{ et } Q \iff R \text{ alors } P \iff R$$

#### Rédaction type pour ② .

Prenons un  $x \in E$  quelconque fixé, (*ici on ne suppose rien*)  
(*c'est ce que signifie la phrase " Soit  $x \in E$ ,"*)

$x \in A$	$\iff$	...
	$\iff$	...
	$\iff$	$x \in B$

■

En conclusion :  $A = B$

Pour montrer : " $A \not\subset B$ ".

<p>En prenant <math>x_0</math> (un élément particulier de <math>E</math>), on a <math>x_0 \in A</math> et <math>x_0 \notin B</math>.</p> <p style="text-align: right;">donc <math>A \not\subset B</math> ■</p> <p>En conclusion : <span style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>A \not\subset B</math></span></p>
---

## G.2 Démontrer une implication.

Beaucoup de propositions peuvent s'écrire :  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$ .

Autrement dit : "Quel que soit l'objet  $x$ , **Si**  $x$  vérifie  $P(x)$  **alors**  $x$  vérifie  $Q(x)$ ."

**Rédaction type.**

Le principe général de cette rédaction :

<p>Prenons un élément <math>x</math> de <math>E</math> et supposons <math>P(x)</math> vraie. ( C'est ce que signifie la phrase : "Soit <math>x \in E</math>, tel que <math>P(x)</math>." ) on raisonne ensuite par déductions successives pour montrer que <math>Q(x)</math> est vraie.</p>
---

Pour montrer que " $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$ " est fausse, on donne un **contre-exemple**.

**Rédaction type :**

<p>En prenant <math>x_0</math> (un élément particulier de <math>E</math>) on a <math>P(x_0)</math> est vraie et <math>Q(x_0)</math> est fausse.</p> <p style="text-align: right;">■</p> <p>En conclusion : <span style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">L'affirmation : <math>\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)</math> est fausse</span></p>
---

## G.3 Démontrer une équivalence.

Souvent pour montrer une équivalence, on raisonne par double implication.

- Pour démontrer  $\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)$ ,  
on démontre  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$  et  $\forall x \in E, Q(x) \implies P(x)$ .

**Rédaction type.**

<p><span style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>\implies</math></span> Prenons un élément <math>x</math> de <math>E</math> et supposons <math>P(x)</math> vraie. ...donc ... donc <math>Q(x)</math> (est vraie) ■</p> <p><span style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>\impliedby</math></span> Prenons un élément <math>x</math> de <math>E</math> et supposons <math>Q(x)</math> vraie. ...donc ... donc <math>P(x)</math> (est vraie) ■</p> <p>En conclusion : <span style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)</math></span></p>
--

- Dans les cas les plus simples on peut raisonner par équivalence en s'appuyant sur la remarque suivante :

$$\text{Si } P \iff Q \text{ et } Q \iff R \text{ alors } P \iff R$$

**Rédaction type.**

Prenons un  $x \in E$  quelconque fixé, (*ici on ne suppose rien*)  
*(c'est ce que signifie la phrase " Soit  $x \in E$ ," )*

$$P(x) \iff \dots$$

$$\iff \dots$$

$$\iff Q(x)$$

■

En conclusion :  $\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)$

- Une troisième approche est parfois plus simple.

Pour démontrer  $\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)$ ,

on démontre  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$  et  $\forall x \in E, \text{non}(P(x)) \implies \text{non}(Q(x))$ .

**Rédaction type.**

Prenons un élément  $x$  de  $E$  et supposons  $P(x)$  vraie.  
 ...donc ...  
 donc  $Q(x)$  (*est vraie*) ■

Prenons un élément  $x$  de  $E$  et supposons  $\text{non}(P(x))$ .  
 ...donc ...  
 donc  $\text{non}(Q(x))$  ) ■

En conclusion :  $\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)$

## G.4 Raisonnement par disjonction des cas.

Le principe :

Si  $(P_1 \text{ ou } P_2)$  et  $P_1 \implies Q$  et  $P_2 \implies Q$  alors  $Q$ .

(*En cours de rédaction*)

## G.5 Raisonnement par contraposée.

Le principe :

Pour montrer  $\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)$ , il suffit de montrer  $\forall x \in E, \text{non}(Q(x)) \implies \text{non}(P(x))$

(*En cours de rédaction*)

## G.6 Raisonnement par l'absurde.

Le principe :

Pour montrer  $\forall x \in E, P(x)$ , il suffit de montrer  $\forall x \in E, \text{non}(P(x)) \implies Q(x) \text{ et } \text{non}(Q(x))$

(*En cours de rédaction*)

## G.7 Raisonnement par analyse-synthèse.

Principe :

Si  $\forall x \in E, P(x) \implies x \in A$  alors  $\{ x \in E \mid P(x) \} = \{ x \in A \mid P(x) \}$

On cherche à déterminer :  $S = \{ x \in E \mid P(x) \}$

Une première étape permet de réduire le domaine d'étude en raisonnant par condition nécessaire : **l'Analyse.**

$$\forall x \in E, P(x) \implies x \in A$$

Il suffit alors de déterminer :  $\{ x \in A \mid P(x) \}$ , **la Synthèse.**

Dans certains cas l'analyse à tellement réduit l'ensemble d'étude  $A$  qu'il suffit de vérifier que les éléments  $x$  de  $A$  vérifient ou non  $P(x)$ .

(*En cours de rédaction*)

## G.8 Résoudre une équation.

Résoudre une équation revient toujours à passer de l'écriture  $\{ x \in E \mid P(x) \}$  à celle  $\{ f(t) \mid t \in I \}$ .  
ou dans les cas les plus simples à :  $\{ x \in E \mid P(x) \} = \{x_1, \dots, x_n\}$

### Implication / déduction.

On distingue : une implication que l'on peut voir comme une règle  
et une déduction qui est l'application de la règle.

**Exemple** (dans un contexte où  $\alpha$  est un réel supérieur ou égal  $-1$ ) :

$$\begin{array}{ccc} & \text{déduction} & \\ \text{on sait que } & -\alpha = \sqrt{\alpha + 1} & \boxed{\text{donc}} \quad \alpha^2 = \alpha + 1 \\ & \uparrow & \\ & \boxed{\text{Pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } a = b \text{ alors } a^2 = b^2} & \end{array}$$