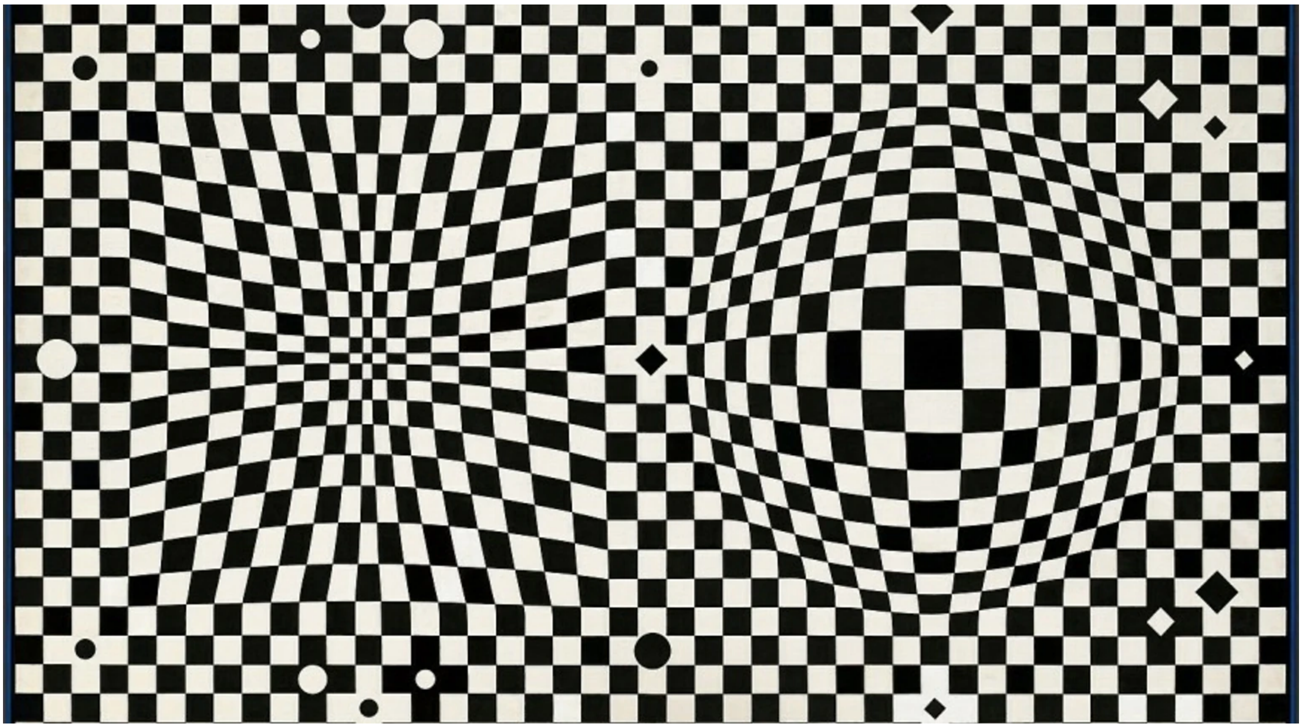
Cours de BCPST 1

Mathématiques

BCPST 2A (*Marcelin Berthelot*)



Année 2025–2026

Table des matières

1

Outils

Plan du chapitre

1.1 Vocabulaire de la logique et des ensembles.

1.1.1 Logique élémentaire.

Définition : Négation, et/ou

Soient P et Q deux propositions :
- (NON P) qui est vraie si P est fausse et fausse sinon.
- (P ou Q) qui est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie, et fausse sinon.
- (P et Q) qui est vraie lorsque P et Q sont vraies, et fausse sinon.

Remarques :
- Vrai et Faux les deux "valeurs de vérités".
- On dit que P équivaut à Q quand ils ont même valeur de vérité.

Propriétés.

$$\begin{array}{rcl|rcl}
(P \text{ et Vrai}) & \text{équivaut à} & P & (P \text{ ou Vrai}) & \text{équivaut à} & \text{Vrai} \\
(P \text{ et Faux}) & \text{équivaut à} & \text{Faux} & (P \text{ ou Faux}) & \text{équivaut à} & P \\
(P \text{ et } P) & \text{équivaut à} & P & (P \text{ ou } P) & \text{équivaut à} & P \\
(P \text{ et } Q) & \text{équivaut à} & (Q \text{ et } P) & (P \text{ ou } Q) & \text{équivaut à} & (Q \text{ ou } P) \\
P \text{ et } (Q \text{ et } R) & \text{équivaut à} & (P \text{ et } Q) \text{ et } R & P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) & \text{équivaut à} & (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R
\end{array}$$

Remarque : Quand il n'y a que des "et" ou que des "ou", on peut enlever les parenthèses.

(Négation du "et" et du "ou")

$$Non(P \text{ et } Q) \quad \text{équivaut à} \quad Non(P) \text{ ou } Non(Q)$$
$$Non(P \text{ ou } Q) \quad \text{équivaut à} \quad Non(P) \text{ et } Non(Q)$$

Remarque : La négation d'un "et" est un "ou" ; La négation d'un "ou" est un "et".

Distributivité du "et" sur le "ou" et du "ou" sur le "et"

$$P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \quad \text{équivaut à} \quad (P \text{ et } Q\ ) \text{ ou } (P \text{ et } R\ )$$
$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \quad \text{équivaut à} \quad (P \text{ ou } Q\ ) \text{ et } (P \text{ ou } R\ )$$

Remarque : Faire bien attention à l'usage des parenthèses quand il y a des "et" et des "ou".

Implication et équivalence.

On note $P \implies Q$ la proposition (P et Q) ou ($Non(P)$). (ou plus simplement $Non(P)$ ou Q)

On note $P \iff Q$ la proposition (P et Q) ou ($Non(P)$ et $Non(Q)$)

$\boxed{P \implies Q}$: "**Si** P (*vraie*) **alors** Q (*vraie*)"

$$P \implies \text{Q}$$
$$\nearrow \qquad\qquad \nwarrow$$
suffisante nécessaire

Transitivité.

$$\boxed{P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow R \quad \text{entraîne} \quad P \Longrightarrow R}$$

$\boxed{P \iff Q}$: " P (*vraie*) **si, et seulement si,** Q (*vraie*)"

$$P \iff Q \text{ équivaut à } (\, P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow P\,)$$

Q est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que P soit vraie.

Transitivité.

$$\boxed{P \iff Q \text{ et } Q \iff R \quad \text{entraîne} \quad P \iff R}$$

Implication / déduction.
On distingue : une implication que l'on peut voir comme une règle
et une déduction qui est l'application de la règle.

Exemple (*dans un contexte où α est un réel supérieur ou égal -1*) :

déduction

on sait que $-\alpha = \sqrt{\alpha+1}$ $\boxed{\text{donc}}$ $\alpha^2 = \alpha + 1$

↑

$\boxed{\textbf{\textit{Pour tout }} (a,b) \in \mathbb{R}^2\textbf{\textit{, si }} a = b \textbf{\textit{ alors }} a^2 = b^2}$

En pratique les implications sont associées à un quantificateur universel avec P et Q dépendant d'une variable.

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

Implication réciproque

L'implication réciproque de l'implication $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ est : $\forall x \in E, \quad Q(x) \Longrightarrow P(x)$

Remarque : Une implication et sa réciproque n'ont pas toujours la même valeur de vérité.
Exemples :

Contraposée

La forme contraposée de l'implication $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ est : $\forall x \in E, \quad non(Q(x)) \Longrightarrow non(P(x))$

Remarques :

- Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité (*elles sont équivalentes*).
- Les propositions : $\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)$ et $\forall x \in E,\ Non(P(x)) \iff Non(Q(x))$ sont équivalentes.

Négation d'une implication.

La négation de l'implication $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ est : $\exists x \in E :\ P(x)$ et $Non(Q(x))$.

Remarques :
La négation d'une implication est un "et", elle ne s'exprime pas avec une implication.
La valeur de x qui permet de montrer qu'une implication est fausse, est appelée **contre-exemple**.

1.1.2 Quantificateurs universel et existentiel :

Définitions

$P(x)$ désigne une proposition dépendant d'une variable x élément un ensemble E :
- $\forall x \in E, \quad P(x)$ qui signifie : pour chaque x élément de E la proposition $P(x)$ est vraie.
- $\exists x \in E, \quad P(x)$ qui signifie : il existe au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie
- $\exists! x \in E, \quad P(x)$ qui signifie : il existe un unique x de E pour lequel $P(x)$ est vraie

Autrement dit cela signifie que :

$$\underbrace{(\exists x \in E, \quad P(x))}_{\text{existence}} \text{ et } \underbrace{\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ (P(x_1) \text{ et } P(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2}_{\text{unicité}}$$

Remarque :
La démonstration de l'unicité se résume à : "Si x_1 et x_2 vérifient la propriété alors $x_1 = x_2$" et n'apporte aucune information sur l'existence.

On dit aussi : $\forall x \in E, \quad P(x)$ signifie : **pour tout** x élément de E la proposition $P(x)$ est vraie.
$\forall x \in E, \quad P(x)$ signifie : **quel que soit** x élément de E la proposition $P(x)$ est vraie.

Négation de proposition avec des quantificateurs

$$Non[\forall x \in E\,,\ P(x)] \text{ équivaut à } \exists x \in E :\ Non[P(x)]$$

$$Non[\exists x \in E :\ P(x)] \text{ équivaut à } \forall x \in E\,,\ Non[P(x)]$$

Notion de contre-exemple :
Pour démontrer que la proposition $[\forall x \in E\,,\ P(x)]$ est fausse, il suffit de trouver un élément x de E pour lequel $P(x)$ est faux.

Chaines de quantificateurs

Les quantificateurs, s'écrivent toujours à gauche des propositions,
l'ordre dans lequel ils sont écrits à en général une importance,
en enlève les parenthèses quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple :

$$\text{La proposition } \forall x \in E, \underbrace{(\exists y \in F : R(x,y))}_{P(x)} \text{ , s'écrit } \quad \forall x \in E, \exists y \in F : R(x,y)$$

Il faut bien distinguer les deux propositions suivantes :

$$\forall x \in E, \exists y \in F : R(x,y) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in F : \forall x \in E, R(x,y)$$

Dans la proposition $\forall x \in E, \exists y \in F : R(x,y)$, y peut être différent pour chaque x de E.
Dans la proposition $\exists y \in F : \forall x \in E, R(x,y)$, on doit avoir un y qui ne dépend pas de x.

Quand on nie une proposition de ce type on remplace les $\exists$ par des $\forall$ et inversement les $\forall$ par des $\exists$ puis on nie la proposition $R(x,y)$.

Exemple :

$$\text{La négation de la proposition } \forall x \in E, \exists y \in F : R(x,y) \text{ est : } \quad \exists x \in E : \forall y \in F,\ Non(R(x,y))$$

1.1.3 Vocabulaire des ensembles.

Généralités.

- On note $\varnothing$ l'ensemble vide (*celui qui ne contient rien*)
- On note $a \in E$: a est élément d'un ensemble E. Sa négation se note $a \notin E$.
- On note $A \subset B$ la proposition : $\forall x, \quad x \in A \Longrightarrow x \in B$.
  "les éléments de A sont tous des éléments de B". Sa négation se note $A \not\subset B$.
- Lorsque $A \subset B$ on dit que A est un **sous-ensemble** de B ou une **partie** de B.
- Pour montrer $A = B$:
  ① on montre souvent $A \subset B$ et $B \subset A$. ("*Raisonnement par double inclusion*")
  ② on aussi raisonner par équivalence en montrant : $\forall x \in E, \quad x \in A \iff x \in B$
- Un ensemble ne contenant qu'un élément est appelée **singleton**. On note $\{a\}$.
- Un ensemble contenant exactement deux éléments est appelée **paire**. On note $\{a\,;\,b\}$.
- Un ensemble contenant exactement n éléments est appelée ***n*-combinaisons**.On note $\{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$.
- Pour E un ensemble quelconque, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

$$\forall A, \quad A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E) \qquad\qquad \varnothing \in \mathscr{P}(E) \qquad\qquad E \in \mathscr{P}(E)$$

Ensemble défini par une propriété caractéristique.

Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant de x un élément de E.

Il existe un seul ensemble $A \subset E$, tel que pour tout $x \in E$, on a : $\quad x \in A \iff P(x)$.

On le note : $\quad A = \{\ x \in E \mid P(x)\ \}$

On lit : "A est l'ensemble des éléments x de E vérifiant la proposition $P(x)$".

On dit aussi que $P(x)$ caractérise les éléments x de A.

Une autre écriture d'ensemble (*image directe*)

Soient I et E deux ensembles et f une application qui à chaque élément t de I associe $f(t)$ dans E.

L'ensemble $\quad A = \{\ x \in E \mid \exists t \in I :\ x = f(t)\ \}$ peut aussi s'écrire : $\quad A = \{\ f(t) \mid t \in I\ \}$.

On lit : "A est l'ensemble des $f(t)$ lorsque t décrit I".

On dit aussi que A est l'image directe de I par f. (*Il se note parfois* $f(I)$).

Complémentaire. Intersection, réunion, différence de deux ensembles.

Définitions.

A et B désignent deux parties d'un ensemble E,
- complémentaire de A (dans E) : $\complement_E A = \{\ x \in E \mid x \notin A\ \}$
- intersection de A et B : $A \cap B = \{\ x \in E \mid x \in A$ **et** $x \in B\ \}$ *(On lit "A inter B")*
- réunion de A et B : $A \cup B = \{\ x \in E \mid x \in A$ **ou** $x \in B\ \}$ *(On lit "A union B")*
- Différence de A par B : $A \setminus B = \{\ x \in E \mid x \in A$ **et** $x \notin B\ \}$ *(On lit "A privé de B")*

Remarques :

① On pourra aussi noter $\overline{A} = \complement_E A$

② Dire que A et B sont disjoints signifie que : $A \cap B = \varnothing$.

③ Dire que les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 disjoints signifie que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

Propriétés :

A, B et C désignent des parties d'un ensemble E.

$$\overline{\varnothing} = E \qquad \overline{E} = \varnothing \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

$$\overline{(\overline{A})} = A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Distributivités :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Notations $\bigcap_{k=1}^{n}$ et $\bigcup_{k=1}^{n}$

Réunion et intersection d'un nombre fini de parties.
Définition.

Soit n un entier non nul et A_1, A_2, ... , A_n des parties de E

- l'**intersection** des A_k : $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{ \ x \in E \mid \forall k \in [\![1;n]\!], \quad x \in A_k \ \}$.
- la **réunion** des A_k : $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{ \ x \in E \mid \exists k \in [\![1;n]\!] : \quad x \in A_k \ \}$

Propriétés :

Complémentaires d'une union et d'une intersection :

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k} \qquad \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Distributivités :

$$B \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcap_{k=1}^{n} (B \cup A_k) \qquad B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$$

Produit cartésien.

Soient E et F deux ensembles,
on note $E \times F$ (on lit "E croix F") l'ensemble de tous les couples (x, y) dont la première composante x est un élément de E et la seconde de F.

Propriété fondamentale :

Pour tous $a \in E$, $a' \in E$, $b \in F$ et $b' \in F$, $\quad (a, b) = (a', b') \iff a = a' \quad \text{et} \quad b = b'$

Si A, B et C sont trois ensembles,
on pose $(A \times B) \times C = A \times B \times C$ et les éléments sont notés (x, y, z) et sont appelé triplets.

On définit de même $(A \times B \times C) \times D = A \times B \times C \times D$ etc ...
Pour n un entier tel que $n \geqslant 2$ et E_1, E_2, ..., E_n des ensembles,
les éléments de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ sont notés $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et sont appelées listes ou n-uplets

Propriété fondamentale :

Pour tous $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... , $x_n \in E_n$ et $x'_1 \in E_1$, $x'_2 \in E_2$, ... , $x'_n \in E_n$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i = x'_i$$

Pour n un entier tel que $n \geqslant 2$ et E un ensemble, on note :

$$E^n = \{ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i \in E \ \}$$

Les éléments de E^2 sont appelés couples d'éléments de E.
Les éléments de E^3 sont appelés triplets d'éléments de E.
Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, les éléments de E^n sont appelés listes de n éléments de E.

Lorsque les éléments de la liste sont distincts (deux à deux) ont dit que ce sont des listes sans répétition.

Différence entre listes sans répétition et combinaisons.
Quand on change l'ordre des éléments d'une liste sans répétition on modifie la liste alors que ce n'est pas le cas pour une combinaison.

Exemples :

Notations $\bigcap\limits_{i\in I}$ et $\bigcup\limits_{i\in I}$

Réunion et intersection d'un nombre indéfini de parties.
Définition.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

- l'**intersection** des A_i : $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{ \ x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i \ \}$.
- la **réunion** des A_i : $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \{ \ x \in E \mid \exists i \in I : \quad x \in A_i \ \}$

Propriétés :

Complémentaires d'une union et d'une intersection :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \qquad\qquad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

Distributivités :

$$B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i) \qquad\qquad B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

1.1.4 Méthodes de raisonnement

Nous présentons ici des types de raisonnements classiques avec des indications sur la rédaction.

Démontrer une implication.

Beaucoup de propositions peuvent s'écrire : $\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$.

Autrement dit :

"Quel que soit l'objet x, **Si** x vérifie $P(x)$ **alors** x vérifie $Q(x)$."

Exemples.

❶ Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$ alors $x+y\leqslant 1+xy$

C'est le cas de beaucoup de théorèmes du cours.

❷ Pour tout réel ρ, si $\rho\in]-1;1[$ alors la suite (ρ^n) converge vers 0.

❸ Quelle que soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, si f admet un maximum en un réel x_0 alors $f'(x_0)=0$.

C'est aussi le cas de toutes les hérédités dans les raisonnements par récurrence.

Pour tout entier n, P_n implique P_{n+1}.

❹ Quel que soit $n\in[\![2;+\infty[\![$, si $2^n\geqslant(n+1)^2$ alors $2^{n+1}\geqslant(n+2)^2$

C'est aussi le moyen de montrer une inclusion $A\subset B$:

pour tout $x\in E$, si $x\in A$ alors $x\in B$.

❺ On note $\Delta=\{(1+t,2-t,2-2t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ et $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+z=1\}$

Montrer $\Delta\subset P$ revient à montrer que : Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, si $(x,y,z)\in\Delta$ alors $(x,y,z)\in P$

Rédaction type.
Le principe général de cette rédaction :

Prenons un élément x de E et supposons $P(x)$ vraie. *(C'est ce que signifie la phrase : "Soit $x\in E$, tel que $P(x)$.".)* *on raisonne ensuite par déductions successives pour montrer que* $Q(x)$ est vraie.

Exemples :
Démontrons ❸ :
Prenons f une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et supposons que f admet un maximum en un réel x_0,

pour $x<x_0$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$ donc en passant à la limite $(x\to x_0)$ on a $f'(x_0)\geqslant 0$.

pour $x>x_0$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$ donc en passant à la limite $(x\to x_0)$ on a $f'(x_0)\leqslant 0$.

on en déduit bien que $f'(x_0)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Quelle que soit } f \text{ une fonction dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ si } f \text{ admet un maximum en un réel } x_0 \text{ alors } f'(x_0)=0.}$$

Démontrons ❹ :
Prenons un entier $n\geqslant 2$, et supposons que : $2^n\geqslant(n+1)^2$,

$$\begin{array}{rcll} 2^{n+1}-(n+1+1)^2 & = & 2\times 2^n-(n+2)^2 & \\ & \geqslant & 2\times(n+1)^2-(n+2)^2 & (\text{ car } 2^n\geqslant(n+1)^2\ ) \\ & \geqslant & n^2-2 & \end{array}$$

et comme $n\geqslant 2$ on a $n^2-2\geqslant 0$ et ainsi $2^{n+1}-(n+1+1)^2\geqslant 0$
On a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 2, \text{ on a : } 2^n \geqslant (n+1)^2 \Longrightarrow 2^{n+1} > (n+2)^2}$$

Démontrons ❺ :
Prenons (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$ et supposons que $(x, y, z) \in \Delta$,
on sait alors que pour un $t \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) = (1 + t\,,\, 2 - t\,,\, 2 - 2t)$,
on a alors $x - y + z = (1 + t) - (2 - t) + (2 - 2t)$ ce qui donne $x - y + z = 1$
et permet d'affirmer que $(x, y, z) \in P$

quel que soit le triplet (x, y, z), si $(x, y, z) \in \Delta$ alors, $(x, y, z) \in P$.

Conclusion :

$$\boxed{\Delta \text{ est inclus dans } P.}$$

– –

Pour montrer que "$\forall x \in E,\ P(x) \Longrightarrow Q(x)$" est fausse, on donne un contre-exemple.
Rédaction type :

En prenant x_0 *(un élément particulier de E)*
on a $P(x_0)$ est vraie *et* $Q(x_0)$ est fausse.
■

En conclusion : $\boxed{\text{L'affirmation : } \forall x \in E,\ P(x) \Longrightarrow Q(x) \text{ est fausse}}$

Exemple.

❻ "Quelle que soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, si $f'(0) = 0$ alors f admet un maximum en 0".
Cette implication est fausse. En effet :
En prenant f la fonction $x \longmapsto x^3$, on a bien une fonction dérivable vérifiant $f'(0) = 0$
et pourtant f ne possède pas d'extremum en 0.

donc

$$\boxed{\text{il est faux d'affirmer que lorsque la dérivée s'annule en un 0 alors la fonction présente un extremum en 0.}}$$

Avec des ensembles on raisonne de même pour montrer : "$A \not\subset B$".

En prenant x_0 (*un élément particulier de E*),
on a $x_0 \in A$ et $x_0 \notin B$.
donc $A \neq B$ ■

En conclusion : $\boxed{A \neq B}$

Exemple.

❼ On note $\Delta = \{(1 + t, 2 - t, 2 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 1\ \}$

On remarque $(0, 0, 1) \in P$ et que $(0, 0, 1) \notin \Delta$ donc $\boxed{P \not\subset \Delta}$

<u>Démontrer une équivalence.</u>

Souvent pour montrer une équivalence, on raisonne par double implication.

Pour démontrer $\forall x \in E,\quad P(x) \iff Q(x)$,
on démontre $\forall x \in E,\quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$ et $\forall x \in E,\quad Q(x) \Longrightarrow P(x)$.

Rédaction type.

$\boxed{\Rightarrow}$ Prenons un élément x de E et supposons $P(x)$ vraie.

...donc ...

donc $Q(x)$ (*est vraie*) ∎

$\boxed{\Leftarrow}$ Prenons un élément x de E et supposons $Q(x)$ vraie.

...donc ...

donc $P(x)$ (*est vraie*) ∎

En conclusion : $\boxed{\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)}$

Dans les cas les plus simples on peut raisonner par équivalence en s'appuyant sur la remarque suivante :

$$\text{Si} \quad P \iff Q \ \text{ et } \ Q \iff R \quad \text{alors} \quad P \iff R$$

Rédaction type.

Prenons un $x \in E$ quelconque fixé, (*ici on ne suppose rien*)
(*c'est ce que signifie la phrase* " Soit $x \in E$,")

$$\begin{aligned} P(x) &\iff \ldots \\ &\iff \ldots \\ &\iff Q(x) \end{aligned}$$

∎

En conclusion : $\boxed{\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)}$

Cas particulier des équations ou inéquations simples.
Exemples.

Raisonnement par disjonction des cas.

Le principe :

$$\text{Si} \ \ (P_1 \text{ ou } P_2) \text{ et } P_1 \Longrightarrow Q \text{ et } P_2 \Longrightarrow Q \ \ \text{alors} \ \ Q.$$

(rédaction en cours)

Raisonnement par contraposée.

Le principe :

$$\text{Pour montrer } \forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x), \text{ il suffit de montrer } \forall x \in E, \quad non(Q(x)) \Longrightarrow non(P(x))$$

(rédaction en cours)

Raisonnement par l'absurde.

Le principe :

$$\text{Pour montrer } \forall x \in E, \quad P(x), \quad \text{il suffit de montrer} \quad \forall x \in E, \quad non(P(x)) \Longrightarrow Q(x) \textit{ et } non(Q(x))$$

(rédaction en cours)

Raisonnement par analyse-synthèse.

Principe :

$$\text{Si} \quad \forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow x \in A \quad \text{alors} \quad \{\ x \in E \mid P(x)\ \} = \{\ x \in A \mid P(x)\ \}$$

On cherche à déterminer : $S = \{\ x \in E \mid P(x)\ \}$
Une première étape permet de réduire le domaine d'étude en raisonnant par condition nécessaire : **l'Analyse**.

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow x \in A$$

Il suffit alors de déterminer : $\{\ x \in A \mid P(x)\ \}$, **la Synthèse**.
Dans certains cas l'analyse à tellement réduit l'ensemble d'étude A qu'il suffit de vérifier que les éléments x de A vérifient ou non $P(x)$.

(rédaction en cours)

Résoudre une équation.

Résoudre ue équation revient toujours à passer de l'écriture $\{\ x \in E \mid P(x)\ \}$ à celle $\{\ f(t) \mid t \in I\ \}$.
ou dans les cas les plus simples à : $\{\ x \in E \mid P(x)\ \} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Exemples.
❶ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1; 1\}$

1.2 Nombres.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.2.1 Nombres entiers.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : $\dots\ ,-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$

Notation.

Soient a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \leqslant b$,
on note $[\![a; b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b au sens large.
autrement dit : $[\![a; b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\ \}$
(*C'est l'ensemble des entiers relatifs k vérifiant $a \leqslant k \leqslant b$*)
on note $[\![a; +\infty[\![$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à a.
autrement dit : $[\![a; +\infty[\![= \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k\ \}$
(*C'est l'ensemble des entiers relatifs k vérifiant $a \leqslant k$*)

Attention : ce ne sont pas des intervalles.

Raisonnement par récurrence.

n_0 désigne un entier naturel et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de propositions (d'assertions).

$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \dots.$ sont des affirmations, pour chaque n, P_n peut être vraie ou fausse.

Récurrence simple :

$$\textbf{Si} \begin{cases} P_{n_0} \text{ est vraie} \\ \text{quel que soit l'entier } n \geqslant n_0, \quad \text{si } \ P_n \text{ est vraie } \ \text{alors } \ P_{n+1} \text{ est vraie} \end{cases}$$
$$\textbf{alors} \quad \text{quel que soit l'entier } n \geqslant n_0,\ \ P_n \text{ est vraie.}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} P_{n_0} \\ \forall n \in [\![n_0; +\infty [\![, \quad P_n \Longrightarrow P_{n+1} \end{cases} \Longrightarrow \quad \forall n \in [\![n_0; +\infty [\![,\ \ P_n$$

Récurrence d'ordre 2 :

$$\textbf{Si} \begin{cases} P_{n_0} \ \text{ et } \ P_{n_0+1} \text{ sont vraies} \\ \text{quel que soit l'entier } n \geqslant n_0, \quad \text{si } \ P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont vraies alors } \ P_{n+2} \text{ est vraie} \end{cases}$$
$$\textbf{alors} \quad \text{quel que soit l'entier } n \geqslant n_0,\ \ P_n \text{ est vraie.}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} P_{n_0} \ \text{ et } \ P_{n_0+1} \\ \forall n \in [\![n_0; +\infty [\![, \quad (P_n \text{ et } P_{n+1}) \Longrightarrow P_{n+2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \forall n \in [\![n_0; +\infty [\![,\ \ P_n$$

Récurrence forte :

$$\textbf{Si} \begin{cases} P_{n_0} \\ \text{quel que soit } n \geqslant n_0,\ [\forall k \in [\![n_0; n]\!], \quad P_k\ ] \Rightarrow P_{n+1} \end{cases} \textbf{alors} \quad \text{quel que soit } n \geqslant n_0,\ \ P_n.$$

Récurrence finie :

Soit n fixé dans $\mathbb{N}$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} P_{n_0} \\ \forall k \in [\![n_0; n-1]\!], \quad P_k \Rightarrow P_{k+1} \end{cases} \textbf{alors} \quad P_n.$$

1.2.2 Nombres réels.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On représente ces nombres sur un axe orienté.

Règles de calcul.

Somme et produit

Pour tous réels x, y et z on a :

$$x+y=y+x \qquad x+0=x \qquad (x+y)+z=x+(y+z) \qquad \exists x'\in\mathbb{R}:\ x+x'=0$$

$$xy=yx \qquad x\times 1=x \qquad (xy)z=x(yz) \qquad (\text{si } x\neq 0)\quad \exists x'\in\mathbb{R}:\ xx'=1$$

$$x(y+z)=xy+xz$$

Quotients de nombres réels :

Soient a, b, c et d des nombres réels non nuls,

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b} \qquad \frac{a}{b}=\frac{ac}{bc} \qquad c\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{b} \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

Ordre de priorité :

Soient a, b et c des nombres réels non nuls,

$$a+b-c=a+b+(-c) \qquad a-b+c=a+(-b)+c$$

$$a+b\times c=a+(b\times c) \qquad a\times b+c=(a\times b)+c$$

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\times\frac{1}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

Inégalités

Propriétés.

Les propositions suivantes sont vraies quels que soient les réels x, y et a.

$$x\leqslant y \Longrightarrow x+a\leqslant y+a \qquad x<y\Longrightarrow x+a<y+a$$

$$x\leqslant y \iff y-x\geqslant 0 \qquad x<y \iff y-x>0$$

$$x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0 \Longrightarrow x+y\geqslant 0 \qquad x>0 \text{ et } y\geqslant 0\Longrightarrow x+y>0$$

$$x\geqslant 0 \iff -x\leqslant 0 \qquad x>0 \iff -x<0$$

$$x\geqslant 0 \text{ et } x\leqslant 0 \iff x=0$$

$$x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0 \Longrightarrow xy\geqslant 0 \qquad x>0 \text{ et } y\geqslant 0\Longrightarrow xy\geqslant 0$$

$xy\geqslant 0$ si, et seulement si, x et y sont de même signe.

$xy\leqslant 0$ si, et seulement si, x et y sont de signe opposé.

Propositions.

Pour a, b, c, a', b', c' des réels,

Si $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$ **alors** $a + a' \leqslant b + b'$

Si $a \leqslant b$ et $k \geqslant 0$ **alors** $ka \leqslant kb$

Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant a' \leqslant b'$ **alors** $aa' \leqslant bb'$

Si $a \leqslant b$ et $k \leqslant 0$ **alors** $kb \leqslant ka$

Si a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, $a \leqslant b$ **alors** $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

Si a et b dans $\mathbb{R}_-^*$, $a \leqslant b$ **alors** $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

Si a et b dans I, $a \leqslant b$ et f croissante sur I **alors** $f(a) \leqslant f(b)$

Si a et b dans I, $a \leqslant b$ et f décroissante sur I **alors** $f(b) \leqslant f(a)$

Même propriétés sur les encadrements.

Notation : $\boxed{a \leqslant b \leqslant c \iff a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c}$

Propositions :

❶ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$,
Si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_1$ alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

❷ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$,
si $\forall i \in [\![1; n]\!], x_i \geqslant 0$ alors $x_1 + \cdots + x_n \geqslant 0$

❸ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$,
si $\forall i \in [\![1; n]\!], x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \cdots + x_n = 0$ alors $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $x_i = 0$

A connaître. et à savoir démontrer.

(I_1) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (I_2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{2}(a + b)$

(I_3) $\forall x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ (I_4) $\forall p \in \mathbb{R}$, $p(1 - p) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Intervalles

Définition :

Les **intervalles** de $\mathbb{R}$ sont les parties A de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \qquad [\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in A \quad \text{et} \quad a \leqslant c \leqslant b \,] \quad \Longrightarrow \quad c \in A$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$, autres que $\varnothing$ et $\mathbb{R}$, sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme :

$$[\, a \,;\, b \,]\,, \quad]\, a \,;\, b \,[\,, \quad [\, a \,;\, b \,[\,, \quad]\, a \,;\, b \,]\,, \quad [\, a \,; +\infty[\,, \quad]\, a \,; +\infty[\,, \quad]-\infty; b \,]\,, \quad]-\infty; b\,[$$

avec a et b deux réels.

Valeur absolue.

Définition :

> On définit la **valeur absolue** d'un réel x par :
> $$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Remarques :

Pour tous réels a, b, x on a :

$$|-x| = |x| \quad \text{et} \quad |a-b| = |b-a|$$

Sur l'axe orienté des réels, on note M le point d'abscisse x, A d'abscisse x_A et B d'abscisse x_B.

- $|x|$ est la distance de M à l'origine. (on dit aussi "de x à l'origine").
- $|x_B - x_A|$ est la distance AB (on dit aussi "de x_A à x_B").
- $x_B - x_A$ est la mesure algébrique $\overline{AB}$.

Propositions :

> Soit x, y et h des réels avec $a \geqslant 0$,
> $$|x| \geqslant 0 \qquad (|x| = 0 \iff x = 0) \qquad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$$
> $$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$
> $$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \quad \text{et} \quad x \leqslant a$$
> $$|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a \quad \text{ou} \quad a \leqslant x$$
> $$|xy| = |x||y| \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

> $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x+y| = |x| + |y| \iff (x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \text{ ou } (x \leqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0)$$

Généralisation de l'inégalité triangulaire.

> Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels,
> $$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

La condition nécessaire est suffisante pour avoir une égalité est : tous les a_k sont de même signe.

Puissances entières.

Définition.

> Soit x un réel, on définit par récurrence et pour tout entier naturel n le réel x^n par :
> $$x^0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+1} = x^n \times x$$
> Plus simplement : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$
>
> Soient x un réel non nuls et n un entier strictement négatif, le réel x^n est égal à $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(-n)}$

Propriétés

Soient x et y deux réels non nuls et n et m deux entiers relatifs.

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^n \times x^m = x^{n+m}\ , \quad (x^n)^m = x^{nm}\ , \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Identités remarquables.

Pour a et b deux réels,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\ , \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\ , \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Racine carrée

Définition :

Pour x un réel positif ou nul, on note $\sqrt{x}$ l'unique réel positif dont le carré vaut x.

Proposition :

x et y désignent deux réels positifs ou nuls,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \text{si } y \neq 0 \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x}\right)^n$$

Remarque : Quel que soit le réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Puissances réelles.

Définition :

Soit a et b deux réels, avec $\boldsymbol{a > 0}$, on appelle a puissance b le réel $e^{b\ln(a)}$.

$$\boldsymbol{a^b \overset{def}{=} e^{b\ln(a)}}$$

Propriétés algébriques :

Soient a, a' deux réels strictement positifs et b, b' deux réels quelconques.

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad (aa')^b = a^b a'^b \qquad a^{b+b'} = a^b a^{b'} \qquad \left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'} \qquad a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$$

Proposition :

Soit $b \in \mathbb{R}$,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(a^b\right) = b\ln(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

Majoration, minoration.

Majorants, minorants.

Soit m un réel, A une partie de $\mathbb{R}$,

① Dire que m est un majorant de A signifie que : $\forall x \in A, \quad x \leqslant m$.

② Dire que m est un minorant A signifie que : $\forall x \in A, \quad x \geqslant m$.

Définitions.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$,

① Dire que A est majorée signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A, \quad x \leqslant M.$

② Dire que A est minorée signifie que : $\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A, \quad x \geqslant m.$

③ Dire que A est bornée signifie que : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \leqslant M.$

Proposition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$,

A est bornée si, et seulement si, $\exists M \in \mathbb{R}^+ : \quad \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M$

Plus grand ou plus petit élément d'un ensemble

Définitions :

Soit a un réel, A une partie non vide de $\mathbb{R}$,

① Dire que a est le plus grand élément de A signifie que :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \leqslant a$$

Lorsqu'il existe, il est unique on le note $\max(A)$.

② Dire que a est le plus petit élément de A signifie que :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \geqslant a$$

Lorsqu'il existe, il est unique on le note $\min(A)$.

Remarques :

- un ensemble fini possède un plus grand et un plus petit élément.
- Toute partie majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- Toute partie minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

Borne supérieure ou inférieure

Définition :

La borne supérieure a d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée ("$a = \sup(A) \iff$") par :

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad \forall b < a, \ \exists x \in A : \ b < x$$

La borne inférieure a d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée ("$a = \inf(A) \iff$") par :

$$\forall x \in A, \quad a \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \forall b > a, \ \exists x \in A : \ x < b$$

Autrement dit :

A une partie de $\mathbb{R}$,

- La **borne supérieure** de A est, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de A.
- La **borne inférieure** de A est, lorsqu'il existe, le plus grand des minorants de A.

Théorème : *(Propriété de la borne supérieure, de la borne inférieure)*

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Partie entière.

Définition :

Soit x un réel, il existe un et un seul entier relatif n vérifiant :

$$n \leqslant x < n+1$$

cet entier s'appelle **la partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$

Propriétés :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls,

$\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ est le quotient dans la division euclidienne de a par b.

Séparation des termes d'une somme.

Soit (a_n) une suite de nombre complexes,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} a_{3k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} a_{3k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} a_{3k+2}$$

1.2.3 Nombres complexes.

Introduction.

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ vérifiant :

❶ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
❷ on définit $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ avec les mêmes propriétés que $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$.
❸ il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i et vérifiant $i \times i = -1$
❹ tout élément de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière unique $x + i \times y$ où x et y sont deux nombres réels.

Attention :

Dans $\mathbb{C}$ on ne définit pas d'ordre on ne peut pas comparer (plus petit ou plus grand) deux nombres complexes.

Forme algébrique.

Identification.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+iy = x'+iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

Règles de calcul.

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 et z_3 et tous nombres réels x_1, y_1, x_2 et y_2 on a :

$$i^2 = -1 \qquad (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1+z_2 = z_2+z_1 \qquad z_1+0 = z_1 \qquad (z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3) \qquad \exists z' \in \mathbb{C} : \; z+z' = 0$$

$$z_1z_2 = z_2z_1 \qquad z_1 \times 1 = z_1 \qquad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \qquad (\text{si } z \neq 0) \quad \exists z' \in \mathbb{C} : \; zz' = 1$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

Les identités remarquables, les formules du binome et de Bernoulli ont été enoncés avec des nombres complexes.

Remarque : Comme pour les réels, on a aussi la propriété suivante :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z_1z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad z_2 = 0$$

Partie réelle et partie imaginaire.

Définition.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Re}(x + iy) = x \qquad \mathrm{Im}(x + iy) = y$$

Remarques :

- Les complexes de partie réelle nulle sont appelés imaginaires purs.
- On note $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0 \}$ (l'ensemble des imaginaires purs).

Propriétés

Etant donné deux réels λ et λ' et deux nombres complexes z et z',

$$\mathrm{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \lambda' \mathrm{Re}(z') \qquad \mathrm{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \lambda' \mathrm{Im}(z')$$

Généralisation.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n complexes et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels.

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Re}(a_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{Im}(a_k)$$

Conjugué.

Définition.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$ avec x, y deux réels,
on appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ et définie par

$$\overline{z} = x - i\,y$$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , tout réel λ :

$$\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\;\overline{z'}$$

$$\text{Si } z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Généralisation.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n complexes,

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} \qquad \text{et} \qquad \overline{\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{a_k}$$

Propositions :

Pour tout nombre complexe z :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff z + \overline{z} = 0$$

<u>Module.</u>

Définition :

Le module du complexe z est le réel $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés.

Pour tout nombres complexes z et z', tout réel λ :

$$|\lambda z| = |\lambda|\,|z| \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \qquad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |z^n| = |z|^n$$

Propositions :

Pour tout nombre complexe z non nul : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Pour tout nombre complexe z : $|z| = \mathrm{Re}(z) \iff z \in \mathbb{R}_+$

Inégalités.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \qquad |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad ||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire.
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned}(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 &= |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 - (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 - (z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}') \\ &= 2\left(|z\bar{z}'| - \mathrm{Re}(z\bar{z}')\right)\end{aligned}$$

or pout tout complexe Z, $|Z| \geqslant \mathrm{Re}(Z)$ donc $(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 \geqslant 0$ ou encore $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$
en passant à la racine carrée qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ il vient :

$$\boxed{\text{Pour tout } (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

Le calcul précédent montre que : $|z + z'| = |z| + |z'| \iff |z\bar{z}'| = \mathrm{Re}(z\bar{z}')$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| = |z| + |z'| \quad \text{si, et seulement si,} \quad z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+}$$

Généralisation.

Soient n un entier non nul et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres complexes,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad \text{et} \qquad \left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k|$$

Notation $e^{i\theta}$.

Définition :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$e^{i\theta} \underset{\text{def}}{=} \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$$

Propositions :

Pour tout $(\theta,\, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1\,, \qquad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}\,, \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}\,, \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}$

Formules d'Euler.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Ecriture exponentielle d'un nombre complexe.

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul, on appelle **argument** de z tout réel θ tel que

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Propositions : *Identification.*

Etant donné de réels strictement positifs r_1 et r_2 et deux réels θ_1 et θ_2,

$$r_1\, e^{i\theta_1} = r_2\, e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

Si θ_1 et θ_2 appartiennent à $[\boldsymbol{0;2\pi}[$, (ou à $]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$,)

$$r_1\, e^{i\theta_1} = r_2\, e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \quad \text{et} \quad \theta_1 = \theta_2$$

Proposition :

Soit z un nombre complexe non nul et θ_0 un argument de z,
l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels de la forme : $\theta_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

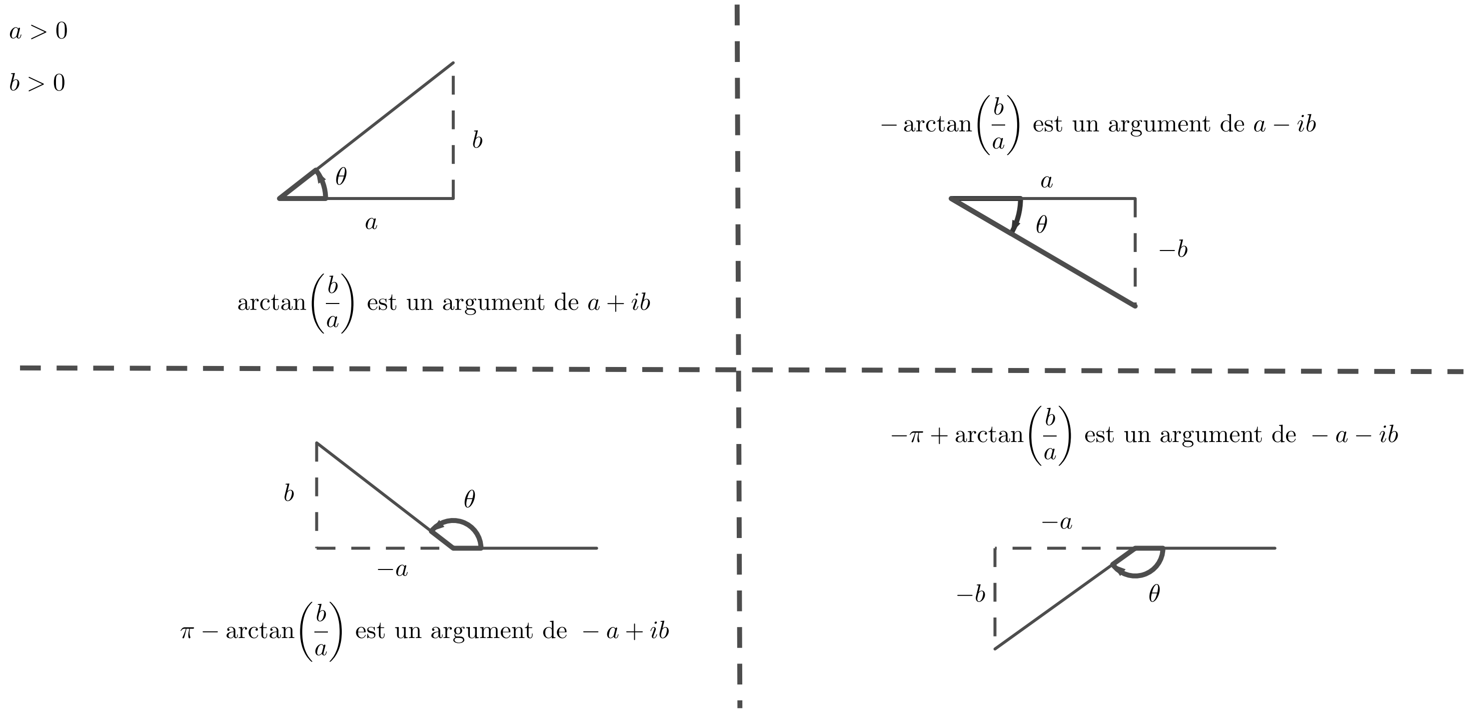
Propriétés.

Quel que soient les nombres complexes non nuls z_1 et z_2,

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$.
- $\arg(\ z_1^n\ ) \equiv n\ \arg(z_1)\ [2\pi]$

Argument de $a + ib$. *(Complément)*

Dans ce paragraphe a et b sont deux réels positifs et a est non nul.



Exponentielle d'un nombre complexe.

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$,
on appelle exponentielle de z le complexe :

$$e^z \underset{\text{def}}{=} e^a\, e^{ib}$$

Théorème :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{(z+z')} = e^z\, e^{z'}$$

Propositions :

Pour tout $(z,\, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'} \qquad \frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad \overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (e^z)^n = e^{nz}$$

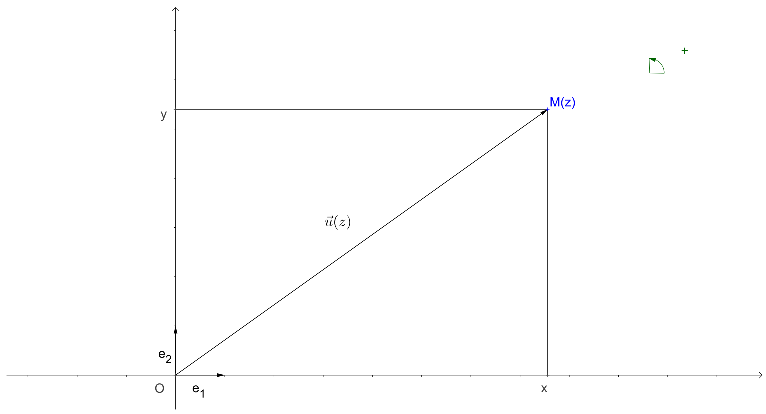
$$|e^z| \;=\; e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad , \qquad \arg(e^z) = \;\mathrm{Im}(z) \pmod{2\pi}$$

Proposition :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z = e^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z' + 2k\pi i$$

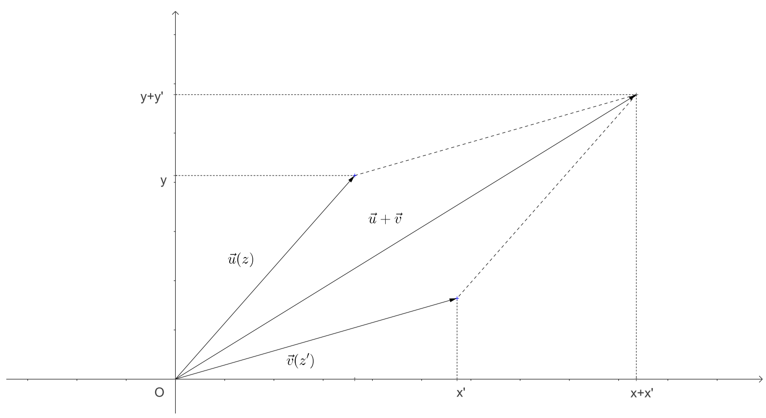
1.2.4 Interprétations graphiques des nombres complexes.

Affixe d'un point ou d'un vecteur dans le plan complexe. (*Forme algébrique*)



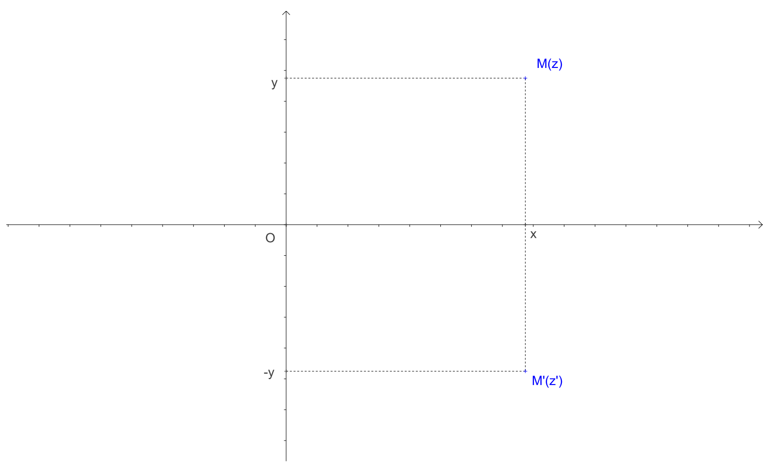
$z = x + iy$ est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{u}$.

Somme de deux complexes.



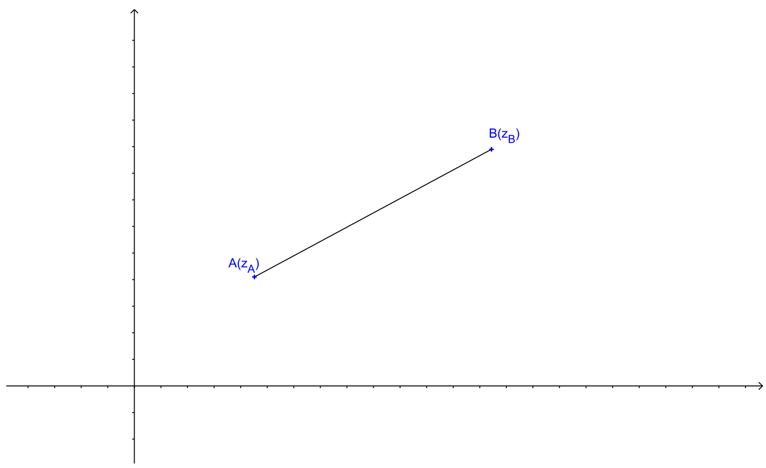
$z + z'$ est l'affixe du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Conjugué d'un nombre complexe.



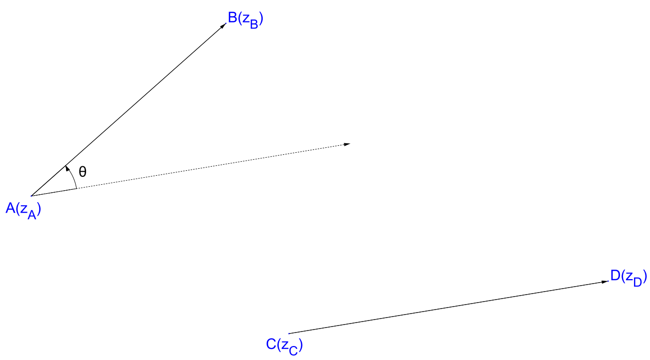
$$z' = \overline{z} = x - iy \qquad M' \text{ est l'image de } M \text{ par la symétrie orthogonale d'axe } (Ox).$$

Distance entre deux points.



$$AB = |z_B - z_A|. \qquad z_B - z_A \text{ est l'affixe du vecteur } \overrightarrow{AB}.$$

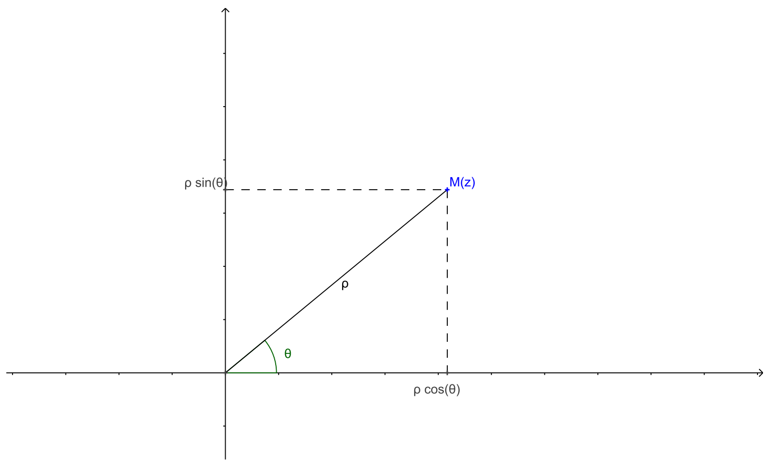
Angle entre deux vecteurs.



$z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

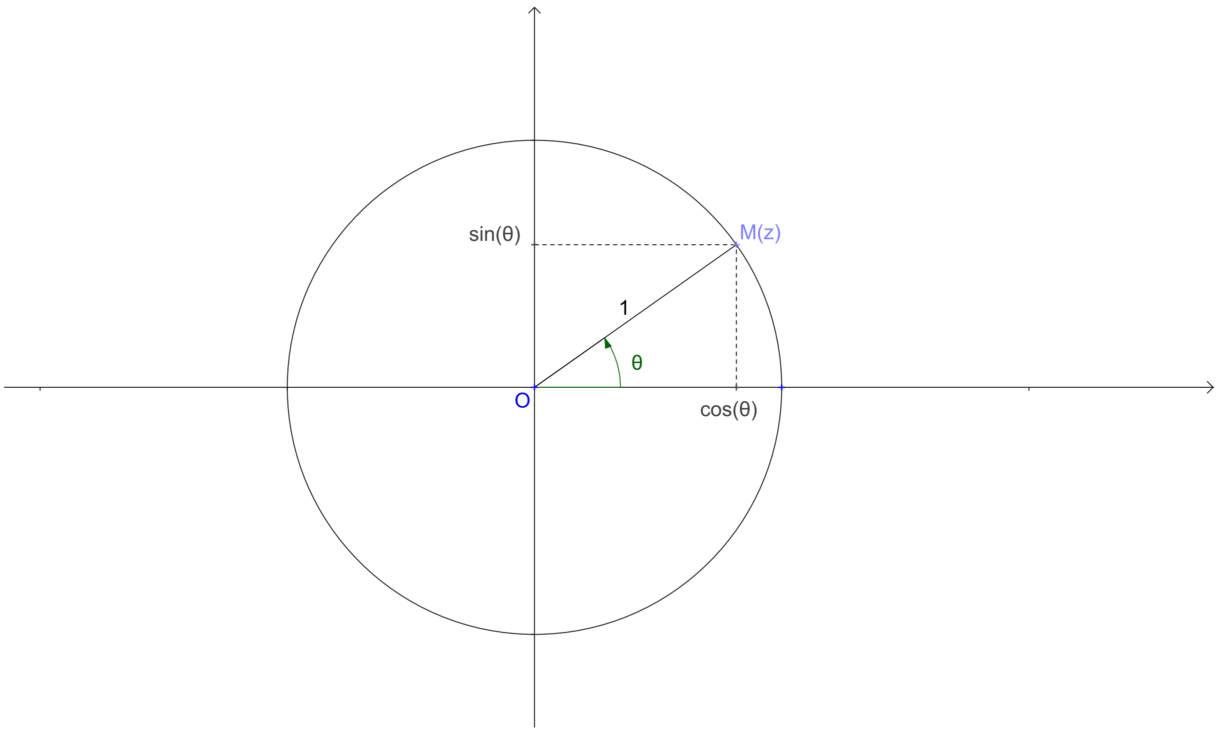
$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \quad , \quad \text{où } \theta \text{ est une mesure de l'angle orienté } \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right)$$

Représentation polaire d'un point du plan.



$$z = \rho\, e^{i\theta}.$$

Sur le cercle trigonométrique.



$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Multiplication par $e^{i\theta}$.

1.2.5 Trinôme à coefficients réels.

On appelle trinôme à coefficients réels toute application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\quad \forall z\in\mathbb{C},\quad P(z)=az^2+bz+c$$

Démonstration faite en classe : $aX^2+bX+c=a\left(\left(X+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

Racines.

On appelle racine du trinôme : aX^2+bX+c, toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $az^2+bz+c=0$.

On note $\Delta=b^2-4ac$ *(le discriminant du polynôme)*

- Si $b^2-4ac>0$, le trinôme possède exactement deux racines et elles sont réelles :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $b^2-4ac=0$, le trinôme possède une unique racine réelle :

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

- Si $b^2-4ac<0$, le trinôme possède exactement deux racines complexes et elles sont conjuguées :

$$z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\qquad\qquad \overline{z}=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : Un polynôme de degré 2 a au plus deux racines distinctes.

Forme factorisée et signe.

- Si $b^2-4ac>0$, $\quad aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$.
  Cette expression permet de donner le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$:

  signe de a à l'extérieur des racines et l'opposé entre les deux racines.

- Si $b^2-4ac=0$, $\quad aX^2+bX+c=a(X-x_0)^2$.
  Cette expression permet de donner le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$: signe de a et s'annule en x_0.

- Si $b^2-4ac<0$, $\quad aX^2+bX+c=a(X-z)(X-\overline{z})$
  Attention ! cette dernière expression ne justifie pas du tout le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$:

  Dans ce cas le signe de $P(x)$ est celui de a.

Forme canonique et sommet.

Pour tout trinôme $aX^2 + bX + c$, on peut trouver deux réels α et β tels que

$$aX^2 + bX + c = a\,(X - \alpha)^2 + \beta$$

En donnant l'allure de la parabole, cette expression donne le sommet de la parabole :

le point de coordonnées (α, β).

Identification des coefficients d'un polynôme.

Théorème :
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on l'équivalence suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = 0) \iff (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

Corollaire.
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, on l'équivalence suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c') \iff (a, b, c) = (a', b', c')$$

Somme et produit des racines.

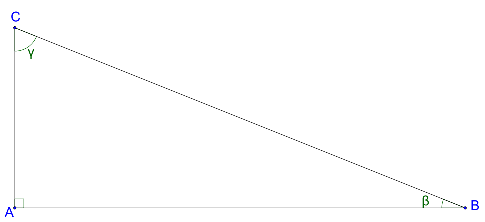
$$X^2 - SX + p = (X - \lambda)(X - \mu) \iff \lambda + \mu = S \quad \text{et} \quad \lambda\mu = p$$

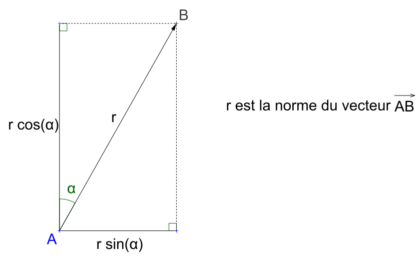
$aX^2 + bX + c = a\ (X - x_1)(X - x_2)$ ou encore : $aX^2 + bX + c = a\left(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2\right)$

$$aX^2 + bX + c \quad = \quad a \left(X^2 \quad - \quad \underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_{\textit{somme des rac.}} \quad X \quad + \quad \underbrace{\left(\frac{c}{a}\right)}_{\textit{produit des rac.}} \right)$$

1.3 Trigonométrie.

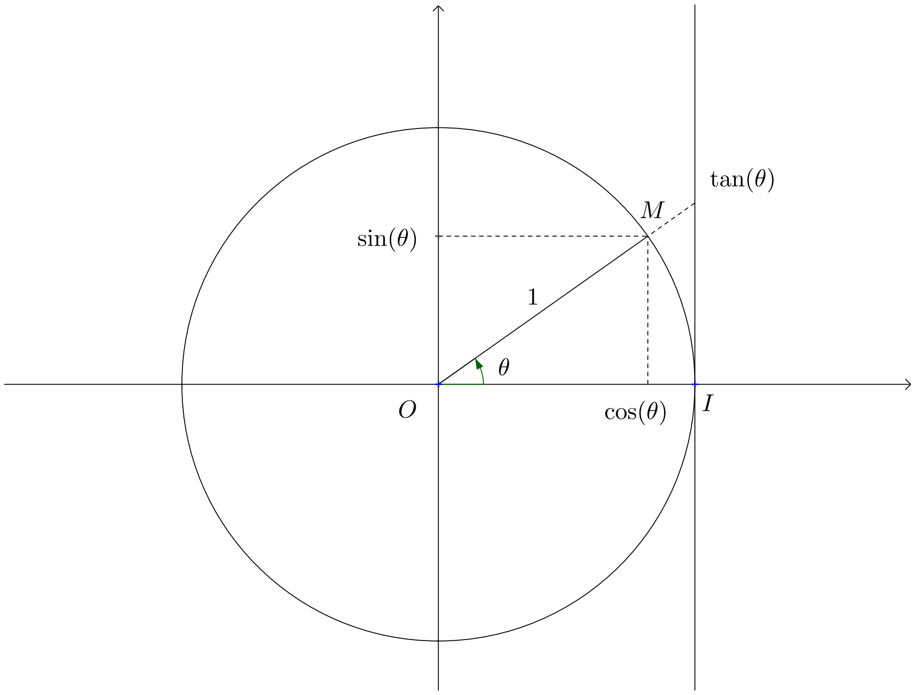
1.3.1 Dans le triangle rectangle.





$$\cos(\beta) = \frac{AB}{BC} \qquad \sin(\beta) = \frac{AC}{BC} \qquad \cos(\gamma) = \frac{AC}{BC} \qquad \sin(\gamma) = \frac{AB}{BC} \qquad \tan(\beta) = \frac{AC}{AB} \qquad \tan(\gamma) = \frac{AB}{AC}$$

1.3.2 Dans le cercle trigonométrique.



Remarque : Le cercle est de rayon 1, il est orienté dans le sens antihoraire, les points du cercle sont repérés par leur abscisse curviligne (l'arc orienté $\widehat{IM}$), sur la figure cette abscisse vaut θ.

Définitions :

$\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées du point M du cercle trigonométrique associé à θ.

Propositions.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1 \qquad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Définition :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Remarque : Différentes façons de noter l'ensemble de définition de la fonction tangente :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \qquad D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}\ ;\ k\pi + \frac{\pi}{2} \right[$$

1.3.3 Périodicités.

Les fonctions $t \longmapsto \cos(t)$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont de période 2π.

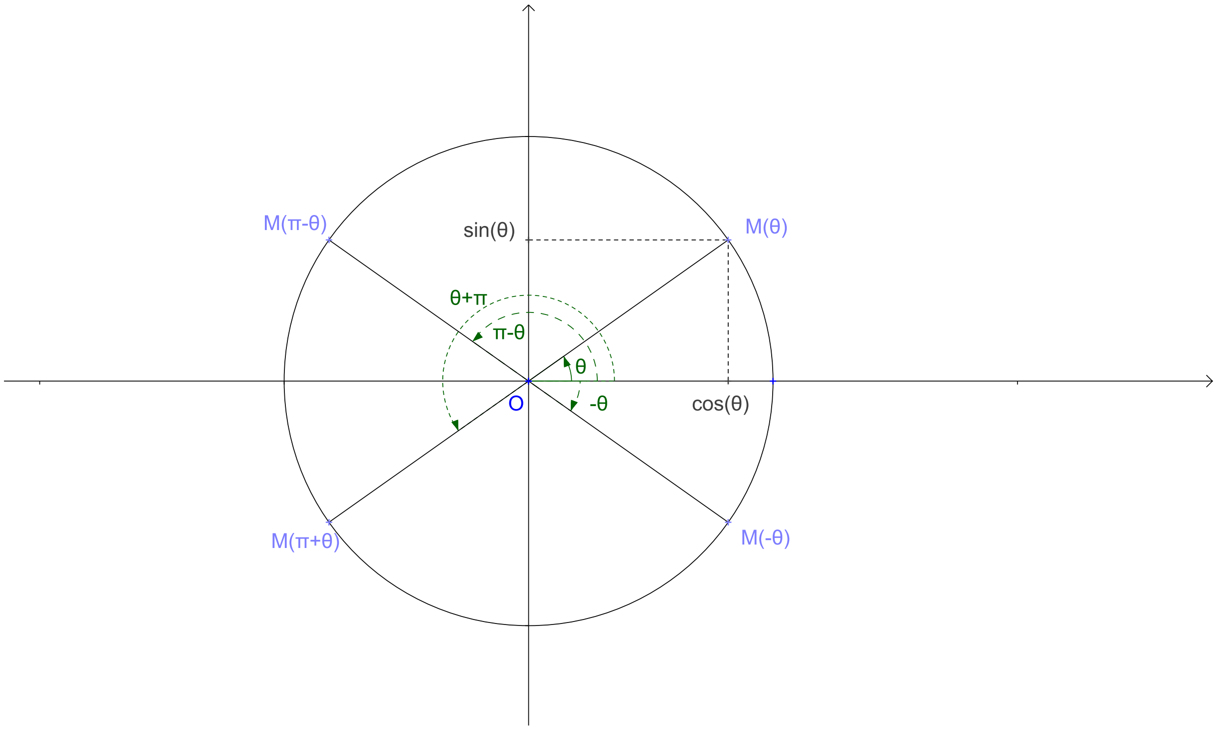
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

La fonction $t \longmapsto \tan(t)$ est de période π.

$$\forall \theta \in D_{tan}, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$

1.3.4 Symétries.

Avec les axes :

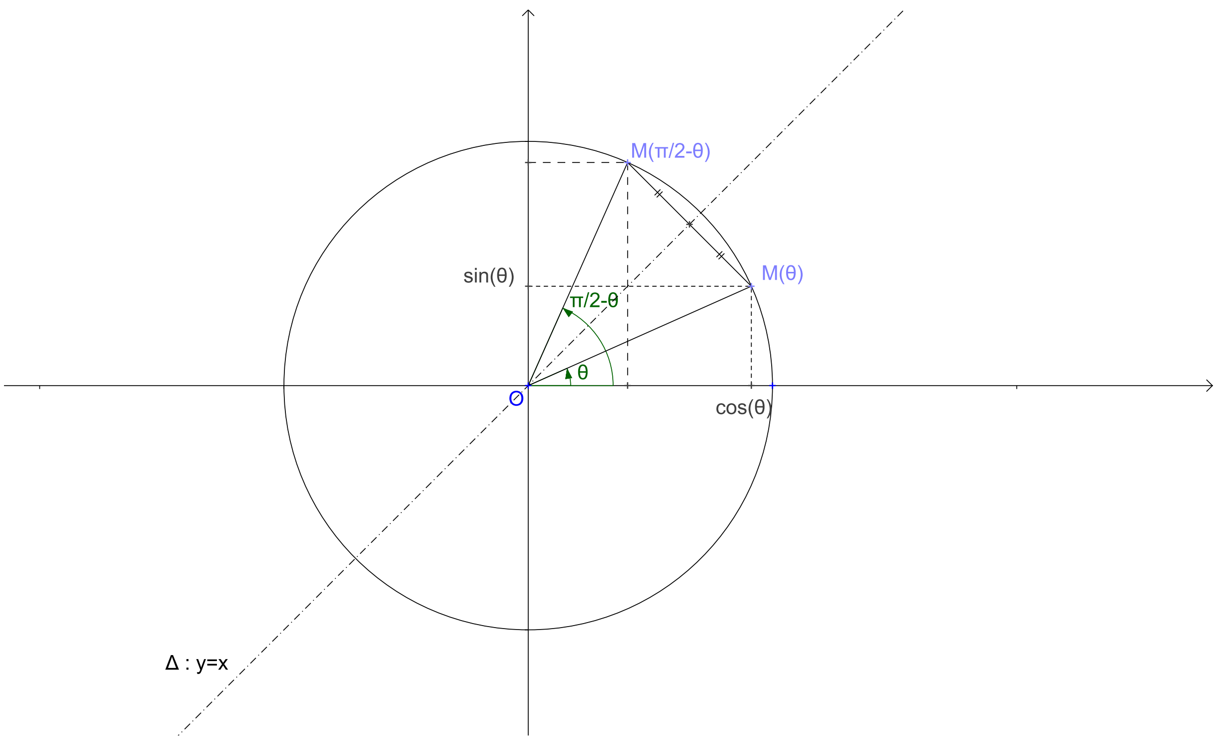


$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \quad \cos(\theta) & \cos(\pi-\theta) &= -\cos(\theta) & \cos(\pi+\theta) &= -\cos(\theta) \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) & \sin(\pi-\theta) &= \quad \sin(\theta) & \sin(\pi+\theta) &= -\sin(\theta) \\ \tan(-\theta) &= -\tan(\theta) & \tan(\pi-\theta) &= \quad -\tan(\theta) & \tan(\pi+\theta) &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

Remarque :

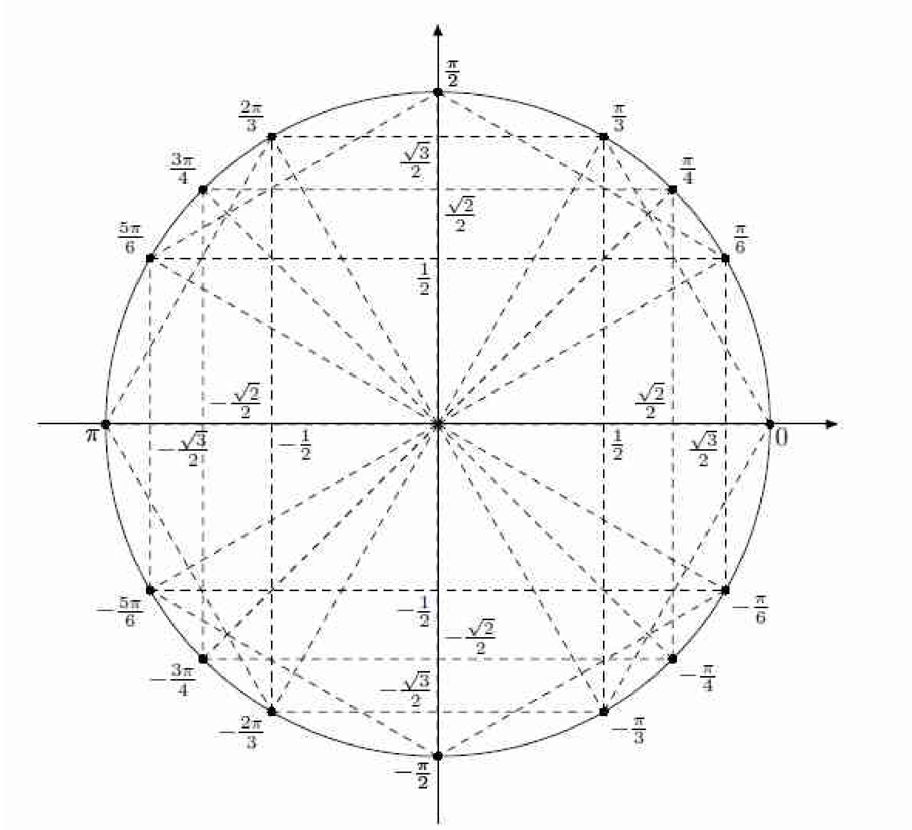
Les fonctions sinus et tangente sont impaires. La fonction cosinus est paire.

Avec la première bissectrice :



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

1.3.5 Valeurs remarquables.



1.3.6 Formules.

Formule d'addition.

A savoir par cœur :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

On en déduit en remplaçant β par $-\beta$:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

On en déduit les formules suivantes : (*en prenant* $\alpha = \beta = \theta$)

Formules de duplications.

$$\cos(2\theta) \;=\; \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \qquad \sin(2\theta) \;= 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

On en déduit avec la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$$\cos(2\theta) \;=\; 2\cos^2(\theta) - 1 \qquad \cos(2\theta) \;=\; 1 - 2\sin^2(\theta)$$

1.3.7 Equations.

Théorème.

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(\theta) = \cos(\theta') \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = -\theta' + 2k\pi$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta') \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \pi - \theta' + 2k\pi$$

Pour tout $(\theta, \theta') \in (D_{tan})^2$,

$$\tan(\theta) = \tan(\theta') \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad \theta = \theta' + k\pi$$

Proposition.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

Si $x^2 + y^2 = 1$,

alors le système d'équations d'inconnue $\theta \in [0; 2\pi[$, $\begin{cases} \cos(\theta) = x \\ \sin(\theta) = y \end{cases}$ a une unique solution.

alors le système d'équations d'inconnue $\theta \in]-\pi; \pi]$, $\begin{cases} \cos(\theta) = x \\ \sin(\theta) = y \end{cases}$ a une unique solution.

Proposition.

Quel que soit $x \in [-1, 1]$,

① Il existe un unique réel θ appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = x$

② Il existe un unique réel θ appartenant à $[0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

③ il existe un unique réel θ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = x$

1.3.8 Arcsinus, arccosinus et arctangente.

Définitions.

Soit $x \in [-1, 1]$,

① On appelle **arcsinus** de x l'unique réel θ appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = x$

② On appelle **arccosinus** de x l'unique réel θ appartenant à $[0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

③ On appelle **arctangente** de x l'unique réel θ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = x$

Démonstration : *Montrons que la définition de l'arcsinus d'un réel de* $[-1, 1]$ *est possible, autrement dit que ce réel* θ *existe et est bien unique.*

On note f la fonction : $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ (Cette fonction est la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$)

❶ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est un intervalle,

❷ f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

❸ f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

donc (*Théorème de la bijection*)

$$\forall k \in \left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right); f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right], \exists!\, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] : \ f(\alpha) = k$$

donc

$$\forall x \in [-1;1]\,, \ \exists!\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] : \ \sin(\theta) = x$$

Autrement dit : quel que soit le réel x de $[-1;1]$, il existe un réel θ de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui est tel que $\sin(\theta) = x$.

— —

Illustration sur le cercle trigonométrique.

Remarques :

• Pour x un réel de $[-1,1]$, l'arccosinus de x est l'arc de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

• Pour x un réel de $[-1,1]$, l'arcsinus de x est l'arc de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.

• Pour x un réel quelconque, l'arctangente de x est l'arc de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

Propriétés :

①
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arcsin(\sin(x)) = x \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

②
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos(\cos(x)) = x \iff x \in [0;\pi]$$

③
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(\tan(x)) = x \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

1.3.9 Transformation d'une expression de la forme : a cos(x)+b sin(x).

On cherche à transformer une expression de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ en une expression de la forme $r\cos(x-\varphi)$ a, b, x, r, φ des réels avec $(a,b) \neq (0,0)$.

En trois étapes :

❶ On met en facteur $\sqrt{a^2+b^2}$,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(x)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin(x)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

❷ On cherche φ tel que : $\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

On peut trouver un tel φ car le point de coordonnées $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;\,\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ est sur le cercle trigonométrique.

❸ on a alors : $\quad a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\,\left(\cos(x)\cos(\varphi)+\sin(x)\sin(\varphi)\right)$

$$a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\left(x-\varphi\right)$$

En pratique pour l'étape ❷ :

• Dans les cas le plus simples : on trouve φ parmi les valeurs remarquables.

(Inutile et dangereux de parler d'arctangente, ...).

Exemples :

$$\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}\,\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\qquad\qquad \sqrt{3}\,\cos(x)+\sin(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

• Dans les autres cas on exprime φ à l'aide des fonctions arctan, arccos ou arcsin.

Avec arctangente quand $a\neq 0$: on cherche φ vérifiant $\tan(\varphi)=\dfrac{b}{a}$, donc (pour un entier k) :

$$\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2k\pi\qquad\text{ou}\qquad\varphi=\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2k\pi$$

C'est le signe de a qui permet de choisir un φ convenant :

si $a>0$ on peut prendre $\varphi=\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$, sinon on prend $\varphi=\pi+\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Exemples :

$$4\cos(x)-3\sin(x)=5\cos\left(x+\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\qquad\qquad -\cos(x)-3\sin(x)=\sqrt{10}\,\cos\left(x-\pi-\arctan\left(3\right)\right)$$

Remarques :

- Dans le deuxième exemple, on a : $\begin{cases} -\cos(x)-3\sin(x)=-(\cos(x)+3\sin(x)) \\ \cos(x)+3\sin(x)=\sqrt{10}\,\cos\left(x-\arctan\left(3\right)\right)\end{cases}$

ce qui permet de retrouver le résultat en sachant que $\cos(\theta-\pi)=-\cos(\theta)$.

- On peut facilement vérifier le résultat si on se souvient des formules démontrées dans le DM4.

$$\cos(\arctan(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\qquad\text{et}\qquad\sin(\arctan(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Compléments.

Dans la suite on notera : $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Avec arccosinus : on cherche φ vérifiant $\cos(\varphi)=\dfrac{a}{r}$, donc (pour un entier k) :

$$\varphi=\arccos\left(\frac{a}{r}\right)+2k\pi\qquad\text{ou}\qquad\varphi=-\arccos\left(\frac{a}{r}\right)+2k\pi$$

C'est le signe de b qui permet de choisir un φ convenant :

si $b > 0$ on peut prendre $\varphi = \arccos\left(\dfrac{a}{r}\right)$, sinon on prend $\varphi = -\arccos\left(\dfrac{a}{r}\right)$

Exemples :

$$4\cos(x) - 3\sin(x) = 5\cos\left(x + \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) \qquad \cos(x) + 3\sin(x) = \sqrt{10}\,\cos\left(x - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

Avec arcsinus : on cherche φ vérifiant $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{r}$, donc (pour un entier k) :

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) + 2k\pi$$

C'est le signe de a qui permet de choisir un φ convenant :
si $a > 0$ on peut prendre $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{b}{r}\right)$, sinon on prend $\varphi = \pi - \arcsin\left(\dfrac{b}{r}\right)$

Exemples :

$$4\cos(x) - 3\sin(x) = 5\cos\left(x + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \qquad -\cos(x) + 3\sin(x) = \sqrt{10}\,\cos\left(x - \pi + \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

Remarque.

On peut vérifier les résultats en connaissant les formules vues en TD pour tout réel $x \in [-1;1]$,

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

1.3.10 Linéarisation

Etant donnés deux entiers naturels m et n et un réel θ, linéariser $\cos^m(\theta)\,\sin^n(\theta)$ c'est l'exprimer comme somme de termes de la forme $\lambda\cos(k\theta)$ ou $\lambda\sin(k\theta)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

① Remplacer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par respectivement $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler).

② Développer entièrement l'expression en nombre complexes (*souvent en utilisant la formule du binôme*).

③ Réutiliser les formules d'Euler pour revenir à des cosinus et des sinus (des nombres réels).

1.4 Méthodes de calcul.

1.4.1 Sommes.

<u>**Définition.**</u>

Soient m et n deux entiers, et $a_0, \ldots, a_k, \ldots$ des nombres complexes.

pour $n < m$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m$ et pour $n \geqslant m$ $\displaystyle\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$

plus simplement : quand $n \geqslant m$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{a_m + \cdots + a_n}_{n-m+1 \text{ termes}}.$

Des sommes à connaître.

$(n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ (m \leqslant n) \quad \text{et} \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1 \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Formule de Bernoulli.

Soient n un entier naturel et (a,b) un couple de nombres complexes.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Linéarité.

Pour λ un nombre complexe, (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes.

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda\, a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

"Relation de Chasles".

Si n_1, n_2 et n_3 sont trois entiers vérifiant $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$, on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_3} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} a_k \quad \text{ou} \quad = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k + \sum_{k=n_2}^{n_3} a_k$$

Changement d'indice.

Translation ou décalage.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$$

Symétrie ou lecture inverse.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \qquad \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_{n+p-k}$$

Sommes télescopiques.

Lorsque les a_k peuvent s'écrire $u_{k+1} - u_k$ ou $u_k - u_{k+1}$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m \qquad \sum_{k=m}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_m - u_{n+1}$$

Sommes et inégalités

Soient (a_k) et (b_k) deux suites de nombres réels et n un entier naturel,

Si pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k \leqslant b_k$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} b_k$

Séparation des termes d'indice pair et d'indice impair.

Soit (a_n) une suite de nombre complexes,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}$$

1.4.2 Produits, factorielles.

Définition.

Soient m et n deux entiers, et $a_0, \cdots a_n ...$ des nombres complexes.

$$\forall n < m, \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \ , \qquad \prod_{k=m}^{m} a_k = a_m \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant m \quad \prod_{k=m}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k \right) \times a_{n+1}$$

Autrement dit, quand $n \geqslant m$: $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{a_m \times \cdots \times a_n}_{n-m+1 \text{ facteurs}}$

Factorielle. notation $n!$

Définition.

On appelle factorielle d'un entier naturel n l'entier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$, on le note $n!$.

$$0! = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$

Autrement dit :

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n}_{\text{produit de tous les entiers compris entre 1 et } n} = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$0! = 1$	$5! = 120$	$10! = 3\,628\,800$
$1! = 1$	$6! = 720$	...
$2! = 2$	$7! = 5\,040$	...
$3! = 6$	$8! = 40\,320$	...
$4! = 24$	$9! = 362\,880$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Factorielle 100 :

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000

Produits à connaître

Pour $a \in \mathbb{C}$ et n, m deux entiers vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1} \qquad , \qquad \prod_{k=m}^{n} k = \frac{n!}{(m-1)!}$$

Propriétés.

Soient m, n deux entiers tels que $m \leqslant n$, $a_0, \cdots a_n$... et $b_0, \cdots b_n$... des suites de nombres complexes non nuls.

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k \qquad \prod_{k=m}^{n} (a_k b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k \qquad \prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k}$$

et pour p un entier :

$$\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p = \prod_{k=m}^{n} a_k^p$$

"Relation de Chasles".

Soient n_1, n_2 et n_3 sont trois entiers vérifiant $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ et $a_0, \cdots a_k$... des nombres complexes.

$$\prod_{k=n_1}^{n_3} a_k = \prod_{k=n_1}^{n_2} a_k \times \prod_{k=n_2+1}^{n_3} a_k$$

Changement d'indice.

Soient n, m et p sont trois entiers et $a_0, \cdots a_k$... des nombres complexes.

Translation ou décalage.

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$$

Symétrie ou lecture inverse.

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{n} a_{n-k} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \qquad \prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{n} a_{n+p-k}$$

Produits télescopiques.

Lorsque les a_k peuvent s'écrire $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ ou $\dfrac{u_k}{u_{k+1}}$ et pour $m \leqslant n$

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m} \qquad \prod_{k=m}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_m}{u_{n+1}}$$

Produits et inégalités

Soient (a_k) et (b_k) deux suites de nombres réels et n un entier,

Si pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ alors $0 \leqslant \prod_{k=0}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=0}^{n} b_k$

Exponentielle et logarithme.

Exponentielle d'une somme :

Pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k)$$

Logarithme népérien d'un produit :

Pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$$

1.4.3 Coefficients binomiaux.

Définition.

Soient n, p deux entiers relatifs, on définit $\binom{n}{p}$ par :

si $0 \leqslant p \leqslant n$: $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ sinon, $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Remarques :

- On lit "p parmi n".
- Dans un schéma de Bernoulli de profondeur n : $\binom{n}{p}$ est le nombre de chemins avec exactement p succès.

Formules.

(*A bien connaître*)

Soient n, p deux entiers naturels ,

(1) $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (2) $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ (3) $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$

Autour de ces formules :

(2) donne : $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p+1} = \cdots = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$

(2) donne : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$

(3) donne : $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \times \frac{n-1}{p-1}\binom{n-2}{p-2} = \cdots = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$

(3) donne : $\displaystyle p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ ou encore : $\displaystyle p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$

Cas particuliers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Avec la notation produit :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{p!} \qquad \binom{n}{p} = \prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \prod_{k=1}^{p}\frac{(n-k+1)}{k}$$

En pratique :

$$\binom{8}{3} = \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56 \qquad \binom{32}{5} = \frac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 8\times 31\times 29\times 28$$

Triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Formule du binôme de Newton.

> Soient n un entier naturel et (a,b) un couple de nombres complexes,
>
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Démonstration : (*En deux étapes*)

❶ Fixons x dans $\mathbb{C}$ et montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, $\displaystyle (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

(I) Pour $n = 0$,

on a $(1+x)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^k = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

(H) Prenons un entier n et supposons que : $\displaystyle (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$,

on sait que $(x+1)^{n+1} = (x+1)(x+1)^n$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^k + x^{n+1}\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + x^{n+1} \qquad \text{(formule du triangle de Pascal)}\\
(1+x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k \qquad \text{(propriété au rang } n+1\text{)}
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.}$$

❷ Montrons maintenant que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$:

1er cas : Pour $b=0$, la propriété est immédiate. (*Dans la somme tous les termes sont nuls pour* $k=0$)

2eme cas : Pour $b \neq 0$, on applique le résultat montrer en ❶ avec $x = \frac{a}{b}$ $(= ab^{-1})$, on obtient :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\, b^{-k}$$

en multipliant par b^n les deux membres de cette égalité, il vient ce que l'on cherchait :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Remarques :

- (en inversant a par b)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k} b^{k}$$

- (en remplaçant b par $-b$)

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k} b^{k}$$

<u>Sommes à connaître.</u>

(*et à savoir démontrer*)

❶ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n}$ *Prendre $a=1$ et $b=1$ dans la formule du binôme.*

❷ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0}$ *Prendre $a=1$ et $b=-1$ dans la formule du binôme.*

❸ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$

Il suffit d'utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, *puis de retrouver la somme* ❶ *avec* $n-1$.

❹ $\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$

Vue dans 4.3.2. , mais on peut aussi voir une somme télescopique avec $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$

Formule de Vandermonde.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}}$$

1.4.4 Sommes doubles.

Dans ce paragraphe pour tout couple d'entiers (i,j), $a_{i,j}$ désigne un nombre complexe.

Somme double rectangulaire.

On note $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$ la somme de tous les nombres a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

On peut aussi noter :

$$\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Produits de deux sommes simples.

Dans le cas où $a_{ij} = \alpha_i\beta_j$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \alpha_i\beta_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i\right)$$

Attention : Ne pas inventer de formule !!!

$$\text{En général :}\quad \sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

Somme double triangulaire.

On note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ la somme de tous les a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m avec la contrainte $i \leqslant j$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)}_{\textit{Formule de Fubini}}$$

On peut aussi noter :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

On note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}$ la somme de tous les a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m avec la contrainte $i<j$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

Remarque : On pourrait aussi écrire :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

Linéarité.

λ désigne un nombre complexe.

$$\boxed{\sum_{(i,j)} \lambda\, a_{ij} = \lambda \sum_{(i,j)} a_{ij} \qquad\qquad \sum_{(i,j)} (a_{ij}+b_{ij}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} + \sum_{(i,j)} b_{ij}}$$

1.5 Vocabulaire des applications.

1.5.1 Introduction.

Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

Notations et définitions :

• *(une définition rigoureuse mais pas nécessaire dans ce cours)* Une application peut-être définie par le triplet (E,F,C) où $C\subset E\times F$ avec la propriété : $\forall x\in E, \exists! y\in F :\ (x,y)\in C$

• Pour x dans E, l'unique élément de F lié à x est appelé **image de x par f** et on le note $\boldsymbol{f(x)}$.

On note : $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ "f est l'application qui va de E dans F et qui à x associe $f(x)$".

• Soit $y\in F$,
on appelle **antécédent** de y par f, tout élément x de E vérifiant : $f(x)=y$

• Les éléments de F qui sont l'image d'un élément de E sont appelés **valeurs** de f.

• On note $f(E)$ l'ensemble des valeurs prises par f.
Autrement dit : $f(E)=\{f(x)\mid x\in E\}$ ou encore $f(E)=\{\ y\in F \mid \exists x\in E :\ y=f(x)\ \}$

• E est l'**ensemble de départ** de f, ou encore son ensemble de définition.
(*certains parlent aussi de "source"*)

• F est l'**ensemble d'arrivée** de f, (*certains parlent aussi de "but"*)
(*cet ensemble contient l'ensemble des valeurs prises par f*)

• On note F^E l'**ensemble des applications** de E dans F.

Des exemples à connaître :

① **Cardinal.**
Soit E un ensemble contenant un nombre fini d'éléments.
On note card l'application qui à toute partie de E associe le nombre d'élément de A.

② **Application identitée de E :** On note Id_E l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Egalité entre deux applications :

Deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ sont égales si, et seulement si,

$$E = E' \quad , \qquad F = F' \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

Restriction et prolongement :

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Pour A est une partie de E, $(A \subset E)$
on appelle restriction de f à A, notée $f_{|A}$, l'application de A dans F, vérifiant : $\forall x \in A, \quad f_{|A}(x) = f(x)$.

Pour B un ensemble contenant E, $(E \subset B)$,
on appelle prolongement à B de f toute application g de B dans F vérifiant : $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$

Remarques :

- $\begin{array}{rrcl} f_{|A} : & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
- g est un prolongement de f ssi f est une restriction de g.

Image directe d'une partie de l'ensemble de départ.
Définition :

Soit A une partie de E, on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A,
on dit que $f(A)$ est l'**image directe** de A par f.
Autrement dit : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ ou encore $f(A) = \{ \, y \in F \mid \exists x \in A : \; y = f(x) \, \}$

1.5.2 L'application composée.

E, F et G sont trois ensembles quelconques.
Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications,
l'application de E dans G qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **(application) composée** de f par g.
On la note : $g \circ f$

On utilise souvent l'extension de cette définition :

Soient $f : A \to B$ et $g : C \to D$ deux applications telles que $f(A) \subset C$,
l'application de A dans D qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **(application) composée** de f par g.
On la note : $g \circ f$

Remarques :

- On a : $\begin{array}{rrcl} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g \circ f(x) \quad (= g\,(f(x))) \end{array}$
- L'ensemble de départ de $g \circ f$ est celui de f et son ensemble d'arrivée est celui de g.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & & & & \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g\,(f(x)) \end{array}$$

Proposition :

Etant données, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications, on a :

$$Id_F \circ f = f \;, \qquad f \circ Id_E = f \qquad \text{et} \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Attention : en général, $g \circ f \neq f \circ g$.

1.5.3 Injections, surjections.

Injection.

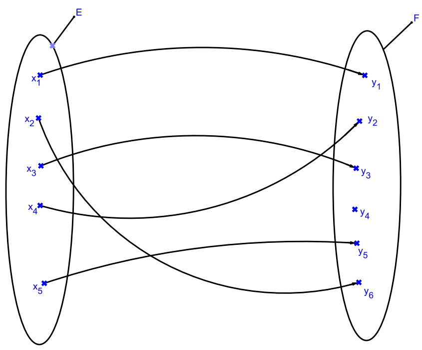
f est une application de E dans F.

Définition :

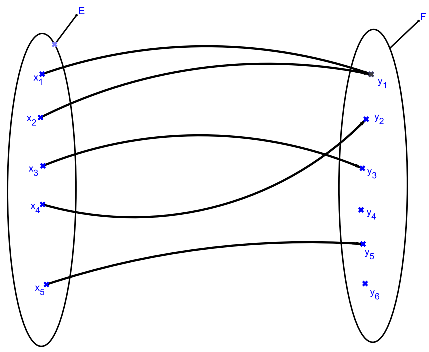
Dire que f est une **injection** (ou est injective) signifie que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$f : E \longrightarrow F$

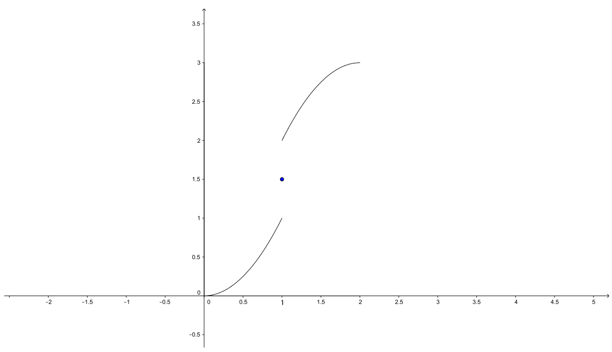


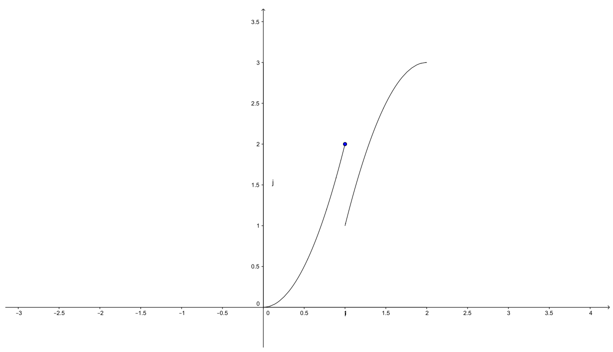
Application injective



Application non injective.

$f : [0, 2] \to [0, 3]$





Remarques :

- f est injective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent par f.
- Une autre définition : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

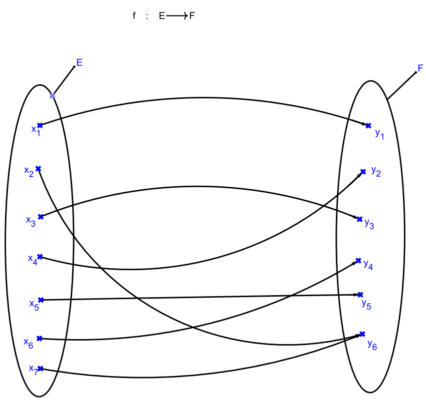
Surjection.

f est une application de E dans F.

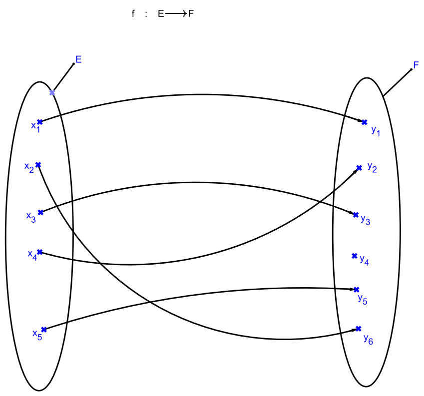
Définition :

Dire que f est une **surjection** (ou est surjective) signifie que :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E : \quad y = f(x)$$

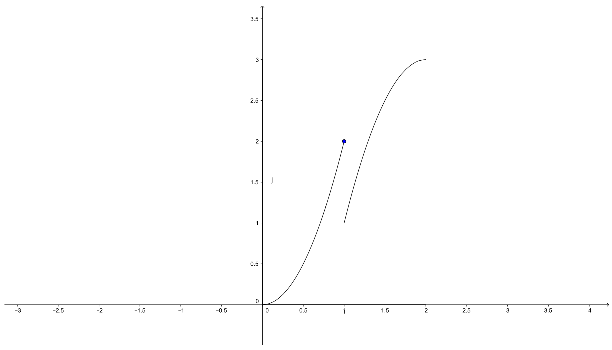


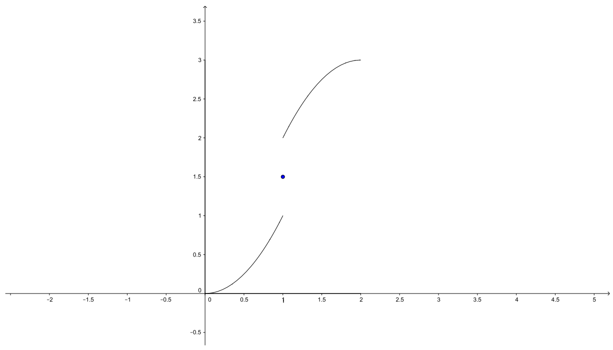
Application surjective



Application non surjective.

$$f : [0,2] \to [0,3]$$





Remarques :

- f est surjective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent par f.
- Pour savoir si f est surjective on cherche à résoudre $f(x) = y$ pour un y quelconque dans F.

1.5.4 Bijection et application réciproque.

Définition : (bijection)

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F,

Dire que f est **une bijection** (ou est bijective) signifie que : $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \ : \quad y = f(x)$

Remarque : f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective.

Définition : (application réciproque)

Soients E, F deux ensembles et f une application de E dans F,

Lorsque f est une bijection :

on peut définir l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Cette application notée f^{-1} est appelée **réciproque** de f.

Remarques :

- En résumé *(mais dangereux à l'usage)* :

  quand f est une bijection, $\quad f^{-1} : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x \quad \text{tel que } f(x) = y \end{array}$

- Dire que f est une bijection de E dans F signifie :

  Quel que soit $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique x de E vérifiant $f(x) = y$.

Nous avons déjà rencontré cette notion.

❶ La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est une bijection, sa réciproque est l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Autrement dit : Pour y un réel positif, $\sqrt{y}$ est l'unique réel positif x vérifiant $x^2 = y$.

❷ La fonction $\begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$ est une bijection, sa réciproque est l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$

Autrement dit : Pour y un réel quelconque, $\arctan(y)$ est l'unique réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(x) = y$.

❸ La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$ est une bijection, sa réciproque est l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$

Autrement dit : Pour y un réel strictement positif, $\ln(y)$ est l'unique réel x vérifiant $e^x = y$.

Propositions :

Si f est une bijection, alors :

① $\forall (x,y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

② $f \circ f^{-1} = Id_F \qquad f^{-1} \circ f = Id_E$

③ f^{-1} est une bijection de F dans E

④ l'application réciproque de f^{-1} est alors égale à f : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Remarques :

• De plus en plus souvent on dit "bijection réciproque" au lieu de réciproque.

• L'égalité $f \circ f^{-1} = Id_F$ signifie $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$

• L'égalité $f^{-1} \circ f = Id_E$ signifie $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$

Théorème : (La composée de deux bijections est une bijection)

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et l'application réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration :

On suppose connaître $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections,

montrons qu'alors l'application $g \circ f$ est une bijection de E dans G.

Prenons un z dans G, *(Je prends un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée)*

Pour $x \in E$,

$$\begin{array}{rcll} g \circ f(x) = z & \iff & g(f(x)) = z & \textit{(Déterminons les antécédents de ce } z \textit{ par } g \circ f\textit{)} \\ & \iff & f(x) = g^{-1}(z) & \text{car } g \text{ est bijective} \\ & \iff & x = f^{-1}(g^{-1}(z)) & \text{car } f \text{ est bijective} \\ & \iff & x = f^{-1} \circ g^{-1}(z) & \text{qui est bien un élément de } E \end{array}$$

Donc tout élément de G possède un unique antécédent par $g \circ f$ dans E, donc $g \circ f$ est une bijection de E dans G.

Plus "simplement" : $\forall z \in G, \exists! x \in E :\ g \circ f(x) = z$ donc $\boxed{g \circ f \text{ est une bijection de } E \text{ dans } G}$

On a montré, de plus, que l'antécédent d'un z quelconque de G est donné par $f^{-1} \circ g^{-1}(z)$,

donc la réciproque de $g \circ f$ est l'application $\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & E \\ z & \longmapsto & f^{-1} \circ g^{-1}(z) \end{array}$,

autrement dit : $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$

Théorème

Une application $f : E \to F$ est une bijection si, et seulement si, il existe $g : F \to E$ telle que $$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F$$ et alors g est la **réciproque** de f.

Démontrons pour une application $f : E \to F$ que :

S'il existe une application $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

alors f est une bijection et $f^{-1} = g$.

− − − − − − − − − −

On suppose qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

• Soit x_1 et x_2 deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$,
on a alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ et comme on a : $g \circ f = Id_E$ on en déduit que $x_1 = x_2$

L'application f est donc injective.

• Soit y un élément de F,
on a $f \circ g = Id_F$ donc $f \circ g(y) = y$ ou encore $y = f\left(g(y)\right)$
en posant $x = g(y)$ on bien x dans E et $f(x) = y$

L'application f est donc surjective.

• Une fois que l'on sait que f est bijective, on peut parler de f^{-1} sa réciproque.
On a $g \circ f = Id_E$ donc $g \circ f \circ f^{-1} = Id_E \circ f^{-1}$ et comme $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $Id_E \circ f^{-1} = f^{-1}$ il vient :

$$g = f^{-1}$$

Corollaire :

Soit $f : E \to E$, $f \circ f = Id_E$ si, et seulement si, f est bijective et $f^{-1} = f$.

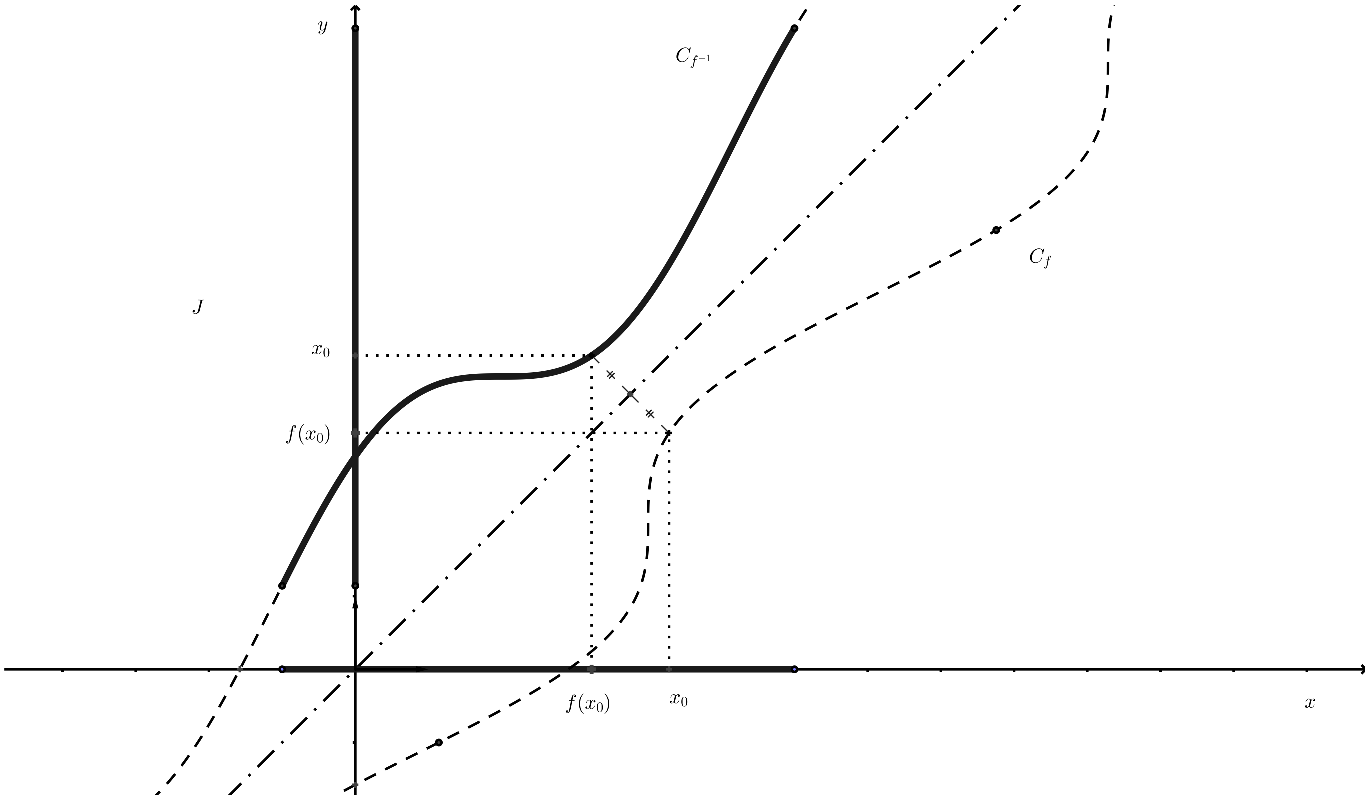
Définition : Lorsque $f \circ f = Id_E$ on dit que f est **involutive**.

Des propriétés spécifiques aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

Soient D_1 et D_2 deux parties de $\mathbb{R}$, Si f réalise une bijection de D_1 dans D_2 alors : ❶ $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$. ❷ Si f est impaire alors f^{-1} est impaire. ❸ Si f est strictement croissante sur D_1 alors f^{-1} est strictement croissante sur D_2. ❹ Si f est strictement décroissante sur D_1 alors f^{-1} est strictement décroissante sur D_2.

Remarque :

f réalise une bijection de D_1 dans D_2 signifie que l'application $\begin{array}{ccc} D_1 & \longrightarrow & D_2 \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est correctement définie et est bijective.



1.5.5 Fonctions indicatrices.

Définition :

> Soient E un ensemble et A une partie de E,
> On appelle **fonction indicatrice** de A,
> l'application de E dans $\{0,1\}$ qui x associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

Propositions :

① Soit A une partie de E,

$$\forall x \in E, \qquad \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$$

② Soient A et B deux parties de E,

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

③ Si A est une partie de E, alors

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

④ Soient A et B deux parties de E,

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$$

⑤ Soient A et B deux parties de E,

$$\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \iff A \subset B$$

⑥ Soient A_1, A_2, ..., A_p et B des parties de E,

$$\mathbb{1}_B = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{1}_{A_k} \iff (A_1, A_2, ..., A_p) \quad \text{est une partition de } B$$

Remarques :

- $\mathbb{1}_\varnothing = 0$ (*l'application constante égale à zéro*)
- $\mathbb{1}_E = 0$ (*l'application constante égale à un*)

- $\Phi : A \longmapsto \mathbb{1}_A$ réalise une bijection de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0;1\}^E$

Démonstration :

– Montrons l'implication $\boxed{\Rightarrow}$ de ④ qui revient à montrer l'injectivité de Φ

On suppose que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$,

on a alors pour $x \in E$,

$$\begin{array}{rcll} x \in A & \Longleftrightarrow & \mathbb{1}_A(x) = 1 & \text{avec 1.} \\ & \Longleftrightarrow & \mathbb{1}_B(x) = 1 & \text{car } \mathbb{1}_A = \not\Vdash_B \\ & \Longleftrightarrow & x \in B & \text{avec 1.} \end{array}$$

Cette équivalence montre que $A = B$ et cela achève la démonstration de l'injectivité de Φ.

– Montrons, maintenant la surjectivité de Φ.

Soit f une application de $\{0;1\}^E$, (*On prend un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée*).

On note $A = \{x \in E \mid f(x) = 1\}$,

Montrons que $\Phi(A) = f$ ou encore $1_A = f$

si $x \in A$, par définition de A, $f(x) = 1$ et $1_A(x) = 1$ donc $f(x) = 1_A(x)$

si $x \notin A$, par définition de A, $f(x) \neq 1$,

et comme f ne prend pour valeur que 0 et 1 alors $f(x) = 0$ et commme $1_A(x) = 0$ on a bien $f(x) = 1_A(x)$

dans tous les cas $f(x) = 1_A(x)$ donc $f = 1_A$

on a bien montré que tout élément de $\{0;1\}^E$ possède un antécédent par Φ et ainsi Φ est surjective.

- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

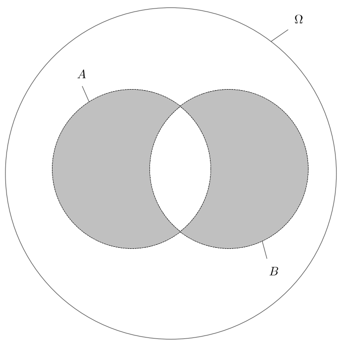
- $\mathbb{1}_{A\cup B\cup C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C$

Démonstration :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\cup B\cup C} & = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}} \\ & = & 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} \times \mathbb{1}_{\overline{B}} \times \mathbb{1}_{\overline{C}} \\ & = & 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_C) \\ & = & 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C) \\ & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C \end{array}$$

- On définit la différence symétrique entre deux parties de E : $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Diagramme de Venn de $A\Delta B$.



Cette loi est commutative. $A\Delta B = B\Delta A$.

Démontrons que cette loi est associative.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}} + \mathbb{1}_{\overline{A}\cap B} - \mathbb{1}_\varnothing \\ & = & \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + (1 - \mathbb{1}_A)\mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \times \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \end{array}$$

On a *(fait en classe)* :

$$\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\left(\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C\right) + 4\times\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C$$

On a de même (*on peut le justifier sans calcul*) :

$$\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\left(\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C\right) + 4\times\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C$$

On a donc : $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ ce qui entraîne avec ④ $\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}$

1.6 Ensembles finis. Dénombrement.

1.6.1 Généralités

Définition :

> Dire qu'un ensemble non vide E est fini
> signifie qu'il existe un entier naturel n et une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans E.
> Ce nombre n est alors unique et est appelé cardinal de E.

Remarques :
- on note : $\text{card}(E)$ ce nombre entier (ou encore $\#(E)$). ($\text{card}(E) \in \mathbb{N}$)

- E est fini lorsqu'on peut numéroter ses éléments avec un nombre limité de numéros.
  Le cardinal de E est alors le nombre d'éléments de E.

- Un ensemble fini E de cardinal n peut s'écrire :
$$E = \{e_k \mid k \in \{1, ..., n\}\} \text{ avec : } \forall i \neq j, \quad e_i \neq e_j$$

- $\varnothing$ est un ensemble fini et $\text{card}(\varnothing) = 0$

- Si a et b sont deux entiers relatifs vérifiant $a \leqslant b$, alors :
$$\text{card}\left([\![a;b]\!]\right) = b - a + 1$$

- Lorsqu'un ensemble E n'est pas fini on dit qu'il est **infini**. Exemples : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$,$[\,0\,,1\,]$ ...

Attention : pour les ensembles de nombres ne pas confondre bornée et finie.

Proposition :

> Soient E et F deux ensembles finis,
> E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre E et F.

Remarque :
Dans la suite du cours dans la plupart des propositions, on commence par :

"Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^*$,"

Pour les démonstrations, il suffit de les faire pour $E = [\![1;n]\!]$.

1.6.2 Propriétés du cardinal.

Propositions : (*parties d'un ensemble fini*)

> ① Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.
> Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E,
> ② **Si** $A \subset B$ **alors** $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$
>
> ③ $A \subset B$ et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ **si, et seulement si,** $A = B$.
>
> ④ **Si** A et B sont deux parties disjointes de E (ie : $A \cap B = \varnothing$), **alors** :
> $$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Remarques :
- Si un ensemble contient une partie infinie, il est lui aussi infini.

- Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

- $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Théorème : (*Réunion de parties deux à deux disjointes.*)

Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de p parties deux à deux disjointes, alors

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{card}(A_i)$$

Remarque :

• Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une **partition** d'un ensemble B alors : $\operatorname{card}(B) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{card}(A_i)$

Théorème : (*Réunion de deux ou trois parties quelconques.*)

• Si A et B sont deux parties de E, alors :

$$\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A\cap B)$$

• Si A, B et C sont trois parties de E, alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B\cup C) &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C)\\ &\quad - \operatorname{card}(A\cap B) - \operatorname{card}(B\cap C) - \operatorname{card}(A\cap C) + \operatorname{card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Théorème : (*produit cartésien*)

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A\times B$ est fini et :

$$\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card}(A)\operatorname{card}(B)$$

Illustration :

En notant : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ avec $n = \operatorname{card}(A)$ et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ avec $m = \operatorname{card}(B)$.

$$A\times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (a_1,b_1), & (a_1,b_2), & \cdots & ,(a_1,b_m), \\ (a_2,b_1), & (a_2,b_2), & \cdots & ,(a_2,b_m), \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_n,b_1), & (a_n,b_2), & \cdots & ,(a_n,b_m) \end{array} \right\}$$

Le nombre d'éléments de $A\times B$ est égal à : $n\times m$.

Proposition :

Si $(E_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de p ensembles finis, alors $E_1\times\cdots\times E_p$ est fini et :

$$\operatorname{card}(E_1\times\cdots\times E_p) = \operatorname{card}(E_1)\times\cdots\times\operatorname{card}(E_p)$$

Exemple avec : $E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{0,1,2\}$ et $E_3 = \{0,1\}$

$$\begin{aligned}E_1\times E_2\times E_3 = \Big\{&(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,0),(1,2,1),\\ &(2,0,0),(2,0,1),(2,1,0),(2,1,1),(2,2,0),(2,2,1)\Big\}\end{aligned}$$

Le cardinal de $E_1\times E_2\times E_3$ est égal à 12.

Proposition :

Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et A un ensemble fini, l'ensemble A^p est fini et :

$$\operatorname{card}\left(A^p\right) = (\operatorname{card}(A))^p$$

Remarque :

$$A^p = \underbrace{A \times\cdots\times A}_{n \text{ fois l'ensemble A}}$$

Exemple avec : $A = \{1,2\}$ et $p = 4$

$$\begin{aligned}A^4 = \Big\{&(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1),(1,1,2,2),(1,2,1,2),(2,1,1,2),\\ &(1,2,2,1),(2,1,2,1),(2,2,1,1),(1,2,2,2),(2,1,2,2),(2,2,1,2),(2,2,2,1),(2,2,2,2)\Big\}\end{aligned}$$

Le cardinal de A^4 est égal à 2^4.

1.6.3 Dénombrement des ensembles classiques.

Ensemble des p-listes.

Définition :

On appelle p-listes d'un ensemble E, les éléments du produit cartésien E^p.

Notation : Les listes sont notées : $(x_1, x_2, ..., x_p)$, avec des parenthèses!!!

On rappelle que : $(x_1, x_2, ..., x_p) = (x'_1, x'_2, ..., x'_p) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = x'_i$

Proposition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n,
le nombre de p-listes E est égale à : n^p

Expérience classique qui amène des p-liste : *(Situation de référence)*
Dans un ensemble contenant n objets numérotés de 1 à n, on effectue p tirages **successifs, avec remise**. Les résultats de ces tirages, rangés dans l'ordre d'apparition, constituent une p-liste.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égale à n^p

C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, avec d'éventuelles répétitions.

Ensemble des p-listes sans répétition (arrangements).

Dire qu'une p-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est sans répétition signifie que

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Remarque : on parle aussi de p-arrangement.

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p strictement positifs ($p \leqslant n$) et E un ensemble de cardinal n.
Le nombre de p-listes sans répétition d'éléments de E est égal à : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Remarques :

Si $p > n$, alors il n'y pas de p-listes sans répétition d'éléments de E.

Le nombre de p-listes sans répétition de E est égal à : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ ou encore $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$

Expérience classique qui amène des p-liste sans répétition : *(Situation de référence)*
Soit n et p deux entiers non nuls.
Dans un ensemble contenant n objets numérotés de 1 à n, on effectue p tirages **successifs, sans remise**. Les résultats de ces tirages, rangés dans l'ordre d'apparition, constituent une p-listes sans répétition.

Le nombre de résultats différents de cette expérience est égal à $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, sans répétition.

Nombre de permutations.

Définition

Soit E un ensemble fini, une liste contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E.

Proposition

Si $\operatorname{card}(E) = n$ le nombre de permutations de E est égal à : $n!$.

Remarques :

Le nombre d'ordres que l'on peut donner aux n éléments de E est égal à $n!$.

C'est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.

Nombre de combinaisons d'un ensemble fini.

Définition :

> Soit p un entier naturel,
> une p-combinaison de E est un sous-ensemble (une partie) de E à p éléments.

Notations :

- On notera $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble des p-combinaisons de E.

$$A \in \mathscr{P}_p(E) \iff (A \subset E \quad \text{et} \quad \text{card}(A) = p)$$

- Une combinaison s'écrit $\boxed{\left\{x_1, x_2, \ldots, x_p\right\}}$ (des accolades ! !) avec $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

Remarque : Contrairement aux listes si on change l'ordre des éléments cela ne change pas la combinaison.

Proposition :

> Etant donné deux entiers n et p tels que $p \leqslant n$ et E un ensemble de cardinal n.
> Le nombre de p-combinaisons est égal à : $\dfrac{1}{p!} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dbinom{n}{p}$

Remarque : avec une p-combinaison on peut construire $p!$ listes sans répétition de p-éléments de E.

Expérience classique qui amène des p-combinaisons : *(Situation de référence)*
Soit n et p deux entiers non nuls.
Dans un ensemble contenant n objets numérotés de 1 à n, on effectue un tirage **simultané** de p objets.
Chaque résultat de ce tirage est une combinaison de p objets de l'ensemble.

> Le nombre de résultats différents de cette expérience est égal à : $\dbinom{n}{p}$

Nombre de parties d'un ensemble fini.

Proposition :

> Soit E un ensemble fini à n éléments, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et :
> $$\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

Démonstrations : (2 démonstrations)

❶ $(\mathscr{P}_p(E))_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est une partition de $\mathscr{P}(E)$ donc

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathscr{P}(E)) &= \sum_{p=0}^{n} \text{card}(\mathscr{P}_p(E)) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \\ &= (1+1)^n \quad = 2^n \end{aligned}$$

– –

❷ On note $e_1, e_2, ..., e_n$ les éléments de E.
On définit l'application $\Phi : \mathscr{P}(E) \to \{0;1\}^n$,
qui à chaque partie A de E associe la liste $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\{0;1\}^n$ définie par $\begin{array}{l} \text{si } e_i \in A \text{ alors } x_i = 1 \\ \text{si } e_i \notin A \text{ alors } x_i = 0 \end{array}$

Cette application est une bijection. sa réciproque est l'application de $\{0;1\}^n$ dans $\mathscr{P}(E)$,
qui à chaque liste $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\{0;1\}^n$ associe la partie A définie par : $\begin{array}{l} \text{si } x_i = 1 \text{ alors } e_i \in A \\ \text{si } x_i = 0 \text{ alors } e_i \notin A \end{array}$.

on a construit une bijection entre ces deux ensembles et on sait que $\text{card}(\{0;1\}^n) = 2^n$, donc

$$\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

1.6.4 Complément : Nombre d'anagrammes.

Théorème des anagrammes.

Soit un "mot" $\mathcal{M}$ formé de p lettres distinctes $A_1, A_2, \cdots A_p$, la lettre A_1 apparaît n_1 fois, ... , la lettre A_p apparaît n_p fois.
La longueur de $\mathcal{M}$ vaut $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.
Le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à :

$$\frac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_p!}$$

ou encore

$$\binom{N}{n_1}\binom{N-n_1}{n_2}\binom{N-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$$

1.6.5 Applications et cardinal.

Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Soit E de cardinal p et F de cardinal n, définir une application f de E dans F revient à donner la liste $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$ des images des p éléments de E par f, pour chacun d'eux il y a n choix possibles.

Le nombre d'applications de E dans F est donc égal à n^p

Nombre d'injections entre deux ensembles finis.

Soit E de cardinal p et F de cardinal n, définir une injection f de E dans F revient à donner la liste sans répétition $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$ des images des p éléments de E par f ; pour l'image de e_1 il y a n choix possibles, puis pour l'image de e_2, il y a $(n-1)$ choix possibles, ...

Le nombre d'injections de E dans F est donc égal à : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Nombre de bijections entre deux ensembles finis.

Soit E de cardinal n et F de cardinal n, définir une bijection f de E dans F revient à donner la liste sans répétition $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ des images des n éléments de E par f ; pour l'image de e_1 il y a n choix possibles, puis pour l'image de e_2, il y a $(n-1)$ choix possibles, ...

Le nombre de bijections de E dans F est donc égal à : $n!$.

Conditions suffisantes sur les cardinaux.

Proposition :

Soit E et F deux ensembles finis,
S'il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$
S'il existe une surjection de E dans F alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$
S'il existe une bijection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

Injections et ensembles finis.

Propositions :

Soit E et F deux ensembles quelconques,
En supposant qu'il existe une injection de E dans F :
- E est fini **si, et seulement si,** $f(E)$ est fini (et alors $\text{card}\,(f(E)) = \text{card}(E)$)
- **Si** F est fini **alors** E est fini et $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$
- **Si** E est infini **alors** F est infini.

Soit E et F deux ensembles finis,
- **S**'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E **alors** $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

Application entre deux ensembles de même cardinal.

Propositions :

Soit $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles finis tels que $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$

f est injective si, et seulement si, f est bijective.

f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

1.6.6 Somme sur un ensemble fini.

Définition, notation :

Soient E un ensemble fini, tel que $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ avec $\operatorname{card}(E) = n$
et f une application de E dans F avec F un ensemble muni d'une somme.

On note : $\displaystyle\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)$

Propositions :

Soit E un ensemble fini,

❶ Si A_1, A_2 , ..., A_p forment une partition de E alors :

$$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{x\in A_k} f(x) \right)$$

❷ Si σ est une bijection de E dans E,

$$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{x\in E} f(\sigma(x))$$

On ne change pas la somme si on modifie l'ordre dans lequel on fait la somme.

❸ $\displaystyle\operatorname{card}(E) = \sum_{x\in E} 1$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{x\in E} \lambda = \lambda \operatorname{card}(E)$

❹ Soit A une partie de E,

$$\operatorname{card}(A) = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$$

2

Suites réelles.

Plan du chapitre

2.1 Suites réelles.

2.1.1 Suites majorées, minorées, bornées.

Définitions.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles,

❶ Dire que (u_n) est majorée signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant M$

❷ Dire que (u_n) est minorée signifie que : $\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant m$

❸ Dire que (u_n) est bornée signifie que : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ m \leqslant u_n \leqslant M$

ou avec la valeur absolue.

❹ Dire (u_n) est bornée signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M$

2.1.2 Monotonie.

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles,

- dire que (u_n) est croissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$)
- dire que (u_n) est décroissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$)
- dire que (u_n) est strictement croissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1} \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n > 0$)
- dire que (u_n) est strictement décroissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n \quad$ (ou $\quad u_{n+1} - u_n < 0$)

En pratique : (*Plusieurs stratégies possibles*)

2.2 Limite de suite réelle.

2.2.1 Suites convergentes.

Définition :

Soient (u_n) une suite réelle et ℓ un réel,
dire que $\boldsymbol{(u_n)}$ **converge vers** $\boldsymbol{\ell}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow}_{APCR} |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Plus simplement :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

2.2.2 Suites tendant vers l'infini.

Définitions :

Dire que (u_n) diverge vers $+\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N,}_{APCR} \quad A \leqslant u_n$

Dire que (u_n) diverge vers $-\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N,}_{APCR} \quad u_n \leqslant A$

2.2.3 Suites extraites.

Propositions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et α un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

① la suite (u_n) tend vers α **si, et seulement si,** les suites $(u_{n+1}), (u_{n+2}), \ldots$ tendent vers α.

② la suite (u_n) tend vers α **si, et seulement si,** les suites $(u_{n-1}), (u_{n-2}), \ldots$ tendent vers α.

③ **Si** la suite (u_n) tend vers α **alors** la suite (u_{2n}) tend vers α.

④ **Si** la suite (u_n) tend vers α **alors** la suite (u_{2n+1}) tend vers α.

Théorème :

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles,

① si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

② si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) divergent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

2.2.4 Limite des suites arithmétiques et des suites géométriques.

Les suites arithmétiques réelles.

On note, pour u_0 et r deux réels, la suite $(u_n) = (u_0 + nr)$,

- si $r = 0$ alors (u_n) converge
- si $r > 0$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- si $r < 0$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Les suites géométriques réelles.

On note, pour u_0 et q deux réels, la suite $(u_n) = (u_0\, q^n)$ (avec $u_0 \neq 0$)

- si $-1 < q < 1$ alors (u_n) converge vers 0
- si $q = 1$ alors (u_n) converge vers u_0 *(la suite est constante)*
- si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$
- si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$

2.3 Convergence et inégalités.

2.3.1 Lorsqu'on sait que les suites convergent.

Il faut toujours avoir justifié que ces limites existent avant d'utiliser ces deux théorèmes.

Théorème :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites que l'on sait être convergentes, (u_n) vers le réel ℓ et (v_n) vers le réel ℓ'.
① **Si** $0 < \ell$ **alors** $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N}_{APCR}$, $0 < u_n$. ② **Si** $\ell > \ell'$ **alors** $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N}_{APCR}$, $u_n > v_n$.

Théorème : *lorsque tout converge, on peut passer à la limite sur des **inégalités larges**.*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites que l'on sait être convergentes, (u_n) vers le réel ℓ et (v_n) vers le réel ℓ'.
❶ **Si** $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n$ **alors** $0 \leqslant \ell$. ❷ **Si** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ **alors** $\ell \leqslant \ell'$.

2.3.2 Théorèmes de comparaison.

Ici les théorèmes permettent de démontrer que des limites existent.

Théorème : ($+\infty$ et $-\infty$)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles,
① **Si** (u_n) diverge vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ **alors** (v_n) diverge vers $+\infty$.
② **Si** (v_n) diverge vers $-\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ **alors** (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème : (*d'encadrement ou encore "des gendarmes"*)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à valeurs réelles,
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers un réel ℓ
alors (v_n) est convergente et sa limite est ℓ.

Corollaires

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles et ℓ un réel.
① **Si** $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leqslant v_n$ et si (v_n) converge vers 0 **alors** (u_n) converge vers 0.

② **Si** (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée **alors** $(u_n v_n)$ converge vers 0.

③ **Si** $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et si (v_n) converge vers 0 **alors** (u_n) converge vers ℓ.

Remarque : dans tous les théorèmes de cette page on peut remplacer "$\forall n \in \mathbb{N}$" par "$\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N}_{APCR}$"

2.4 Opérations et limites.

2.4.1 Somme.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell'+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

2.4.2 Produit.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
0	0	F.I.	F.I.	0

2.4.3 Quotient v_n/u_n.

$\lim_{n\to+\infty}(u_n)$ \\ $\lim_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	0	F.I.	F.I.	0
$-\infty$	0	F.I.	F.I.	0
0^+	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
0^-	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

2.5 Conséquences de la propriété de la borne supérieure.

Revoir la définition des bornes supérieure/inférieure et le théorème de la borne supérieure.

2.5.1 Théorème de convergence monotone.

Théorème : (*théorème de convergence monotone*)

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles,
❶ Si (u_n) est croissante et majorée alors la suite (u_n) converge.
❷ Si (u_n) est croissante et si elle diverge alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

❸ Si (u_n) est décroissante et minorée alors la suite (u_n) converge.
❹ Si (u_n) est décroissante et si elle diverge alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Remarque : Dans ce théorème on peut remplacer "croissante" (resp. "décroissante") par "croissante APCR" (resp. "décroissante APCR")

2.5.2 Suites adjacentes.

Définition :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles.
Dire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence converge vers 0.

Théorème :

Si deux suites sont adjacentes **alors** elles sont convergentes **et** elles convergent vers la même limite.

2.6 Echelle de comparaison.

Théorème. (*Limites à connaître*)

> Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$,
>
> ❶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0.$

Remarques :

- on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$
- Ces limites sont appelées **"croissances comparées des suites usuelles"**.
- La limite ❶ est toujours vraie pour $a \in [-1, 1]$, mais il ne s'agit plus d'une limite "croissance comparée".
- La limite ❷ entraîne : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1, 1[,\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$

Quand $\alpha < 0$ ce n'est pas une croissance comparée.

Corollaire.

> Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]-1; 1[$,
>
> $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$$

Remarque :

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, on note $u_n = o(v_n)$ et on dit que (u_n) est négligeable devant (v_n).

2.7 Suites équivalentes.

Définition.

> Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annule pas :
>
> Dire que (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes signifie que : la suite $\dfrac{(u_n)}{(v_n)}$ converge vers 1

On note :

$$\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n} \qquad \textbf{ou} \qquad \boldsymbol{u_n \sim v_n}$$

Attention : on n'écrit jamais : $\boldsymbol{u_n \sim 0}$

Proposition : (*Les propriétés qui passent de (v_n) à (u_n) lorsque (u_n) et (v_n) sont équivalentes*).

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. ($u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$)
>
> - si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \beta$
> - si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
> - si $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang alors $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.
> - si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang alors $v_n < 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition : (*Relation d'équivalence*)

> Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles.
>
> ① $(u_n) \sim (u_n)$ ② Si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(v_n) \sim (u_n)$
>
> ③ Si $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$ alors $(u_n) \sim (w_n)$

Théorème : (*Opérations et suites équivalentes*)

① Si $(u_n) \sim (v_n)$ et $(u'_n) \sim (v'_n)$ alors $(u_n u'_n) \sim (v_n v'_n)$ *Produit.*

② Si $\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \sim (v_n) \\ (u'_n) \sim (v'_n) \end{array} \right.$ alors $\left(\dfrac{u_n}{u'_n}\right) \sim \left(\dfrac{v_n}{v'_n}\right)$ *Quotient.*

③ Si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(u_n^\alpha) \sim (v_n^\alpha)$ *Elévation à une puissance constante.* $(\alpha \in \mathbb{R})$

④ Si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(|u_n|) \sim (|v_n|)$ *Passage à la valeur absolue.*

Attention : on ne somme pas des équivalents.

3

Fonctions

Plan du chapitre

3.1 Généralités

3.1.1 Majoration, minoration.

Définition :

Soient f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E une partie de D_f $(E \subset D_f)$,
Dire que f est majorée sur E signifie que : $\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M$.

On définit de même : f est minorée ou bornée sur E.

3.1.2 Maximum d'une fonction à valeurs réelles.

Définition : *(maximum global)*

> Soient f une fonction définie sur D et M un réel
> Dire que M est le maximum de f sur D signifie que :
> $$M \text{ est un majorant de } f \text{ et il existe } x_0 \in D \text{ tel que } M = f(x_0)$$
> On note : $\max\limits_{x \in D}(f(x))$.

On définit de même le minimum d'une fonction sur un ensemble D.

Définition : *(maximum local)*

> Soient f une fonction et M un réel
> Dire que M est un maximum local de f signifie que :
> Il existe $x_0 \in D_f$ et $\varepsilon > 0$ tels que $M = f(x_0)$ et M est le maximum de f sur $D_f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

On définit de même un minimum local d'une fonction.

3.1.3 Sens de variations.

Définition :

> Soit f une fonction définie sur D,
> Dire que f est **croissante** sur D signifie que : $\forall (a,b) \in D^2,\ a < b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$
> Dire que f est **strictement croissante** sur D signifie que : $\forall (a,b) \in D^2,\ a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$

On définit de même décroissante et strictement décroissante.

Théorème : (*Propriétés des fonctions strictement monotones*)

> Si f est strictement croissante sur D alors
> ① $\forall (a,b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
> ② $\forall (a,b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) < f(b)$
> ③ $\forall (a,b) \in D^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$
>
> Si f est strictement décroissante sur D alors
> ① $\forall (a,b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
> ② $\forall (a,b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) > f(b)$
> ③ $\forall (a,b) \in D^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \geqslant f(b)$

3.2 Limite d'une fonction.

3.2.1 Limite réelle en x_0 ou en ∞.

<u>En $-\infty$ ou $+\infty$</u>

Définition :

> Soient ℓ un réel et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
> Dire que **f tend vers ℓ en $+\infty$** signifie que :
> $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Définition :

> Soient ℓ un réel et f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.
> Dire que **f tend vers ℓ en $-\infty$** signifie que
> $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{-\infty} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$$

En x_0

> Soient ℓ et x_0 deux nombres réels, et f une fonction définie au voisinage de x_0.
> Dire que $\boldsymbol{f}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **en** $\boldsymbol{x_0}$ signifie que :
>
> $$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On montre l'unicité d'un tel ℓ (lorsqu'il existe) et on note :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

Définition :

> Dire que f est **continue** en x_0 signifie que : f est définie en x_0 et que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit : $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| \leqslant \varepsilon$

3.2.2 Limite infinie

Définitions :

> Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$,
> Ecrire : $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$
> Ecrire : $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A$
>
> Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{+\infty}$,
> Ecrire : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$
> Ecrire : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$
>
> Soit f une définie au voisinage de $\boldsymbol{-\infty}$,
> Ecrire : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$
> Ecrire : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$

3.2.3 Limites et inégalités.

Lorsqu'on sait que les fonctions ont des limites réelles.

Théorème :

> Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de α,
> ❶ Si $\displaystyle\lim_{\alpha} f = \ell$ et si $\ell > 0$ alors au voisinage de α, $f(x) > 0$.
>
> ❷ Si f et g admettent une limite réelle en α et si $\displaystyle\lim_{\alpha} f < \lim_{\alpha} g$
> alors au voisinage de α, $f(x) < g(x)$.

Théorème :

> ❶ Si $\left|\begin{array}{l} \text{au voisinage de } \alpha, \quad f(x) \geqslant 0 \\ \text{et } \displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \end{array}\right.$ alors $\ell \geqslant 0$.
>
> ❷ Si $\left|\begin{array}{l} f(x) \leqslant g(x) \text{ au voisinage de } \alpha, \\ \displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell' \end{array}\right.$ alors $\ell \leqslant \ell'$

Théorèmes de comparaison.

Théorèmes :

① Si	au voisinage de α , $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$	alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe et vaut $+\infty$.
② Si	au voisinage de α , $g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$	alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe et vaut $-\infty$.
③ Si	au voisinage de α , $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell$	alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Corollaires :

① Si	au voisinage de α , $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$	alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.
② Si	au voisinage de α, $f(x) = g(x) \times h(x)$ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$ et au voisinage de α, h est bornée.	alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut 0.

3.2.4 Opérations et limites

ℓ et ℓ' désignent deux réels, α désigne un réel x_0 ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite de la somme de deux fonctions : $f + g$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell' + \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Limite du produit de deux fonctions : $(f \times g)$

$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ \ $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
0	0	F.I.	F.I.	0

Limite du quotient de deux fonctions : $\left(\dfrac{f}{g}\right)$

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	0	F.I.	F.I.	0
$-\infty$	0	F.I.	F.I.	0
0^+	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
0^-	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Limites et composées.

Théorème : (*Composée de deux fonctions.*)

Soit f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de α, g de β et $g \circ f$ de α,

Si $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \\ \text{et} \\ \lim\limits_{y\to\beta} g(y) = \gamma \end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$

Théorème : (*Composée d'une suite et d'une fonction.*)

Soit f une fonction définie au voisinage de α et (u_n) une suite à valeurs dans D_f.

Si $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \end{array}\right.$ alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers β quand n tend vers $+\infty$.

3.2.5 Echelle de comparaison. (*Croissances comparées*)

Proposition.

Pour $a \in]0; +\infty[$, (a **un réel strictement positif**)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

Remarques :

❶ On peut ajouter $\lim\limits_{x\to 0} (x^a \ln(x)) = 0$

❷ On se réfère toujours à une de ces limites pour justifier une "croissance comparée".

3.2.6 Théorème de limite monotone.

Théorème :

Soit f une fonction, α et β désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$

Si f est monotone sur l'intervalle $\Big]\alpha; \beta\Big[$

alors f admet une limite (réelle ou infinie) à droite en α et à gauche en β.

Démonstration. *(Conséquence du théorème de la borne supérieure)*

Corollaire :

Si f est croissante sur un intervalle sur un intervalle ouvert I
alors f possède une limite réelle en tout point de I à gauche et à droite.

En situation :

- si f est croissante sur $]a, +\infty[$ et si f est minorée alors f admet une limite réelle en a.
- si f est croissante sur $]a, +\infty[$ alors f admet une limite à droite en a, une limite réelle ou $+\infty$.
- si f est décroissante sur $]a, b[$ et si f est majorée alors f admet une limite réelle à droite en a.
- si f est décroissante sur $]a, b[$ alors f admet à gauche en b une limite réelle ou $-\infty$.
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et si f est minorée alors f admet une limite réelle en $+\infty$.
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors f admet une limite en $-\infty$, une limite réelle ou $+\infty$

Remarques :

- Si f est croissante sur $[a, b]$ alors f n'a pas nécessairement une limite en b,
en revanche elle a une limite à gauche en b.
Prendre par exemple la fonction partie entière sur $[0, 1]$.
- On utilise souvent ce théorème en construisant un tableau de variations.

Corollaire :

Soit f une fonction, α et β désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$

Si f est croissante sur l'intervalle $\Big]\,\alpha\,;\,\beta\,\Big[$ alors on a les équivalences suivante :

❶ f admet une limite réelle à gauche en β si, et seulement si, f est majorée.

❷ f admet une limite réelle à droite en α si, et seulement si, f est minorée.

3.3 Continuité sur un intervalle.

Les fonctions f, g, .. sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sont chacunes définies sur une partie de $\mathbb{R}$: D_f, D_g, ...

3.3.1 Généralités.

Définition :

Soit $D \subset D_f$ tel que f est définie au voisinage de tout x_0 de D.
Dire que f est continue sur D signifie que : f est continue en tout x_0 de D.

3.3.2 Opérations et continuité.

Théorème :

Si f et g sont continues sur D **alors** $f + g$, $f \times g$ sont continues sur D.
si de plus g ne s'annule pas sur D **alors** $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.

Théorème :

Soient I, J deux intervalles, $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions,

Si $\begin{cases} ① \ f \text{ est continue sur } I \\ ② \ g \text{ est continue sur } J \\ ③ \ \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases}$ **alors** $g \circ f$ est continue sur I.

3.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème :

Version 1 : Si f est continue sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I,
alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet *au moins* une solution dans $[a, b]$.

Version 2 : Soit I une partie de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I et f une fonction défiie sur I.

Si $\begin{cases} ① \ f \text{ est continue sur } I \\ ② \ I \text{ est un intervalle} \\ ③ \ f(a) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(b \geqslant 0 \end{cases}$ **alors** il existe (*au moins*) un réel $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

Version 3 : Si I est un intervalle et f est une fonction continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

3.3.4 Théorème de la bijection.

Théorème :

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I,

Si $\begin{cases} ① \ I \text{ est un intervalle} \\ ② \ f \text{ est continue sur } I \\ ③ \ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases}$ alors $\begin{cases} ❶ \ f(I) \text{ est un intervalle} \\ ❷ \ f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } f(I) \end{cases}$

Ce théorème est rarement utilisé tel quel, mais il en découle toutes les versions utilisées :

Théorème de la bijection (*avec toutes les situations possibles*) :

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(b), f(a)]$

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors f réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]\lim\limits_{\alpha} f, \lim\limits_{\beta} f[$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors f réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]\lim\limits_{\beta} f, \lim\limits_{\alpha} f[$

...

Propositions (*Versions utilisées en pratique*) :

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors $\forall k \in [f(a), f(b)], \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$,
alors $\forall k \in [f(b), f(a)], \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$,
alors $\forall k \in]\lim\limits_{\alpha} f, \lim\limits_{\beta} f[, \exists! \alpha \in [a, b] : \ f(\alpha) = k$

...

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I,

on note : $g : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et g^{-1} sa bijection réciproque.

- g^{-1} est une bijection de $f(I)$ dans I.
- g^{-1} est continue. (*La réciproque d'une bijection continue est continue*)
- g^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que g.

Remarque : Il est simple de construire le tableau de variation de g^{-1}, connaissant celui de g.

3.3.5 Image continue d'un segment.

Théorème :

L'image directe d'un segment par une fonction continue est segment.

Remarques :

- Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $(x_1,x_2)\in[a,b]^2$: tel que $f\big([a,b]\big)=\big[f(x_1),f(x_2)\big]$.
- Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors elle est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes *(sup et inf)*.

3.4 Dérivation.

<u>Définition :</u>

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$,

❶ Dire que f est **dérivable en** x_0,

signifie que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite réelle quand x tend vers x_0.

❷ Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé** de f en x_0. On le note : $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

❸ Lorsque f admet un nombre dérivé en tout point de I, on dit que f est **dérivable sur** I.

et on définit alors la **fonction dérivée** : $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$

3.4.1 Continuité et dérivabilité.

Si f est dérivable en x_0 **alors** f est continue en x_0.

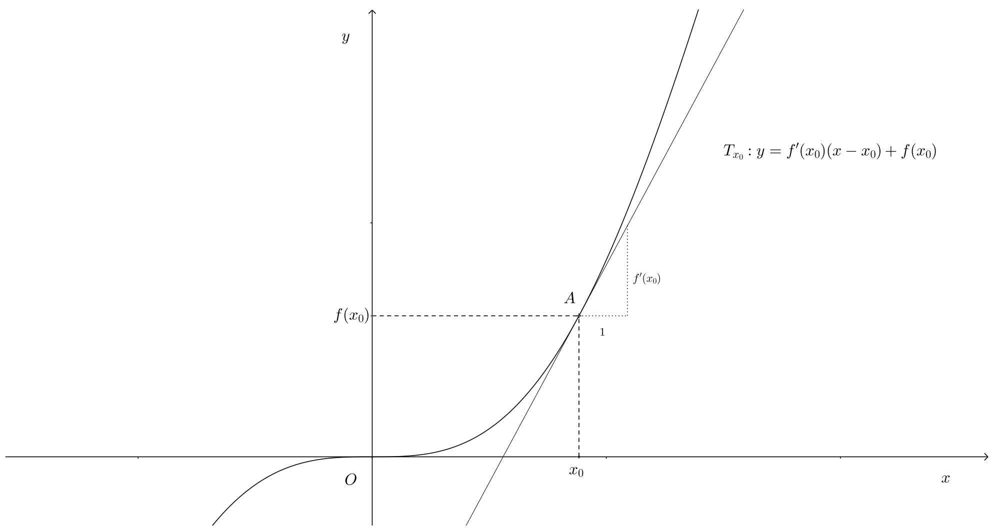
En effet. Pour tout $x \in I \subset \{x_0\}$, $\quad f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3.4.2 Tangente à une courbe.

Définition.

Lorsque f dérivable en x_0.
La droite passant par $A(x_0,f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée **tangente** à la courbe d'équation $y=f(x)$.

C'est la position limite de la corde passant par les points de coordonnées $(x_0,f(x_0))$ et $(x_0+h,f(x_0+h))$



Proposition.

L'équation de la tangente à C_f en $A(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

En effet : La droite Δ : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ a pour coefficient directeur $f'(x_0)$ et les coordonnées $(x_0, f(x_0))$ vérifient cette équation donc $A(x_0, f(x_0))$ appartient à Δ.

Définition :

Lorsque f est dérivable à gauche en x_0.
La droite passant par $A(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ est appelée demi-tangente à gauche à la courbe d'équation $y = f(x)$.

L'équation de la demi-tangente à gauche C_f en $A(x_0, f(x_0))$ est : $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
On définit de même la demi-tangente à droite.

Définition : *Tangente verticale.*

Si f est une fonction **continue** en a et si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $-\infty$,

alors la droite $x = a$ est une tangente verticale à la courbe d'équation $y = f(x)$.

3.4.3 Dérivée des fonctions usuelles.

Fonction	dérivée
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto a^x$	$x \longmapsto \ln(a)a^x$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$	$x \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$

Fonction	dérivée
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto 1 + \tan^2(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$x \longmapsto \arctan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$

3.4.4 Opérations et dérivation.

Théorème :

Soient α, β deux réels et f, g deux fonctions définies sur un intervalle I,

Si f et g sont dérivables sur I alors :

❶ $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$.

❷ $f\,g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I alors :

❸ $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{1}{g}$ sont dérivables sur I et $\forall x \in I$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Démonstrations.

3.4.5 Composée et fonctions dérivables.

Théorème :

Soient I et J deux intervalles, $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I, \\ g \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{et } \forall x \in I, \quad f(x) \in J \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \begin{cases} g \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \quad \text{et} \\ \forall x \in I, \ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \end{cases}$$

Démonstration :
Soit $x_0 \in I$, on note $y_0 = f(x_0)$, (on sait que $y_0 \in J$)
On note τ le taux d'accroissement de g en y_0 prolongé par $\tau(y_0) = g'(y_0)$

(ce qui est possible car g dérivable en y_0).

pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \tau(f(x)) \quad \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \quad f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

■

Rédaction.
① La fonction f est dérivable sur I car ...
② Pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ car ...
③ La fonction g est dérivable sur J car ...

donc la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables.

et pour tout $x \in I$, $(g \circ f)'(x) = ...$

Quelques dérivées de composées usuelles (composées par une fonction usuelle).

Fonction	dérivée
$x \longmapsto u(mx+p)$	$x \longmapsto m\,u'(mx+p)$
$x \longmapsto (u(x))^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \longmapsto n\,u'(x)\,(u(x))^{n-1}$
$x \longmapsto (u(x))^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \alpha u'(x)\,(u(x))^{\alpha-1}$
$x \longmapsto a^{(u(x))} \ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$x \longmapsto \ln(a) u'(x) a^{(u(x))}$
$x \longmapsto \sqrt{u(x)}$	$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$x \longmapsto e^{u(x)}$	$x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$
$x \longmapsto \ln(u(x))$	$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$x \longmapsto \ln(\lvert u(x) \rvert)$	$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$x \longmapsto \sin(u(x))$	$x \longmapsto u'(x) \cos(u(x))$
$x \longmapsto \cos(u(x))$	$x \longmapsto -u'(x) \sin(u(x))$
$x \longmapsto \tan(u(x))$	$x \longmapsto u'(x) \left(\tan^2(u(x)) + 1\right)$
$x \longmapsto \tan(u(x))$	$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$x \longmapsto \arctan(u(x))$	$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$

Dans tous ces cas, on se place sur un intervalle où u est dérivable et prend des valeurs où la fonction usuelle est dérivable.

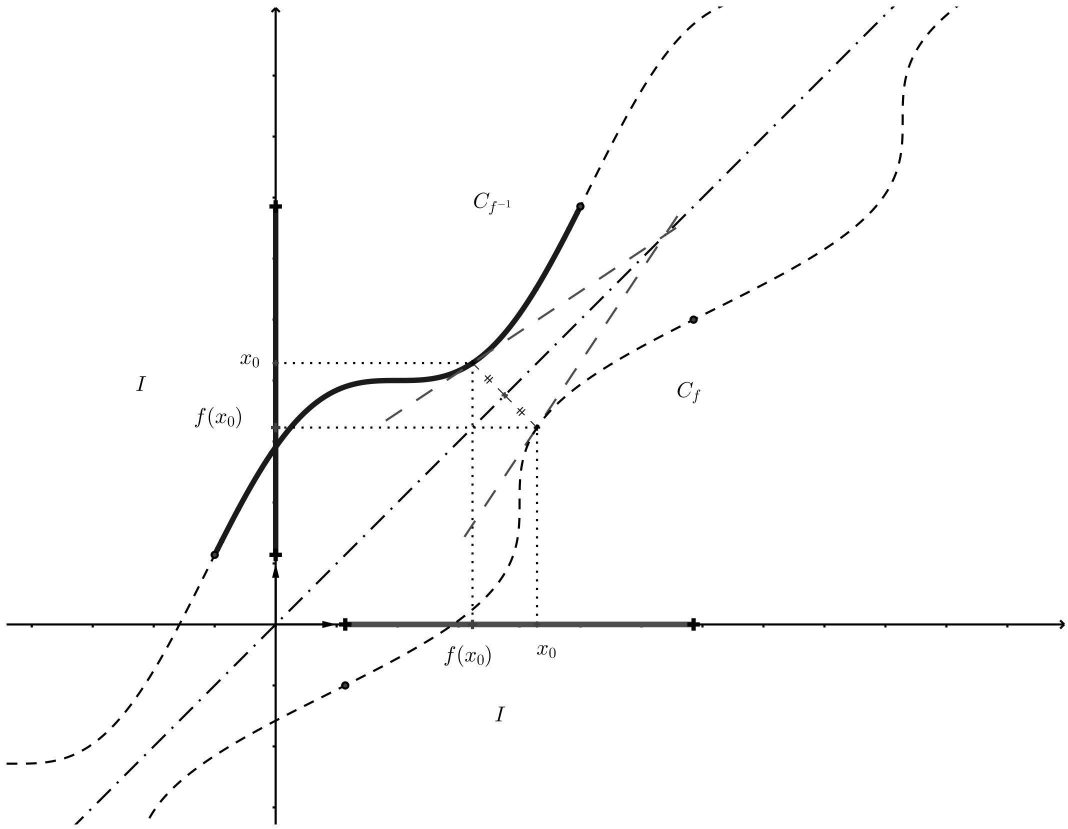
Par exemple :

Pour $f : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ la fonction u doit être dérivable sur I et vérifier $\forall x \in I,\ u(x) \in \mathbb{R}_+^*$;

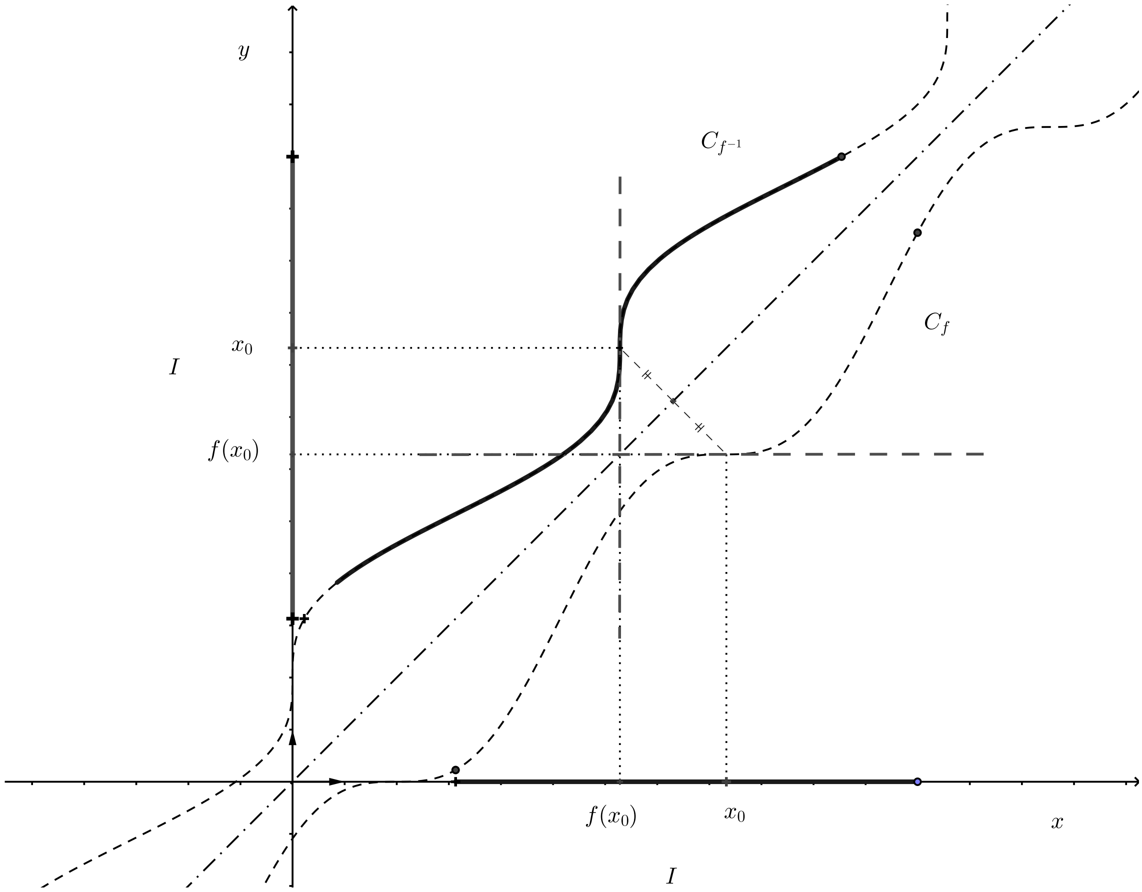
la fonction f est alors dérivable sur I et $\quad \forall x \in I, \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

3.4.6 Dérivée de la réciproque.

1er cas : f dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$



2ème cas : f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$



Théorème :

Soient f une bijection continue et strictement monotone de I dans $f(I)$, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

1er cas : Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

2ème cas : Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors

f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0.

Remarques :

- Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.
- L'ensemble de dérivabilité de f^{-1} est l'ensemble des $f(x)$ pour les x de I vérifiant $f'(x) \neq 0$
- Pour $y \in f(I)$, f^{-1} est dérivable en y si, et seulement si, $\exists x \in I$: $f'(x) \neq 0$ et $y = f(x)$.

Démonstration :

On suppose f dérivable en x_0,

Soit $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$, (*ce qui implique* $f^{-1}(y_0) \neq x_0$)

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}$$

or $\begin{cases} \lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0 & \text{(car } f^{-1} \text{ continue en } y_0) \\ \lim\limits_{X \to x_0} \dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_0) \end{cases}$ donc $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = f'(x_0)$

1er cas : $f'(x_0) \neq 0$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

donc f^{-1} est dérivable et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

2ème cas : $f'(x_0) = 0$

comme f est monotone on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0^+$ ou 0^-

ce qui implique que

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$

ce qui donne bien : f^{-1} n'est pas dérivable en y_0

et comme f^{-1} est continue en y_0, $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0.

■

Corollaire :

Soit f une bijection continue et strictement monotone de I sur $f(I)$,
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :

$$\forall x \in f(I), \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

3.4.7 Dérivée d'ordre supérieur.

Définition de la dérivée n ième .

Définition : (fonctions n fois dérivables)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. (on note $f = f^{(0)}$)
Dire que : f est (*au moins*) n fois dérivable sur I,
signifie que : successivement pour tout k compris entre 1 et n,

$$f^{(k-1)} \text{ est dérivable sur } I \text{ et on note } f^{(k)} \text{ sa dérivée.}$$

3.4.8 Exemples de dérivées $n$ième de fonctions usuelles.

Toutes les fonctions usuelles (*celles du chapitre "1. Fonctions usuelles"*) sont indéfiniment dérivables sur leur ensemble de dérivabilité.

Si elles sont dérivables une fois, alors elles le sont autant de fois que l'on veut.

Soit p un entier naturel non nul, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^p$.
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in [\![0; p]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}\, x^{p-n} \qquad\qquad \forall n > p, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = 0$$

Contrairement aux autres exemples, ici on ne démontre pas que ce polynôme est indéfiniment dérivable.

Démonstration : *Un exemple de récurrence finie.*

On fixe p dans $\mathbb{N}^*$,

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in [\![0; p]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{p!}{(p-n)!}\, x^{p-n}$.

Pour $n = 0$,

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = x^p$ et $\dfrac{p!}{(p-0)!}\, x^{p-0} = x^p$ donc **la propriété est vraie pour $n = 0$.**

Soit $n \in [\![0; p-1]\!]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{p!}{(p-n)!}\, x^{p-n}$,

(On suppose la propriété vraie au rang n)

Comme $p-n>0$, on a bien $f^{(n)}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \frac{p!}{(p-n)!}\,(p-n)x^{p-n-1} \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{p!}{(p-n-1)!}\,x^{p-n-1} \end{aligned}$$

(La propriété est vraie au rang $n+1$)

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in [\![0; p]\!],\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}\,x^{p-n}.}$$

En particulier pour $n=p$, la dérivée n-ième de f est la fonction constante égale à $p\,!$, ce qui entraîne :

$$\forall n > p,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = 0$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f^{(n)}(x) = n!\,\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

Démonstration :

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$,

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = n!\,\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$

Pour $n=0$,

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est *(au moins)* 0 fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\quad 0!\,\frac{(-1)^0}{x^{0+1}} = \frac{1}{x}$$

La propriété est vraie pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = n!\,\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$

$f^{(n)} : x \longmapsto n!\,\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= n!(-1)^n(-(n+1))x^{-(n+2)} \\ &= (n+1)!\,\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

La propriété supposée vraie à un rang n, entraîne qu'elle l'est au rang $n+1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\quad f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f^{(n)}(x) = n!\,\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)$.
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

Soit α un réel, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha$.
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Soit m un nombre réel non nul, on note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f : x \longmapsto e^{mx}$.
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = m^n\, e^{mx}$$

Démonstration :
Soit m un réel non nul, on note f la fonction $x \longmapsto e^{mx}$,

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = m^n\, e^{mx}$

Pour $n = 0$,
$f : x \longmapsto e^{mx}$ est *(au moins)* 0 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = e^{mx} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad m^0\, e^{mx} = e^{mx}$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = m^n\, e^{mx}$
$f^{(n)} : x \longmapsto m^n\, e^{mx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$,

et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= m^n\, m\, e^{mx} \\ &= m^{n+1} e^{mx} \end{aligned}$$

La propriété supposée vraie à un rang n, entraîne qu'elle l'est au rang $n+1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = m^n\, e^{mx}}$$

On note f la **fonction cosinus** : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \cos(x)$
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

On note f la **fonction sinus** : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sin(x)$
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Démonstration :
On note f la fonction sinus.

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Pour $n = 0$,
$f : x \longmapsto \sin(x)$ est 0 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(0)}(x) = f(x) = \sin(x) = \sin\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right)$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(n)} : x \longmapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(f^{(n)}\right)'(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

or $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$ et $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

on a bien f est $n+1$ fois dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\quad f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

ou encore :

$$\boxed{f \text{ est indéfiniment dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{array}}$$

Fonctions de classe C^n .

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I,
Dire qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I signifie qu'elle est n fois dérivable et que $\boldsymbol{f^{(n)}}$**est continue** sur I.

Dire que f est indéfiniment dérivable sur I signifie que pour tout entier naturel n, la fonction f est n fois dérivable sur I (on dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I).

Dérivées successives et opérations.

Théorèmes :

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.

① Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I)$ alors $\alpha f + \beta g$ et $f\,g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

② Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I)$ et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

③ Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $g \in \mathcal{C}^n(J)$ et si $f(I) = J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$

On peut énoncer les mêmes théorèmes en remplaçant tous les $\mathcal{C}^n$ par des $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et α, β deux réels.
Si f et g sont n fois dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est n fois dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$

3.4.9 Extremum local d'une fonction dérivable.

Théorème :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I qui n'est pas une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ admet un extremum local en } a \end{cases} \quad \text{alors} \quad f'(a) = 0$$

Remarques :

- $f'(a) = 0$ est une condition nécessaire pour que f possède un extremum local en a.
  Cette condition n'est pas suffisante. Pour le justifier, il suffit de prendre la fonction $x \longmapsto x^3$.

- Si a est une borne de I, alors cette condition n'est pas nécessaire. (On n'a pas nécessairement, $f'(a) = 0$).

Autre énoncé :

Théorème :

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c un élément de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est dérivable en } c \\ f \text{ admet un extremum local en } c \end{cases} \quad \text{alors} \quad f'(c) = 0$$

Démonstration :

Soit $c \in I$ tel qe f admet un maximum local en c.

comme I est ouvert, on peut approcher c par la gauche et par la droite et ainsi pour x voisin de c :

$$\text{si } x < c \text{ alors } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \text{si } x > c \text{ alors } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$$

$$\text{or } f \text{ est dérivable en } c \text{ donc : } \lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

on en déduit que $f'(c) \geqslant 0$ et $f'(c) \leqslant 0$, ce qui donne bien $f'(c) = 0$

3.4.10 Théorème de Rolle.

Théorème :

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = 0$$

Démonstration :

f est continue sur $[a, b]$, donc l'ensemble $f([a, b])$ peut s'écrire sous la forme $[m, M]$.

trois cas :

1. Si $m = M$, f est constante.

2. Si $m \neq M$ et $f(a) = M$,
m est atteint sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ en un c où $f'(c) = 0$ d'après le paragraphe précédent.

3. Si $m \neq M$ et $f(a) \neq M$,
M est atteint sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ en un c où $f'(c) = 0$ d'après le paragraphe précédent.

3.4.11 Théorème des accroissements finis.

Théorème :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$,

$$\textbf{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \quad \textbf{alors} \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Démonstration :

La droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ a pour équation

$$y = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) + f(a)$$

On note g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$.

$$\text{On a : } \begin{cases} g \text{ est continue sur } [a,b] \\ g \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ g(a) = g(b) = 0 \end{cases} \quad \text{donc en appliquant le théorème de Rolle à la fonction } g \text{ on obtient :}$$

$$\exists c \in]a,b[: \quad g'(c) = 0$$

or $\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

en conclusion on bien :

$$\exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème : *(Plusieurs versions du même théorème)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

① **Si** a et b sont deux éléments de I , **alors** il existe $c \in I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

② **Si** a et b sont deux éléments de I , **alors** il existe $c \in I$ tel que $|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b - a|$.

3.4.12 Dérivée et sens de variations.

Théorème :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I,

❶ $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ **si, et seulement si,** f est croissante sur I.

❷ $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ **si, et seulement si,** f est décroissante sur I.

❸ $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$ **si, et seulement si,** f est constante sur I.

En effet. Dans le sens direct on utilise le TAF, pour la réciproque les définitions.

Attention : *Ces théorèmes sont faux lorsque I n'est pas un intervalle.*

Théorème :

❶ **Si** $\begin{cases} f \text{ est continue sur l'intervalle } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ \forall x \in]a, b[, \quad f'(x) > 0 \end{cases}$ **alors** f est strictement croissante sur $[a, b]$.

❷ **Si** $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) > 0 \ \textbf{sauf en un nombre fini de points.} \end{cases}$ **alors** f est strictement croissante sur I.

On peut énoncer des théorèmes du même type pour les fonctions strictement décroissantes.

4

Intégrales d'une fonction continue sur un segment.

Plan du chapitre

4.1 Définitions

Dans ce cours I désigne toujours un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

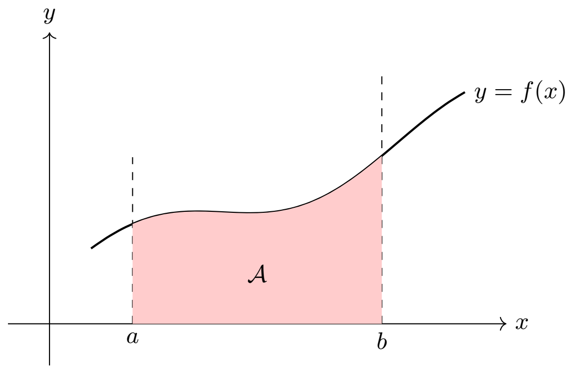
Définition :

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I vérifiant $a < b$, L'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ est l'aire algébrique sous la courbe.

L'intégrale existe quand cette aire est bien définie *(mais nous ne développerons pas la notion d'aire dans ce cours)*.
Lorsque f est continue sur $[a, b]$ l'intégrale est bien définie.
Lorsque f est continue par morceaux sur $[a, b)$ alors l'intégrale est bien définie.

- *Illustration graphique* :
  Si $a < b$ et f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs **positives** sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Aire}\Big(\{\ M(x,y) \in \mathcal{P} \mid a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\ \}\Big) \qquad \text{(en u.a)}$$

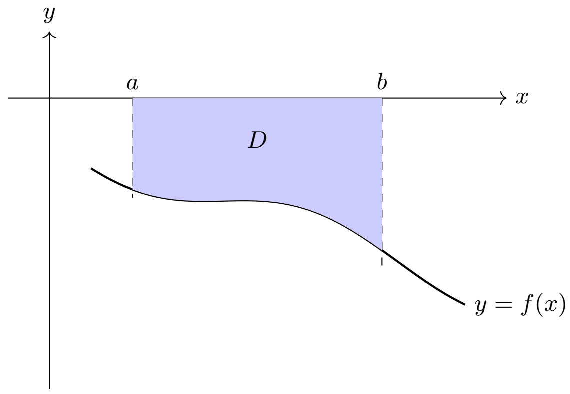


Si $a < b$ et f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs **négatives** sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\text{Aire}(D) \qquad \text{(en u.a)}$$

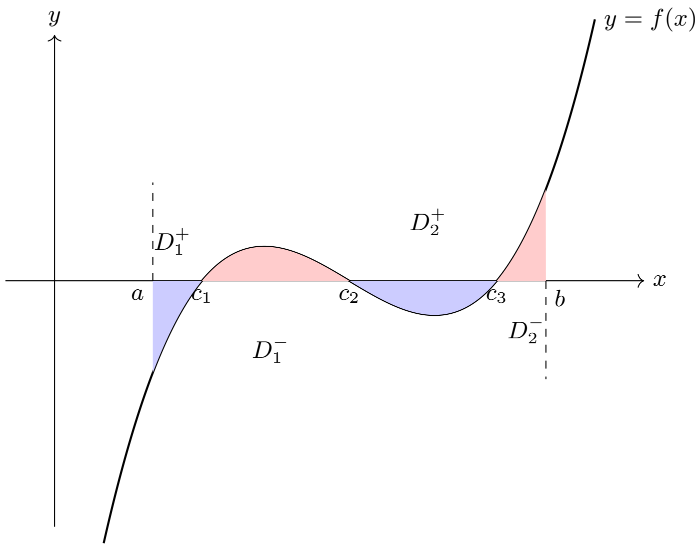
où

$$D = \left\{ \ M(x, y) \in \mathcal{P} \ \middle| \ a \leqslant x \leqslant b \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0 \ \right\}$$



Si $a < b$ et f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \text{Aire}(D^+) - \text{Aire}(D^-) \qquad \text{(en u.a)}$$



4.2 Sommes de Riemann

Définition : *(Sommes de Riemann)*

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I, on définit sur $\mathbb{N}^*$ les suites (G_n) et D_n par :

$$G_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad D_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème :

Si f est continue sur $[a, b]$ **alors** la suite (G_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Remarques :

- Les énoncés précédents sont vrais pour a et b quelconques dans I, ($a < b$, $a > b$ et $a = b$)
- En notant pour k allant de 0 à n, $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, $\underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{valeur moyenne de } f} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}_{\text{moyenne arithmétique de valeurs de } f}$
- Ce théorème est à la base de la **méthode** d'approximation dite **des rectangles** *(Voir la feuille info_2).*
- **En pratique** on applique souvent la proposition suivante :

Si $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec f une fonction continue sur $[0, 1]$ alors (u_n) converge vers : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

4.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue.

4.3.1 Relation de Chasles.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b, c.
Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Généralisation :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, n un entier non nul et $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ une suite finie d'éléments de I.

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

4.3.2 Linéarité.

Linéarité :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.
Alors pour tout réel λ et μ :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Généralisation :

Soient n un entier naturel non nul, $f_1, f_2, \cdots f_n$ des fonctions continues sur un intervalle I, $(a, b) \in I^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)$$

4.3.3 Croissance de l'intégrale.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur I,

Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de I et si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

En pratique : *Ce n'est pas une équivalence et il ne faut pas oublier le quantificateur :*

On sait que : $\boxed{\forall x \in [a,b],}\quad f(x) \geqslant 0 \quad \boxed{\text{donc}} \quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Corollaires :

① Soient f et g deux fonctions continues sur I,

Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de I et si $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant g(x)$ **alors**

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

② Soient f, g et h trois fonctions continues sur I,

Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de I et si $\forall x \in [a,b], \quad h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ **alors**

$$\int_a^b h(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

③ Soit f une fonction continue sur I,

Si a et b sont deux éléments distincts de I et si $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

alors

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

4.3.4 Valeur moyenne.

Définition et proposition :

Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I tels que $a < b$

❶ On appelle **valeur moyenne de f sur $[a,b]$** le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

❷ La valeur moyenne est une valeur de la fonction f.

(autrement dit : Il existe $x \in I$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$)

Démonstration de ❷ :
Comme f est continue sur $[a,b]$, elle y atteint ses bornes. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [a,b], \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

En intégrant sur $[a,b]$, on obtient

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx,$$

puis

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Comme $b-a>0$, on peut diviser par $b-a$:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Or, comme f est continue sur $[a,b]$, elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est bien une valeur prise par la fonction f. □

4.3.5 Intégrales et valeurs absolues.

Proposition : (*Inégalité triangulaire*)

Soient f continue sur I, a et b deux réels de I vérifiant $a \leqslant b$.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Proposition :

Soient f continue sur I, a et b deux réels de I.

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,|b-a|$$

Remarques :

- Ici comme la fonction f est continue $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ la borne supérieure est atteinte.
- Si M est un majorant de $|f|$ sur I alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant M\,|b-a|$

4.4 Théorème fondamental

4.4.1 Définition d'une primitive

Définition *(Primitive d'une fonction sur un intervalle)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que F est une primitive de f sur I signifie que :

❶ F est dérivable sur I et ❷ $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$.

Remarque : "F est $\boxed{\text{une}}$ primitive de f sur I, si et seulement si, f est $\boxed{\text{la}}$ dérivée de F sur I".

4.4.2 Théorème

Théorème. *(Théorème fondamental de l'analyse)*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I,

si f est continue sur I **alors** la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration *dans le cas particulier d'une fonction positive, croissante avec* $x_0 \in]a, b[$.
Soient f une fonction continue, positive et croissante sur I, $a \in I$ et $x_0 \in I$ qui n'est pas une borne de I,

On note F la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$

Soit $h > 0$,

$$\begin{aligned} F(x_0+h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

or f est croissante sur I donc $\underline{\forall t \in [x_0, x_0+h],\ f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h)}$ et comme $h > 0$ on en déduit

$$hf(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$$

et ainsi
$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$
or f est continue en x_0 donc $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ et ainsi *théorème des gendarmes*
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

La fonction F est donc dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0)$.

En prenant $h < 0$, on démontre de même que F est donc dérivable à gauche en x_0 et $F'_g(x_0)$.
En conclusion
$$\boxed{F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } F'(x_0) = f(x_0)}$$

Et comme c'est vrai pour un x_0 quelconque dans I,
$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } F' = f}$$

Conséquences

- Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.
- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I

  Pour tout $(a, b) \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

On note en pratique (*plus facile de vérifier sous cette forme la primitive*) :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b$$

4.4.3 Calcul de primitives.

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I.
Pour trouver une expression $F(x)$ permettant de définir une primitive F de f sur I, il suffit de fixer un élément a quelconque de I et de calculer pour un x quelconque l'intégrale :
$$\int_a^x f(t)\,dt$$

4.5 Parité et périodicité.

4.5.1 Intégrales et parité.

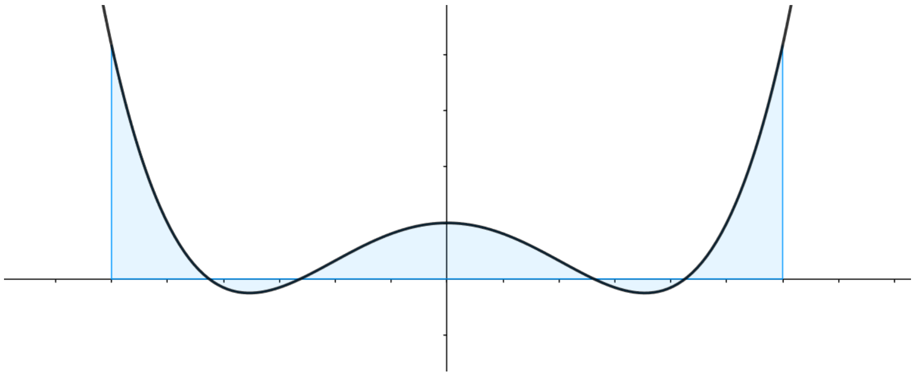
Proposition.

Soient f une fonction continue sur un ensemble D centré en 0 et $a \in D$,
Si f est **paire** et si $[-a, a] \subset D$ alors
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

Démonstration. *(On utilise le changement de variable sui est dans la suite de ce cours)*
On suppose que la fonction f est paire.
$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \\
&\underset{x=-t}{=} \int_a^0 f(-x)(-1)\mathrm{d}x + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t && \textit{Changement de variable affine} \\
&= \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t && \textit{car } f \textit{ est paire}
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{si } f \text{ est paire alors } \int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t}$$



Proposition.

Soient f une fonction continue sur un ensemble D centré en 0 et $a \in D$,
Si f est **impaire** et si $[-a, a] \subset D$ alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

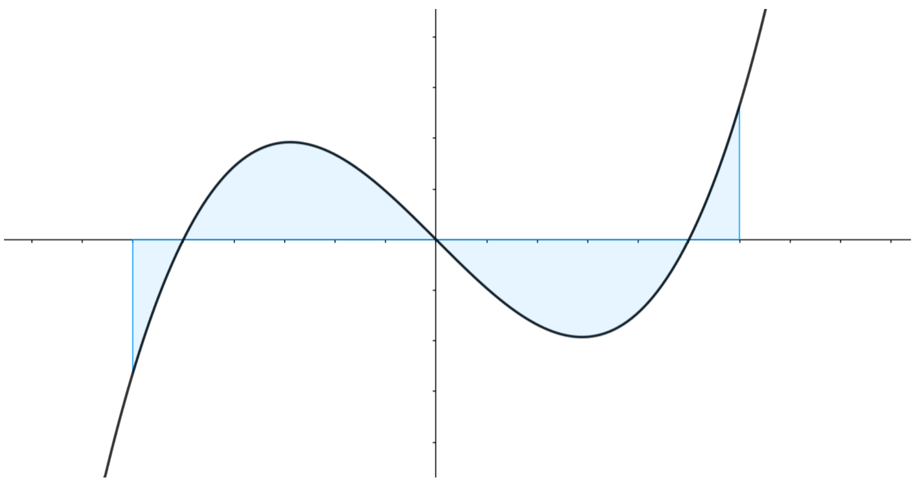
Démonstration.
On note $g : x \longmapsto \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. *(existe car f est continue sur $\mathbb{R}$).*
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad g(x) = F(x) - F(-x)$.

F est une primitive donc F et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ainsi g est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= F'(x) + F'(-x) \\ &= f(x) + f(-x) \\ &= f(x) - f(x) \qquad \textit{(car } f \textit{ est impaire)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En résumé : $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$
donc g est constante sur $\mathbb{R}$,
et comme $g(0) = 0$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, autrement dit $\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$

$$\boxed{\text{si } f \text{ est impaire alors } \int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0}$$



4.5.2 Intégrales et périodicité.

Proposition.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T ($T>0$).

❶ pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

❷ pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_a^{a+nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt$$

Démonstrations.

❶ f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut prendre une primitive de f sur $\mathbb{R}$ que l'on note F.

On note g la fonction $x\longmapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\quad g(x)=F(x+T)-F(x)$ et comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, g aussi.

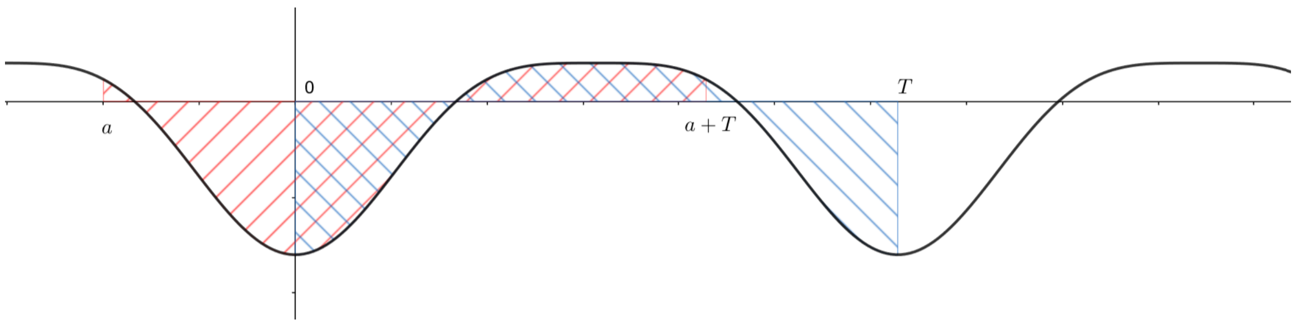
et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=f(x+T)-f(x)$ ce qui donne $g'(x)=0$ car f est T-périodique.

On a : g dérivable sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\quad g'(x)=0 \quad$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

(Voir le cours sur : conséquences du théorème des acroissements finis)

on donc pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\quad g(a)=g(0)$, autrement dit :

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\quad \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t}$$

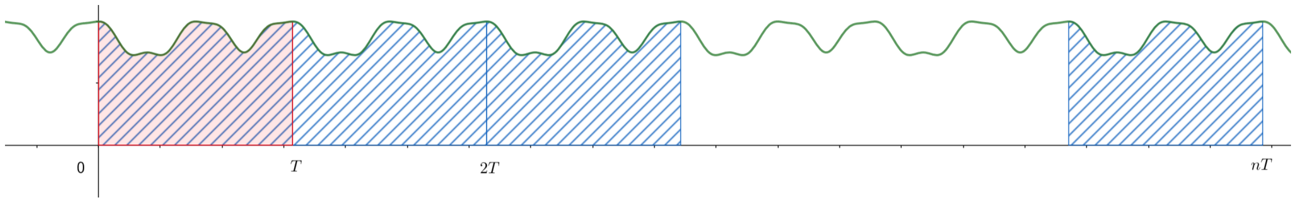


❷ Sur $\mathbb{N}$,

(on pourrait raisonner par récurrence, mais la notation $\sum$ *cache souvent des récurrences)*

D'une part pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\mathrm{d}t && \text{Relation de Chasles}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t && \text{d'après a.}\\ &= n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$



d'autre part pour un n dans $\mathbb{Z}_-^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t &\underset{x=t-nT}{=} \int_{-nT}^0 f(x+nT)\mathrm{d}x && \text{Changement de variable}\\ &= -\int_0^{-nT} f(t+nT)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^{(-n)T} f(t)\mathrm{d}t && f \text{ est } T \text{ périodique} \\ &= -(-n)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t && (\text{ En utilisant ce qu'on vient de montrer pour } n \geqslant 0\ ) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t = n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}$$

Proposition.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T ($T > 0$).
pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Voir feuille_Act_17

4.6 Positivité stricte.

Théorème :

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$
Si f est continue sur $[a,b]$, $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, et $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ **alors** $f = 0$ sur $[a,b]$.

Démonstration. En prenant F une primitive de f sur $[a,b]$, on montre que F est croissante avec $F(a) = F(b)$.

Corollaire :

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$
Si f est continue sur $[a,b]$, $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, et $f \neq 0$ **alors** $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

4.7 Calculs d'intégrales.

4.7.1 Intégration par parties.

Théorème :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \Big[u(t)\ \ v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

Démonstration.
Soient u et v deux fonctions deux classes C^1 entre a et b,
on sait que uv est dérivable sur $[a,b]$ et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

or toutes ces fonctions sont continues sur $[a,b]$ donc

$$\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Il vient la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t}$$

4.7.2 Intégration par changement de variable.

I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème : *(Changement de variable $x = \varphi(t)$).*

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\varphi : J \to I$ de classe C^1 a et b deux réels de J.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\,\varphi'(t)\,dt$$

Démonstration.
Soient φ une fonction de classe C^1 entre a et b et à valeurs dans J, f une fonction continue sur J et F une primitive de f sur J.

$F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et

$$\forall t \in I, \quad (F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

or toutes ces fonctions sont continues sur $[a,b]$ donc

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

or $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ donc il vient la formule du changement de variable :

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Proposition. *(Changement de variable affine $x = \alpha t + \beta$).*

Soit α, β deux réels avec $\alpha \neq 0$ et f une fonction telle que $t \mapsto f(\alpha t + \beta)$ est définie sur le segment $[a,b]$.
Si f est continue sur $[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$ **alors** :

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\,dt \underset{x=\alpha t+\beta}{=} \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x) \times \frac{1}{\alpha}\,dx \qquad \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx \underset{x=\alpha t+\beta}{=} \int_a^b f(\alpha t + \beta)\,\alpha\,dt$$

5

Systèmes, matrices

Plan du chapitre

5.1 Systèmes linéaires.

Il existe différentes méthodes pour résoudre un système : substitution, pivot de gauss, analyse-synthèse ...

L'objectif de ce cours :

❶ Définir le vocabulaire associé à la résolution des systèmes : solutions, second membre, équations, inconnues, rang, pivots, inconnus principales, secondaires, systèmes compatibles, système échelonné ...

❷ Savoir réduire un système linéaire par une méthode appelée méthode du pivot.

❸ Savoir écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

❹ Connaître des conditions permettant d'affirmer qu'un système a une unique solution, une infinité ou aucune.

5.1.1 Définitions.

Un système d'équations linéaires est un système d'équations de la forme :

$$(\Sigma) \ : \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \quad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$$

C'est un système à ***p* équations et *n* inconnues**. (ou encore p **lignes** et n inconnues).
Les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres réels (ou complexes).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{coefficients}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{inconnues}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{\text{second membre}}$$

On peut aussi écrire tout cela sous forme condensée :

$$\forall i \in [\![1;p]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ = \ b_i$$

Résoudre le système (Σ) revient à déterminer tous les $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifiant toutes les égalités du système.
L'ensemble des solutions est une partie de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).
Chaque solution est un n-uplet, une n-liste, elle s'écrit avec des parenthèses : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
L'ensemble des solutions est :

$$S_\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \forall i \in [\![1;p]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ = \ b_i \right\}$$

Résoudre le système revient à écrire cette ensemble sous forme paramétrée. $\{ f(t) \mid t \in I \ \}$

Vocabulaire.
• Lorsque un système n'a pas de solution, ont dit qu'il est **incompatible**.

• **Système de Cramer** : *(Ne pas en abuser vous dites vite des bêtises)*
Dire qu'un système est de Cramer signifie qu'il possède autant de lignes que d'inconnues **et** qu'il a exactement une solution.

• **Systèmes homogènes.**
On dit qu'un système est homogène lorsque son second membre est une colonne de zéro.

$$(\Sigma_0) \ : \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{est le système homogène associé au système} \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Remarque : on parle aussi de système sans second membre.

5.1.2 Ensemble des solutions.

Théorème :

L'ensemble des solutions d'un système homogène de p lignes, n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème :

Soit (Σ) un système linéaire et (Σ_0) son système homogène associé.
Si on connait une solution $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une solution de (Σ) et S_0 l'ensemble des solutions de (Σ_0),
alors l'ensemble des solutions de (Σ) est :

$$S = \left\{\alpha + t \mid t \in S_0\right\}$$

Proposition :

Un système linéaire possède zéro, une ou une infinité de solutions.

5.1.3 Cas particulier des systèmes 2×2.

Théorème :

Pour a, b, c, a', b', c' des nombres réels (resp. complexes), on a l'équivalence suivante :
$\left\{\begin{array}{l} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$ a un unique couple solution dans $\mathbb{R}^2$ (resp. dans $\mathbb{C}^2$)
si, et seulement si, $\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$

Définition :

Le nombre complexe $ab' - a'b$ est appelé **déterminant** du système : $\left\{\begin{array}{l} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$

On note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

5.2 Systèmes triangulaires sans zéro sur la diagonale.

Ici $n = p$, il y a autant d'inconnues que d'équations.

Théorème :

Pour un système triangulaire (Σ) on a l'équivalence :

(Σ) possède une et une seule solution **si, et seulement si,** (Σ) est sans zéro sur sa diagonale.

C'est un outil important de rédaction.

Exemple : Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système suivant possède une et une seule solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 + & 2mx_2 & - \quad x_3 & = & 2 \\ & mx_2 & + \quad 3x_3 & = & m \\ & & (m^2-1)x_3 & = & m^2 \end{array}\right.$$

Rédaction :
Ce système est triangulaire, donc il a une unique solution si, et seulement si, les coefficients diagonaux sont non nuls.

Ce système a une unique solution si, et seulement si, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

5.3 Systèmes sous forme échelon.

Exemple : le système suivant est dit sous forme échelon.

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = -1 \\ & & & & -3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = -1 \\ & & & & & & 3x_4 & + & 3x_5 & = -6 \end{array}\right.$$

Définition : (*définition d'une écriture.*)

On dit qu'un système linéaire est **sous forme échelon** lorsque :

- Chaque ligne comporte au moins une inconnue.

et

- La première inconnue d'une ligne n'apparaît plus dans les lignes suivantes.

Remarques : Dans un système sous forme échelon :

- Il y a nécessairement moins d'équations que d'inconnues. ($n \geqslant p$).
- Si $\boldsymbol{n = p}$ le système sous forme échelon est un système triangulaire sans zéro sur la diagonale.

Séparation des inconnues :

Le système précédent est équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & - & 2x_2 & - & x_5 \\ & & -3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & & & + & x_5 \\ & & & & 3x_4 & = & -6 & & & - & 3x_5 \end{array}\right.$$

Ainsi si on fixe x_2 et x_5 on obtient un système à trois inconnues x_1, x_2 et x_3, qui possède une unique solution.

Définitions :

Dans un système sous forme échelon :
Les **inconnues principales** sont celles qui apparaissent en premier sur chaque ligne et les autres sont appelées **inconnues secondaires**.
On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne.

Remarques :

Soit (Σ) un système linéaire avec p équations et n inconnues.

- Si (Σ) est échelonné alors il y a p inconnues principales et $n-p$ inconnues secondaires.
- En fixant arbitrairement la valeur des inconnues secondaires **on se ramène à un système triangulaire sans zéros sur la diagonale** en les inconnues principales.
- On peut fixer arbitrairement la valeur des inconnues secondaires, le système a alors une unique solution.
- Le nombre d'inconnues secondaires donnent **le nombre de paramètres utilisés pour décrire** l'ensemble des solutions. (*c'est le nombre optimal de paramètres*)
- Si $p < n$ **le système sous forme échelon** a une infinité de solutions.

En pratique :

Résoudre un système échelonné revient à exprimer toutes les inconnues en fonction des inconnues secondaires.

5.4 Méthode du pivot.

5.4.1 Opérations élémentaires.

Définition :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système les actions suivantes :

- Permuter deux lignes. $L_i \longleftrightarrow L_j$. (*Permutation*)
- Multiplier une équation par β un nombre **non nul**. $\beta L_i \longrightarrow L_i$ (*Dilatation*)
- Remplacer une équation L_i par $L_i + \alpha L_j$ avec $i \neq j$. $L_i + \alpha L_j \longrightarrow L_i$ (*Transvection*)

Remarque : En faisant des opérations élémentaires on ne change pas les solutions d'un système.

5.4.2 Méthode du Pivot.

A l'aide d'une succession finie d'opérations élémentaires sur les lignes on se ramène à :
- un système triangulaire sans zéro sur la diagonale (*une unique solution*),
- un système échelonné avec strictement plus d'inconnues que d'équations (*une infinité de solutions*),
- ou un système incompatible (*sans solution*).

Première étape :
On place à la première ligne une ligne avec x_1 (si il y en a sinon on passe à x_2 ...), on a alors $a_{1,1} \neq 0$,
puis on utilise cette ligne pour supprimer x_1 dans les lignes suivantes ; pour cela on fait des opérations élémentaires de la forme $L_i + \lambda L_1 \to L_1$.

Après cette première étape on n'utilise plus la ligne L_1. (*et on ne la modifie plus*)

Deuxième étape :
On cherche un coefficient non nul en dessous de $a_{1,2}$, (*conformément à l'illustration ci-dessous on suppose que tous les coefficients sont nuls et on passe à* x_3) on permute les lignes pour avoir $a_{2,3} \neq 0$, puis on utilise cette ligne pour supprimer x_3 dans les lignes suivantes ; pour cela on fait des opérations élémentaires de la forme $L_i + \lambda L_2 \to L_2$

Après cette deuxième étape on n'utilise plus la ligne L_2. (*et on ne la modifie plus*)

ainsi de suite ...

Finalement on parvient à un système de la forme : (*une forme réduite du système*)

$$\left\{\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \boxed{a_{2,3}}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ddots \qquad\qquad \\ \ddots \qquad \\ \ddots \\ \boxed{a_{r,n}}x_n = b_r \end{array}\right] & \text{système sous forme échelon } r \times n \\ \left.\begin{array}{r} 0 = b_{r+1} \\ \vdots \quad \\ 0 = b_p \end{array}\right] & (p-r) \text{ conditions de compatibilité} \end{array}\right.$$

Une fois sous cette forme on peut **discuter et décrire l'ensemble des solutions** :

❶ Si une des conditions de compatibilité n'est pas vérifiée, Il n'y a pas de solutions $S = \varnothing$

❷ Sinon on se ramène à la résolution :

- d'un système sous forme échelon. (*Inconnues principales en fonction des secondaires*)

ou • d'un système triangulaire avec une unique solution.

5.5 Matrices.

Dans ce chapitre n, r, q et p sont des entiers naturels **non nuls**,
Les éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres** ou **scalaires**.

5.5.1 Généralités.

Définition :

Une matrice de taille (n,p) est un **tableau rectangulaire de nombres** comportant n lignes et p colonnes.
Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

Notation : $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

On notera ici $(A)_{i,j}$ le **coefficient** de A se trouvant à la i-ème ligne et à la j-ième colonne

On note : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

5.5.2 Des cas particuliers.

- Si $n = 1$, on dit que la matrice A est une **matrice ligne**.
- Si $p = 1$, on dit que la matrice A est une **matrice colonne**.
- Pour A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle :
  – $i^{\text{ième}}$ ligne de A est la matrice ligne $(a_{i,1}\ a_{i,2}\ \ldots\ a_{i,p})$.

– $j^{\text{ième}}$ colonne de A est la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

• La **matrice nulle** à n lignes et p colonnes est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec que des coefficients nuls.

• Si $n = p$, on dit que la matrice A est une matrice **carrée**.

• Lorsque A est une matrice carrée, on dit qu'elle est :

– **triangulaire supérieure** lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$,

– **triangulaire inférieure** lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$,

– **diagonale** lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$,

• La **matrice identité** de dimension n (*nécessairement une matrice carrée*) notée I_n est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.6 Opérations.

5.6.1 Combinaisons linéaires de matrices.

Combinaison linéaire.

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et α, β deux scalaires.

La matrice $\alpha A + \beta B$ est la matrice $(\alpha\, a_{i,j} + \beta\, b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$

Propriétés.

Soit A, B et C trois matrices de même taille, k et k' deux scalaires, on a alors :

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+0 = 0+A = A$ (0 *matrice nulle de même taille que* A)
3. $A+(-A) = (-A)+A = 0$ (où $-A$ est la matrice $(-1)\,A$)
4. $A+B = B+A$
5. $k(A+B) = kA+kB$
6. $(k+k')A = kA+k'A$
7. $(kk')A = k(k'A)$
8. $0A = 0$
9. $1A = A$

5.6.2 Produit de deux matrices.

Définition.

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant r}}$,

le produit AB est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant r}}$ avec : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!] \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j}$

Propriétés.

Propriétés

- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $\quad AI_q = I_p\, A = A$
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(B, B') \in M_{q,r}(\mathbb{K})^2$: $\quad A(B+B') = AB + AB'$
- Pour tout $(A, A') \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $\quad (A+A')B = AB + A'B$
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$: $\quad (\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ on a : $\quad A(BC) = (AB)C$

Loi non commutative, non intègre.

- Il existe des matrices A et B telles que $AB \neq BA$.

*(On dit que la multiplication des matrices carrés n'est pas une loi **commutative**).*

- L'égalité $AB = 0$ n'entraîne pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$

(*On dit que la multiplication **n'est pas une loi intègre***)

En revanche les deux propositions sont vraies.

Propositions :

❶ Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\quad kA = 0$ équivaut à $k = 0$ ou $A = 0$.

❷ Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, **si** $(\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0)$ **alors** $A = 0$

Cas particuliers.

- Avec les matrices nulles : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\quad A\, 0_{n,r} = 0_{p,r}$ et $0_{r,p}\, A = 0_{r,n}$.

- Avec les matrices identités : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\quad A\, I_n = A$ et $I_p\, A = A$.

- Produit d'une matrice et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{Combinaison linéaire des colonnes de } A}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix}$$

- Produit d'une matrice et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{Combinaison linéaire des lignes de } A}$$

- Produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_p \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_p \end{pmatrix}$$

- Produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)$$

Remarque : Nous reverrons ce genre de produit dans le cours sur le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

- Produit d'une matrice par une matrice diagonale.

A droite :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \cdots & \lambda_n a_{1,n} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda_1 a_{p,1} & \lambda_2 a_{p,2} & \cdots & \lambda_n a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à droite par une matrice diagonale, revient à multiplier les colonnes C_j de A par λ_j.

A gauche :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda_p a_{p,1} & \lambda_p a_{p,2} & \cdots & \lambda_p a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à gauche par une matrice diagonale, revient à multiplier les lignes L_i de A par λ_i.

- **Produit de deux matrices diagonales.**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

- **Produit de deux matrices triangulaires.**

Proposition :

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration

Prenons A et B deux matrices triangulaires supérieures de taille n,

Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n, **vérifiant $\boldsymbol{j < i}$**

$$\begin{aligned} (AB)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} (B)_{k,j} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{j} (A)_{i,k} (B)_{k,j}}_{k \leqslant j < i \text{ donc } (A)_{i,k}=0} \quad + \quad \underbrace{\sum_{k=j+1}^{n} (A)_{i,k} (B)_{k,j}}_{k>j \text{ donc } (B)_{k,j}=0} \\ &= \quad 0 \quad + \quad 0 \end{aligned}$$

On a bien montré que si $i > j$, alors $(AB)_{i,j} = 0$

$$\boxed{\text{La matrice } AB \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

Pour les coefficients diagonaux :

Soit i un entier compris entre 1 et n,

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} (B)_{k,i}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} (A)_{i,k}\,(B)_{k,i}}_{k<i \text{ donc } (A)_{i,k}=0} \quad + \quad (A)_{i,i}\,(B)_{i,i} \quad + \quad \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} (A)_{i,k}\,(B)_{k,i}}_{k>i \text{ donc } (B)_{k,i}=0}$$

$$= \quad 0 \quad + \quad (A)_{i,i}\,(B)_{i,i} \quad + \quad 0$$

On montre de plus que si $i = j$, alors $(AB)_{i,j} = (A)_{i,i}\,(B)_{i,i}$

$$\boxed{\text{Les coefficients diagonaux de } AB \text{ sont les } (A)_{i,i}\,(B)_{i,i}}$$

En notant : $A = (a_{i,i})$ et $B = (b_{i,i})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut énoncer le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures.

5.6.3 Lignes et colonnes de AB. (Complément)

• Si on note C_j les colonnes de B alors la $j^{\text{ième}}$ colonne de AB est AC_j :

$$A \underbrace{\Big(C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_q\Big)}_{B} = \underbrace{\Big(AC_1 \,|\, AC_2 \,|\, \cdots \,|\, AC_q\Big)}_{AB}$$

Conséquence : Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A.

• Si on note L_i les lignes de A alors la $i^{\text{ième}}$ ligne de AB est L_iB :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} L_1B \\ \hline L_2B \\ \hline \vdots \\ \hline L_pB \end{pmatrix}$$

Conséquence : Les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B.

5.6.4 Puissance d'une matrice carrée.

Définition.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_p \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A \times A^n \qquad (\text{ou} = A^n \times A)$$

Cas particuliers.

• Puissance de I_p (*la matrice identité*) et de O_p (*la matrice nulle*).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_p^n = I_p \qquad\qquad O_p^0 = I_p \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad O_p^n = O_p$$

• Matrices diagonales.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\lambda_p}^n \end{pmatrix}$$

• Matrices triangulaires.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & * & \cdots & * \\ 0 & {\lambda_2}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & {\lambda_p}^n \end{pmatrix}$$

Formule du binôme.

Théorème *Formule du binôme.*

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices carrées telles que $\boldsymbol{AB = BA}$

(*On dit que A et B* ***commutent***),

pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \qquad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Illustration avec du dénombrement *(Savoir faire la démonstration par récurrence)*

Commençons par développer sans utiliser l'hypothèse $AB = BA$:

$$(A+B)^n = \underbrace{\underbrace{AAA\cdots AAA}_{n \text{ facteurs}} + \underbrace{BAA\cdots AAA}_{n \text{ facteurs}} + \cdots + \underbrace{BBB\cdots BBA}_{n \text{ facteurs}} + \underbrace{BBB\cdots BBB}_{n \text{ facteurs}}}_{2^n \text{ termes}}$$

Dans cette somme il y a 2^n termes qu'on peut assimiler à un élément de $\{A; B\}^n$.

Parmi ces termes :
- il y a 1 terme avec que des A
- il y a n termes avec exactement un B.
- il y a $\binom{n}{2}$ termes avec exactement 2 B.
- il y a $\binom{n}{k}$ termes avec exactement k B.
- $\vdots$
- il y a $\binom{n}{n}$ terme avec exactement n B.

Si de plus on suppose que $AB = BA$ lorsque un terme contient exactement k B, il vaut : $A^{n-k}B^k$.

Formule de Bernoulli.

Théorème *Formule de Bernoulli.*

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices carrées telles que $\boldsymbol{AB = BA}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k} \qquad A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} B^k$$

Démonstration.

$$(A-B)\sum_{k=0}^{n} A^k\, B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} A^{k+1}\, B^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} A^k\, B^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} A^k\, B^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} A^k\, B^{n+1-k} = A^{n+1} - B^{n+1}$$

$$\boxed{\text{pour } n \text{ un entier naturel, } A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{n} A^k\, B^{n-k}}$$

5.7 Matrice inversible.

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

5.7.1 Définition.

Définitions

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (une matrice carrée)
Dire que A est **inversible** signifie qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n \qquad \text{(où } I_n \text{ est la matrice identité)}$$

La matrice B est alors unique et est appelée **inverse** de la matrice A on la note A^{-1}

5.7.2 Matrice inversible et systèmes.

Théorème.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Les propositions suivantes sont équivalentes :

❶ A est inversible

❷ Le système $A\,X = 0$ admet une unique solution.

❸ quel que soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $A\,X = Y$ admet une unique solution.

Démonstration.

Montrons successivement : ❶ $\Rightarrow$ ❷ $\Rightarrow$ ❸ $\Rightarrow$ ❶ .

❶ $\Rightarrow$ ❷

Supposons A inversible.
Alors, si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifie $AX = 0$, on multiplie à gauche par A^{-1}, il vient $A^{-1}AX = A^{-1}0$ donc $X = 0$.
Or 0 est une solution donc le système $AX = 0$ admet une unique solution, à savoir $X = 0$.

❷ $\Rightarrow$ ❸

La matrice A est carrée $(n \times n)$ et le système homogène $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.
Ainsi, en résolvant le système $AX = 0$ par la méthode du pivot de Gauss, on se ramène à un système $TX = 0$ où T est une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.
En appliquant les mêmes opérations au système $AX = Y$ on montre qu'il est équivalent à un système $TX = B$ avec la même matrice T.
Donc, pour tout Y, le système $AX = Y$ admet une et une seule solution.

❸ $\Rightarrow$ ❶

Supposons que, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution.
En particulier, pour chaque vecteur Y de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe un unique vecteur X tel que $AX = Y$.
Notons $X_1, \ldots, X_n$ les solutions associées à $E_1, \ldots, E_n$. Construisons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix}.$$

Alors, par construction,

$$AB = \begin{pmatrix} AX_1 & \cdots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & E_n \end{pmatrix} = I_n.$$

Ainsi, il existe une matrice B telle que $AB = I_n$

Comme A est carrée, cela entraîne que A est inversible, et $B = A^{-1}$.

(Ici on admet que l'inversibilité à gauche entraîne l'inversibilité à droite)

□

Résoudre un système pour trouver l'inverse d'une matrice.

En pratique :

On prend un second membre quelconque Y et on résout le système $AX = Y$;

- si on montre qu'il n'a qu'une solution, A est inversible sinon elle ne l'est pas.
- si on montre que l'unique solution s'exprime $X = MY$ avec M une matrice $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $M = A^{-1}$

5.7.3 Inverse d'un produit.

Théorème :

Soient M et N deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

Si M et N sont inversibles **alors,** le produit MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Démonstration.

Supposons que M et N soient inversibles.

$$(MN)(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MI_nM^{-1} = MM^{-1} = I_n$$

et

$$(N^{-1}M^{-1})(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}I_nN = N^{-1}N = I_n.$$

Donc MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

□

Remarque : La réciproque est vraie.

Démonstration.
Supposons que MN soit inversible.

Il existe une matrice P telle que $(MN)P = I_n$ et $P(MN) = I_n$.

On a donc $M(NP) = I_n$. Ainsi, M admet un inverse à droite, donc M est inversible.

(Ici on admet que l'inversibilité à gauche entraîne l'inversibilité à droite)

de plus comme M est inversible on a : $N = M^{-1}(MN)$ est ainsi N inversible en utilisant le théorème précédent.

□

Propositions *Généralisation.*

① Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$, p matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

Si $\forall i \in [\![1, p]\!],\ A_i \in GL_n(\mathbb{K})$ **, alors** le produit $A_1A_2\cdots A_p$ est inversible

et $(A_1A_2\cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$

② Soit p un entier naturel et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

Si A est inversible **, alors** A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$ (noté A^{-p})

5.7.4 Cas particuliers.

Matrice diagonale.

Matrices diagonales.

Soient $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \neq 0$ **si, et seulement si,** A est inversible.

et alors $A^{-1} = \text{diag}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}, \cdots, \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$

Démonstration :

Remarque : on retrouve que la matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Matrice triangulaire.

Théorème :

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure,

T est inversible **si, et seulement si,** les coefficients diagonaux de T sont tous non nuls.

et alors T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure.

Remarque : Si T est inversible alors les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses de ceux de T.

Démonstration.

Les matrices 2×2. Déterminant.

Pour $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,

$$A \text{ est inversible } \textbf{ si, et seulement si, } ad-bc\neq 0.$$

et sous cette condition :

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

Démonstration.

On remarque que

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Puis on distingue les deux cas : $ad-bc=0$ et $ad-bc\neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Définition : (uniquement pour les matrices 2×2)

On appelle déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, le nombre : $ad-bc$.

$$\text{On note : } \det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

5.8 Matrice transposée.

5.8.1 Définition.

Définition

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
on appelle **transposée** de A la matrice B de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (notée ${}^tA$ ou $A^\intercal$) telle que :

$$\forall (i,j)\in [\![1;p]\!]\times[\![1;n]\!] \quad b_{i,j}=a_{j,i}$$

5.8.2 Propriétés.

Proposition :

Soient A et B deux matrices et un scalaire k alors :

① $\left(A^\top\right)^\top=A$

② $(kA)^\top=k\,A^\top$

③ $(A+B)^\top=A^\top+B^\top$ *Si A et B sont de mêmes tailles*

④ $(AB)^\top=B^\top A^\top$ *Si le produit AB est définie*

Démonstration de ④ :

On prend A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$

Pour tout couple (i,j) dans $[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$,

$$\begin{aligned}\left((AB)^T\right)_{i,j} &= (AB)_{j,i}\\ &= \sum_{k=1}^{p}(A)_{j,k}(B)_{k,i}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} (A^T)_{k,j} (B^T)_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{i,k} (A^T)_{k,j} \\
&= \left(B^T A^T\right)_{i,j}
\end{aligned}
$$

comme ceci est vrai pour tout (i, j) on a bien : $\quad (AB)^T = B^T A^T$

5.8.3 Inverse et transposée.

Théorème : *Transposée de l'inverse d'une matrice*

Soit A une matrice carrée,

A est inversible **si, et seulement, si** $A^\top$ est inversible et alors $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$

Démonstration : (*Remarque : il suffit de montrer l'implication "Si A est inversible alors A^T est inversible"*)

Supposons donc que A soit inversible.

On a alors

$$AA^{-1} = I_n \qquad \text{et} \qquad A^{-1}A = I_n.$$

En transposant on obtient

$$(A^{-1})^\top A^\top = I_n \qquad \text{et} \qquad A^\top (A^{-1})^\top = I_n.$$

Ainsi, $A^\top$ est inversible et

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Remarque : La réciproque s'obtient en appliquant ce résultat à $A^\top$. □

5.8.4 Matrices symétriques, antisymétriques.

Définitions :

Soit A une matrice carrée,

A est **symétrique**, signifie que $A^\top = A$ $\qquad$ A est **antisymétrique** , signifie que $A^\top = -A$

Proposition :

Soit A une matrice carrée, si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.

Un exercice : (*exemple ultra-classique d'analyse-synthèse*)

Montrer que :
Toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

6

Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$

Plan du chapitre

6.1 Structure vectorielle.

La lettre n désigne ici un entier naturel non nul.

On rappelle que $\mathbb{K}^n$ désigne les n-uplets (les n-**listes**, les suites finies ...) d'éléments de $\mathbb{K}$.

on les note : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec les x_i dans $\mathbb{K}$, On rappelle la propriété fondamentale :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x_i = x'_i$$

Définitions

Sur $\mathbb{K}^n$ on définit deux opérations :

- Pour $\begin{cases} u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ v = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \end{cases}$ $\quad u + v \underset{\text{def}}{=} (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \cdots, x_n + x'_n)$
- Pour $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{K} \\ u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$ $\quad \alpha.u \underset{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$

Remarques :

- $\mathbb{K}^n$ muni des deux opérations ci-dessus est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *(définition vue en deuxième année)*.
- $(0, 0, \dots, 0)$ est appelé vecteur nul de $\mathbb{K}^n$.
- Dans $\mathbb{K}^n$, pour $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on note : $-u = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$.

6.2 Sous-espace vectoriel

6.2.1 Définition.

Définition :

Soit F un ensemble,

F est **un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{K}^n$ signifie que :

❶ $F \subset \mathbb{K}^n$. ❷ $0_E \in F$. ❸ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (u, v) \in F^2, \quad \alpha u + \beta v \in F$

Remarques :

- Certains remplacent ❷ par $F \neq \varnothing$.
- Certains remplacent ❸ par $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (u, v) \in F^2, \quad u + \lambda v \in F$
- D'autres remplacent ❸ par $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \quad \alpha u \in F.$ et $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F.$
- Le singleton $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est d'ailleurs le seul qui contient un nombre fini d'éléments. *(Tous les autres contiennent un nombre infini de vecteurs)*

6.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 deux parties de E.

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E

alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. *(Refaites en deuxième année)*

Théorème : *(Généralisation)*

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_p$ des parties de $\mathbb{K}^n$.

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$,

alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

Attention : En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Une condition nécessaire et suffisante : "l'un est inclus dans l'autre" .

6.3 Vect$(u_1, \dots, u_p)$

On note $E = \mathbb{K}^n$.

6.3.1 Combinaisons linéaires.

Dire qu'un vecteur v de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ de E

signifie qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires tels que : $\quad v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$

Remarque : Un espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires.

6.3.2 Définitions - notations.

Définition.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E,
On note $\mathbf{Vect(u_1, \dots, u_p)}$ l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_p$.

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \;\middle|\; (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\} \text{ ou encore} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n \; x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \right\}$$

$$\text{Pour } x \in E, \quad x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n : \; x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

6.3.3 C'est un sous-espace vectoriel.

Proposition : Pour $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E, $\quad \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On note $\boxed{F = \text{Vect}(u_1, ..., u_p)}$ où $u_1, ..., u_p$ sont des vecteurs de E

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et les u_i sont dans E donc $F \subset E$.
- $0_E = \sum_{k=1}^{p} 0\, u_k$ donc $0_E \in F$
- Soient $v_1 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k$ et $v_2 = \sum_{k=1}^{p} \beta_k u_k$ deux vecteurs de F et λ_1, λ_2 deux éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k + \lambda_2 \sum_{k=1}^{p} \beta_k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{p} \lambda_2 \beta_k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\lambda_1 \alpha_k u_k + \lambda_2 \beta_k u_k) \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\lambda_1 \alpha_k + \lambda_2 \beta_k) u_k \\
&\in F
\end{aligned}$$

En conclusion : F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques :

- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$
- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.
- C'est un autre moyen de montrer qu'une partie de E est un sous-espace vectoriel

6.3.4 Opérations élémentaires.

On appelle opérations élémentaires sur la famille $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ les transformations :

- Permuter deux vecteurs : $u_i \longleftrightarrow u_j$
- Multiplier un vecteur par un scalaire λ <u>non nul</u> : $u_i \longleftarrow \lambda u_i$
- Ajouter un vecteur à un autre vecteur : $u_i \longleftarrow u_i + u_j$

On combine souvent ces opérations. Par exemple on fait souvent des transvections : $u_i \longleftarrow u_i - \alpha u_j$ avec $i \neq j$

Propositions

Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ une famille de vecteurs de E on note : $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

❶ On ne modifie pas F en changeant l'ordre des u_i.

❷ On ne modifie pas F par des opérations élémentaires sur les u_i.

❸ On ne modifie pas F en supprimant 0_E s'il est dans la liste des u_i.

❹ On ne modifie pas F en ajoutant à un vecteur u_i une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstrations.

6.3.5 Familles génératrices.

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E

Dire que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une **famille génératrice** de F signifie que, $F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$

Remarque : En pratique lorsque $\underline{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in F^n}$,

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une **famille génératrice** de F si et seulement si, $\forall v \in F, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$: $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$

6.3.6 Bases canoniques.

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Remarque. Pour tout $u = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\qquad u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

6.4 Familles libres.

On note $E = \mathbb{K}^n$.

6.4.1 Définition.

Définition :

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E,
dire que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une **famille libre** signifie que,

quel que soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$ alors $\forall k \in [\![1; n]\!], \quad \lambda_k = 0$

Remarques :

- La famille est **liée** lorsqu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$
- $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si, et seulement si, $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall k \in [\![1; n]\!], \ \lambda_k = 0$

6.4.2 Identification.

Théorème (*Unicité de l'écriture sur une famille libre. Identification.*) :

Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.
Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre alors on a l'équivalence :

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n \iff (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

En effet :

6.5 Bases.

6.5.1 Definition d'une base.

Définition :

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E.
Dire que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E signifie que,
$(u_1, \ldots, u_n)$ est une **famille libre et génératrice** de E.

Remarque : Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre alors c'est une base de Vect$(u_1, \ldots, u_n)$.

En effet :

6.5.2 Caractérisation d'une base.

Théorème :

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E,
$(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si,

pour tout vecteur v de E, il existe une unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$

Démonstration.

Rapidement.

D'une part $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice si, et seulement si, $\forall v \in E :$ $\underbrace{\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}_{\text{existence}}$

D'autre part $(u_1, ..., u_n)$ est libre si, et seulement si,

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k u_k \implies (\lambda_1, ..., \lambda_n) = (\lambda'_1, ..., \lambda'_n)}_{\text{unicité}}$$

On a bien

$$(u_1, ..., u_n) \text{ est libre et génératrice si, et seulement si, } \forall v \in E : \underbrace{\exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}_{\text{existence et unicité}}$$

6.6 Coordonnées dans une base.

On note $E = \mathbb{K}^n$.

6.6.1 Définition.

Définition :

$\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E,

à chaque vecteur v de E on peut associer l'unique matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ telle que : $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

Cette matrice est appelée : **matrice colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**

On note : $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Remarque : $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

6.6.2 Application $v \longmapsto \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$

Proposition :

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E alors
l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à v associe $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme.

Rappels : Φ est linéaire et bijective.

- Linéaire : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u,v) \in E^2,\ \Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$
- Bijective : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! u \in E :\ \Phi(u) = X$

Démonstration :

Proposition :

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et u_1, ... u_n des vecteurs de E.
❶ Pour tout $v \in E$, $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$
❷ $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si, et seulement si, $(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$ est libre.

Démonstration :

6.6.3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition (*Matrice d'une famille de vecteurs dans une base*) :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, à chaque famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_m)$ de E on peut associer l'unique matrice de M de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ telle que : pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, la j-ième colonne de M est $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_j)$.
Cette matrice est la **matrice de la famille de vecteurs** de $(v_1, \ldots, v_m)$ dans la base $\mathcal{B}$.
On la note : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m)$

Remarques :

- On peut résumer avec la relation.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) = \left(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_1) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_m)\right)$$

- Multiplication par une matrice colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} x_k \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_k)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k v_k\right)$$

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \begin{pmatrix} a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A}$$

6.7 Dimension d'un espace vectoriel

6.7.1 Définition.

Théorème et définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ différent de $\{0_E\}$.
❶ F possède au moins une base.
❷ toutes les bases de F ont le même nombre de vecteurs.
❸ Le nombre de vecteurs d'une base de F est appelée dimension de F.
on note $\dim(F)$ la dimension de F.

Remarques : L'espace vectoriel $\{0_E\}$ a par convention une dimension nulle. $\dim(\{0_E\}) = 0$.
(Sa base est la famille vide)

Théorème.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Si $(u_1, ..., u_p)$ est libre alors $p \leqslant \dim(E)$.

Démonstration :
Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
(On note $\mathscr{B}$ une base de E)
on a donc : *(définition de la liberté)*

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} x_k u_k = 0_E \iff (x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$$

ce qui donne dans la base $\mathscr{B}$: en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots u_p)$

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$$

donc le système $MX = 0$ a une unique solution et ainsi il a autant ou plus d'équations que d'inconnues.
(Voir cours sur les systèmes linéaires.)

autrement dit $\boxed{p \leqslant n}$.

6.7.2 Compléter une famille libre ou extraire d'une famille génératrice.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
❶ De toute famille génératrice de F on peut extraire une base de F.
❷ Toute famille libre de F peut être complétée en une base de F.

Remarques :
- Une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de dimension p a au moins p vecteurs.
- Une famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension p a au plus p vecteurs.

6.8 Famille libre, famille génératrice et dimension.

n désigne ici un entier naturel non nul.

6.8.1 Famille génératrice en dimension n.

Théorème :

> Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
> Si F est dimension p, toute famille génératrice de F formée de p vecteurs est une base de F.

Rédaction type : On a montré que $\begin{cases} \mathscr{F} \text{ est génératrice de } F \\ \mathscr{F} \text{ contient } p \text{ vecteurs} \\ \dim(F) = p \end{cases}$ donc $\mathscr{F}$ est une base de F.

En effet.

6.8.2 Famille libre en dimension n.

Théorème :

> Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
> Si F est dimension p, toute famille libre de F formée de p vecteurs est une base de F.

Rédaction type : On a montré que $\begin{cases} \mathscr{F} \text{ est une famille libre} \\ \mathscr{F} \text{ contient } n \text{ vecteurs de } E \\ \dim(E) = n \end{cases}$ donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

En effet.

6.8.3 Dimension et sous-espace vectoriel.

Théorème :

> Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$,
> ❶ Si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$
> ❷ $\left[\, F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G) \right] \iff F = G$

Démonstration.

6.9 Systèmes linéaires homogènes et dimension.

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on s'intéresse ici à la résolution du système linéaire $MX = 0$.
p équations et n inconnues.

Rappels :
L'algorithme du pivot de Gauss permet de réduire le système $MX = 0$ en un système échelonné $TX = 0$.
Le nombre de lignes non nuls de $TX = 0$ est égal au nombre d'inconnues principales noté r.
(C'est le rang du système)
Le nombre d'inconnues secondaires vaut $n - r$.

Théorème.

> L'ensemble des solutions du système $MX = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$.

Démonstration :
Conseil général : N'utilisez ce théorème uniquement si vous êtes sûr de vous et que cela est nécessaire.

Théorème.

> S'il y a strictement plus d'inconnues que d'équations $(n > p)$
> alors le système $MX = 0$ a une infinité de solutions.
> Si $(0, ..., 0)$ est l'unique solution de $MX = 0$,
> alors il y a autant ou plus d'équations que d'inconnues $(n \leqslant p)$.

6.10 Rangs.

$E = \mathbb{K}^n$

6.10.1 Rang d'une famille de vecteurs.

Soit p un entier naturel non nul.

Définition.

Pour $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p))$$

Remarque : On ne change pas le rang en faisant des opérations élémentaires sur les vecteurs.

Théorèmes :

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

❶ $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ est égal au nombre de vecteurs de $\mathscr{F}$. si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est libre

❷ $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ est égal à n. si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est génératrice de E.

❸ $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{rg}(\mathscr{F}) \text{ est égal au nombre de vecteurs de } \mathscr{F} \\ \text{et est égal à } n \end{array}\right.$ si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration.

6.10.2 Rang d'une matrice.

Définition. ***(Définition du rang d'une matrice)***

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,

On appelle rang de la matrice M, la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M.

Notation : on note $\operatorname{rg}(M)$ le rang de la matrice M.

Théorèmes :

❶ Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}\left(M^\top\right) = \operatorname{rg}(M)$.

❷ Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(M) = n$ si, et seulement si, M est inversible.

Démonstration.

Remarques :

- Le rang d'une matrice est (*aussi*) la dimension de l'espace engendré par ses lignes.
- On ne modifie pas le rang d'une matrice en faisant des opérations élémentaires sur ses colonnes et ses lignes.
- Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{rg}(M) \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(M) \leqslant p$ (ou encore $\operatorname{rg}(M) \leqslant \min(n,p)$)
- On obtient ce rang en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice.

6.10.3 Matrices et familles de vecteurs.

Proposition.

Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)\right)$$

Démonstration :

Théorèmes.

Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$

❶ $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre si, et seulement si, $\mathrm{rg}(M) = n$

❷ $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est génératrice si, et seulement si, $\mathrm{rg}(M) = \dim(E)$

❸ $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E si, et seulement si, M est inversible.

Démonstration :

6.10.4 Rang d'un système.

Définition :

Le rang d'un système est le nombre d'inconnues principales après réduction par l'algorithme du pivot de Gauss.

Proposition :

Soient $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et Σ le système $MX = B$

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\Sigma)$$

7

Application linéaires

Plan du chapitre

7.1 Applications linéaires.

Dans ce cours $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$ désignent deux espaces vectoriels quelconques sur $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

7.1.1 Définitions et vocabulaire.

Définition :

Soit f une application de E dans F.

Dire que f est une application linéaire signifie que :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(u,v) \in E^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Vocabulaire et notations :

- On note : $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- (Lorsque $F = \mathbb{K}$). On appelle **forme linéaire** sur E les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
- (Lorsque $F = E$). On appelle **endomorphisme** de E les applications linéaires de E dans E.

- On note $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Les applications linéaires bijectives sont appelées **isomorphismes**.
- Les endomorphismes bijectifs sont appelés **automorphismes**.
- On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. *(Groupe Linéaire)*

Des cas particuliers importants.

L'application nulle de E dans F est linéaire.

L'application identité de E est un endomorphisme de E. (*c'est même un isomorphisme*)

7.1.2 Propriétés.

Propositions :

❶ Si f est linéaire de E dans F, on a alors : $f(0_E) = 0_F$

❷ Si f est linéaire de E dans F,

pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$

Démonstration :
❶ Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(u, v) \in E^2$, $f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)$
donc en particulier $f(0.0_E + 0.0_E) = 0.f(0_E) + 0.f(0_E)$ et comme $0.f(u) = 0_F$ il vient

$$\boxed{\text{si } f \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } F \text{ alors } f(0_E) = 0_F}$$

❷ On suppose que f est linéaire de E dans F,
pour chaque entier n on note : $\mathscr{P}_n$ la proposition :

$$\text{pour tout } (u_1, \ldots, u_n) \in E^n \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n , \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

montrons par récurrence sur n que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
- Pour $n = 2$,
  La proposition est vraie, c'est exactement la définition d'une application linéaire.

- Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie,
  Soient $(u_1, \ldots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} u_{n+1}\right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) + \lambda_{n+1} f(u_{n+1}) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E, F) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) + \lambda_{n+1} f(u_{n+1}) && \text{en utilisant } \mathscr{P}_n \\
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i\right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(u_i) && \text{on a bien } \mathscr{P}_{n+1}
\end{aligned}$$

On a bien montré que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\text{pour tout } (u_1, \ldots, u_n) \in E^n \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n , \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

Remarque :

Pour démontrer qu'une application de E dans F **n'est pas linéaire**, on montre au choix :

❶ $f(0_E) \neq 0_F$

❷ En prenant $\alpha =$.......... dans $\mathbb{K}$ et $u =$.......... dans E, on a $f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$

❸ En prenant $u =$.......... dans E et $v =$.......... dans E, on a $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$

7.2 Opérations et applications linéaires.

7.2.1 Combinaison linéaire.

Des précisions sur l'espace vectoriel F^E où E et F désignent deux espaces vectoriels.

Définition :

Pour f une application E dans F et α un scalaire on définit les applications :

$$\alpha f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \alpha f(u) \end{array} \qquad f+g: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u)+g(u) \end{array}$$

Remarques :

- On admet que F^E muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
- Le vecteur nul de F^E est la fonction nulle, plus précisément c'est l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array}$

Théorème :

Soient f et g deux applications de E dans F,
Si f et g sont dans $\mathscr{L}(E,F)$ et α et β deux scalaires alors $\alpha f+\beta g \in \mathscr{L}(E,F)$.

Démonstration :
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, on note $h=\alpha f+\beta g$,
Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcll} h(\lambda u+\mu v) & = & \alpha f(\lambda u+\mu v)+\beta g(\lambda u+\mu v) & \textit{(Définitions des opérations ci-dessus)} \\ & = & \alpha\lambda f(u)+\alpha\mu f(v)+\beta\lambda g(u)+\beta\mu g(v) & (f \textit{ et } g \textit{ sont linéaires}) \\ & = & \lambda(\alpha f(u)+\beta g(u))+\mu(\alpha f(v)+\beta g(v)) & \\ & = & \lambda h(u)+\mu h(v) & \end{array}$$

donc $h=\alpha f+\beta g \in \mathscr{L}(E,F)$

On a bien démontré que : $\boxed{\text{si } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathscr{L}(E,F) \text{ alors } \alpha f+\beta g \in \mathscr{L}(E,F)}$

Remarque :
Plus généralement : Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

$$\text{Si} \quad \text{pour tout } k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ et } f_k \in \mathscr{L}(E,F) \quad \text{alors} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \in \mathscr{L}(E,F)$$

7.2.2 Composition.

Théorème :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f: E \to F$ et $g: F \to G$.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ **alors** $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Démonstration :
On suppose $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$,
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcll} g\circ f(\alpha u+\beta v) & = & g(\alpha f(u)+\beta f(v)) & \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \\ & = & \alpha\, g(f(u))+\beta\, g(f(v)) & \text{car } g \in \mathscr{L}(F,G) \\ & = & \alpha\, g\circ f(u)+\beta\, g\circ f(v) & \end{array}$$

donc $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Remarque : Plus généralement : Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

7.2.3 Réciproque d'un isomorphisme.

Théorème :

La réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Démonstration :
On suppose connaître f une application linéaire bijective de E dans F
Soient $(v_1, v_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{F}^2$,
comme f est bijective on peut définir $u_1 = f^{-1}(v_1)$ et $u_2 = f^{-1}(v_2)$,
ce qui nous donne : $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.

$$\begin{array}{rcll} f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) & = & f^{-1}(\alpha_1 f(u_1)\alpha_2 f(u_2)) & \\ & = & f^{-1}\big(f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\big) & \textit{car } f \textit{ est linéaire} \\ & = & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 & \textit{car } f^{-1} \circ f = Id_E \\ & = & \alpha_1 f^{-1}(v_1) + \alpha_2 f^{-1}(v_2) & \end{array}$$

Ce qui achève la démonstration

Autrement dit sachant que la réciproque d'une bijection est une bijection :

Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

7.3 Noyau et Image.

7.3.1 Définitions.

Définition :

Etant donné une application linéaire $f : E \to F$, on appelle :
- **noyau de f**, le sous-ensemble de E suivant : $\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$
- **image de f**, le sous-ensemble de F suivant : $\mathrm{Im}(f) = \{ f(u) \mid u \in E\}$

Remarques :
- $\ker(f) \subset E$ et $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
- $\ker(f)$ est l'ensemble des antécédents de 0_F par f. $\mathrm{Im}(f)$ est l'image directe de E par f.
- $\mathrm{Im}(f) = \{ v \in F \mid \exists u \in E : f(u) = v \}$
- Si f est l'application nulle alors $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ et $\ker(f) = E$.
- Si f est l'application identité de E alors $\mathrm{Im}(f) = E$ et $\ker(f) = \{0_E\}$.

7.3.2 Propriétés.

Théorème :

Si f est une application linéaire de E dans F alors :
❶ $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E ❷ $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstrations :
❶ • $\ker(f) \subset E$,
- $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$
- Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in \ker(f)^2$,

$$\begin{array}{rcll} f(\alpha u + \beta v) & = & \alpha f(u) + \beta f(v) & \text{car } f \in \mathscr{L}(E, F) \\ & = & \alpha 0_F + \beta 0_F & \text{car } u, v \in \ker(f) \\ & = & 0_F & \end{array}$$

donc $\alpha u + \beta v \in \ker(f)$

En conclusion : $\boxed{\ker(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

❷ • $\mathrm{Im}(f) \subset F$,

• $0_F = f(0_E)$ donc $0_F \in \mathrm{Im}(f)$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(v_1, v_2) \in \mathrm{Im}(f)^2$,

on note $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$ avec $u_1, u_2 \in E$,

$$\begin{array}{rcll} \alpha v_1 + \beta v_2 & = & \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) & \\ & = & f(\alpha u_1 + \beta u_2) & \text{car } f \in \mathscr{L}(E, F) \\ & \in & \mathrm{Im}(f) & \end{array}$$

En conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } F}$

7.3.3 Image et surjectivité.

Proposition : $\boxed{\text{Pour } f \in \mathcal{L}(E, F), \quad f \text{ est surjective si, et seulement si, } \mathrm{Im}(f) = F.}$

Théorème :

$\boxed{\text{Soit } f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \text{Si } (e_1, \cdots, e_n) \text{ est une base de } E \text{ alors,} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)).}$

Démonstration 1 :
Raisonnons par double inclusion

$\boxed{\supset}$ Sachant que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Im}(f)$ et que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F,
on a bien $\mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, on note $y = f(x)$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

comme f est linéaire, il vient $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, et ainsi $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

on a bien $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))}$$

Démonstration 2 : *Une autre démonstration plus efficace mais moins élémentaire.*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(f) & = & \{f(u) \mid u \in E\ \} & \\ & = & \left\{ f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i e_i\right) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} & \\ & = & \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) & \end{array}$$

7.3.4 Noyau et injectivité.

$\boxed{\textbf{Théorème :}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une application linéaire de } E \text{ dans } F, \\ \qquad f \text{ est injective si, et seulement si, } \ker(f) = \{0_E\} \end{array}}$$

Démonstration 1 *(Faite au tableau)*
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective.

Pour $x \in E$,

$$\begin{array}{rcll} x \in \ker(f) & \Longleftrightarrow & f(x) = 0_F & \\ & \Longleftrightarrow & f(x) = f(0_E) & \\ & \Longleftrightarrow & x = 0_E & \textit{(car } f \textit{ est injective)} \end{array}$$

donc $\ker(f) = \{0_E\}$ ■.

Remarque : au tableau, nous n'avons pas fait un raisonnement par équivalence.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$,

on a alors : $f(x_1) - f(x_2) = 0_F$, et comme f est linéaire il vient $f(x_1 - x_2) = 0_F$

d'où $(x_1 - x_2) \in \ker(f)$ et en utilisant l'hypothèse $\ker(f) = \{0_E\}$ il vient $x_1 - x_2 = 0_E$

ou encore $x_1 = x_2$.

donc f est injective ■.

Démonstration 2

Une autre approche par équivalence : *(ce n'est pas la démonstration "classique" que j'ai faite au tableau.)*

$$\begin{array}{lll}
f \text{ est injective} & \Longleftrightarrow & \Big[\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u) = f(v) \iff u = v\Big] \\
 & \Longleftrightarrow & \Big[\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u) - f(v) = 0_F \iff u = v\Big] \\
 & \Longleftrightarrow & \Big[\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u-v) = 0_F \iff u - v = 0_E\Big] \qquad \text{car } f \text{ linéaire} \\
 & \Longleftrightarrow & \Big[\forall u \in E, \quad f(u) = 0_F \iff u = 0_E\Big] \\
 & \Longleftrightarrow & \Big[\forall u \in E, \quad u \in \ker(f) \iff u = 0_E\Big] \\
 & \Longleftrightarrow & \ker(f) = \{0_E\}
\end{array}$$

$$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, } \ker(f) = \{0_E\}}$$

7.4 Image d'une base.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de **dimension finie.**

Théorème :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E ,
quel que soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire f de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f(e_i) = v_i$$

Autrement dit : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.
Extrait du programmme : "Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base."

Démonstration : *(ce qui a été fait au tableau)*

Idée : Comme f est linéaire alors si $u = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$ alors $f(u) = \sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i)$

La seule connaissance des coordonnées de u et les $f(e_i)$ permet de calculer $f(u)$.

Existence : L'application suivante convient : *(ie : elle est linéaire et vérifie $\forall i \; f(e_i) = v_i$)*

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i v_i \end{array} \qquad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$$

Au tableau j'ai défini $\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i) \end{array}$ *c'est une autre approche mais c'est peut-être plus simple avec les v_i.*

Unicité : Supposons connaître deux applications f_1 et f_2 qui conviennent.

(ie : elles sont linéaires et vérifient $\forall i \; f(e_i) = v_i$)

Soit $u \in E$, on note $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$f_1(u) = f_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f_1(e_i) && \text{car } f_1 \in \mathscr{L}(E,F) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f_2(e_i) && \text{car } f_1(e_i) = f_2(e_i) = v_i \\
&= f_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) && \text{car } f_2 \in \mathscr{L}(E,F) \\
&= f_2(u)
\end{aligned}$$

Donc $\quad \forall u \in E, \quad f_1(u) = f_2(u) \quad$ donc $\quad f_1 = f_2$ ■

Remarque :
Cette partie de la démonstration a été présentée différemment au tableau, seule la présentation est différente.

7.5 Représentation matricielle.

On note $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$

On notera si nécessaire : $p = \dim(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $n = \dim(F)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de F.

7.5.1 Matrice d'une application linéaire.

Définition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$,
on appelle **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice (notée : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$)

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \qquad \text{ou encore} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B}))$$

Remarques :

- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ dépend du choix des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
- On dit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ représente f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
- Lorsque f est un endomorphisme de E et que $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ on note : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
- La matrice de l'application nulle est la matrice nulle.

Illustration permettant de retenir la définition.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \overbrace{\underbrace{f(e_1)} \qquad \underbrace{f(e_j)} \qquad \underbrace{f(e_p)}}^{f(\mathscr{B})} \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{l} \to e'_1 \\ \vdots \\ \to e'_i \\ \vdots \\ \to e'_n \end{array}\right\} \mathscr{B}'$$

Théorème :

Pour $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F *(deux bases fixées)*
l'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'un base.

Remarques :

❶ Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que pour des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ quelconques,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$$

❷ On peut définir une application linéaire en donnant sa matrice dans deux bases quelconques.

Relation importante au centre du cours de deuxième année :
Pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.

$$\boxed{\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)}$$

7.5.2 Matrices et opérations.

Matrice d'une combinaison de deux applications linéaires.

Théorème

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F,
Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$$

Démonstration : *(En deuxième année)*

Matrice de la composée de deux applications linéaires.

Théorème

Soient $\mathscr{B}_1$ une base de E, $\mathscr{B}_2$ une base de F et $\mathscr{B}_3$ une base de G,

Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$

Démonstration : *(En deuxième année)*

Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.

Théorème

Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et f une application linéaire de E dans F.

f est bijective si, seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible

et alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)^{-1}$$

Démonstration : *(En deuxième année)*

7.6 Rang d'une application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.

7.6.1 Définition.

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F,
on appelle rang de l'application linéaire f l'entier naturel noté $\mathrm{rg}(f)$ et défini par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$$

7.6.2 Lien avec les autres notions de rang.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) &= \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \\
&= \dim\left(\mathrm{Vect}\,\langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\rangle\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_1)), \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_2)), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_p))\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(Mat_{\mathscr{B}'}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)
\end{aligned}$$

7.6.3 Théorème du rang

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \qquad \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Démonstration : *(En deuxième année)*

7.6.4 Caractérisation des isomorphimes

Théorème :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E,F)$

$$f \text{ est bijective si, et seulement si, } \mathrm{rg}(f) = n$$

En effet :

8

Probabilité sur un univers fini.

Plan du chapitre

8.1 Probabilité sur un univers fini.

8.1.1 Vocabulaire des événements.

Espace probabilisable.

Pour décrire une expérience aléatoire $(\mathscr{E})$ on commence par choisir un ensemble représentant l'ensemble des résultats de cette expérience.

L'ensemble des résultats possibles est appelé l'**univers** (souvent noté Ω)
Les parties de l'univers sont appelées les **événements**. (noté $\mathscr{P}(\Omega)$)
Le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est appelé **espace probabilisable** associé à $(\mathscr{E})$.

Vocabulaire et opérations sur les événements.

$\overline{A}$: l'événement contraire de A, $\varnothing$: l'événement impossible, Ω : l'événement certain.
Les événements formés d'un élément (les singletons) sont les **événements élémentaires**.
On note parfois (A et B) l'événement $A \cap B$ et (A ou B) l'événement $A \cup B$.
Dire que A et B sont **incompatibles** signifie que $A \cap B = \varnothing$.
Pour ω un résultat et A un événement, "$\omega \in A$" se dit : "ω réalise A".

Propriétés :

Soient A, B et C des événements,

$$\overline{\varnothing} = \Omega \qquad \overline{\Omega} = \varnothing \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Distributivités :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Système complet d'événements.

Définition :

Soient n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements.

Dire que $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un **système complet d'événements** signifie que :

① $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ ② $\underbrace{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing}_{\text{2 à 2 incompatibles}}$

Remarques :

- Lorsque $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements, les résultats se répartissent dans les différents événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
- Dans le secondaire on parle plutôt de partition.
- On dit aussi que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un système complet d'événements.

8.1.2 Probabilité.

Espace probabilisé.

Définition :

Soit Ω un ensemble fini non vide.
On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ (*ou plus simplement sur* Ω), une application $\mathbb{P}$ qui à toute partie de Ω associe un nombre réel et qui vérifie :

❶ $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ ❷ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

❸ Pour tout $(A,B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2$, si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Remarques :

- Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est alors un **espace probabilisé** fini
- $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array}$
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0.$ *En effet :* En prenant $A = B = \varnothing$ on obtient la relation : $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing)$
- On parle aussi bien de loi de probabilité que de probabilité.
- Dire que A est **négligeable** pour la probabilité $\mathbb{P}$ signifie que $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Sur un même espace probabilisable, on peut définir plusieurs probabilités.

Probabilité et opérations sur les événements.

Théorème :

Soit n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles **alors** $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Démonstration.

(*C'est l'occasion de voir la rédaction d'un raisonnement par récurrence finie. Simple mais rarement utilisé*).

On fixe un n dans $\mathbb{N}^*$ et on considère A_1, A_2, ... , A_n, n événements de Ω que l'on suppose deux à deux incompatibles.

Montrons par récurrence *(finie)* sur k que : pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$

- Pour $k = 1$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1)$$

La propriété est vraie pour $k = 1$

- Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$,

On sait que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right)$. Or les événements $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ et A_{k+1} sont incompatibles car on a supposé que les A_i sont deux à deux incompatibles, on en déduit que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{k+1}\right)$, et enfin en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient bien : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(A_i)$

- En conclusion : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$, et en particulier on a bien : $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}$

Une autre rédaction de cette démonstration :

Montrons par récurrence sur n que :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

- Pour $n = 1$, on considère A_1 un événement quelconque,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1)$$

La propriété est vrai pour $n = 1$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang n,

  on considère A_1, A_2, ... , A_{n+1}, $n+1$ événements 2 à 2 incompatibles,

  On sait que : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$.

  Or les 2 événements $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1} sont incompatibles car on a supposé que les A_i sont deux à deux incompatibles, on en déduit que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right)$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient bien :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

- En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ sont } n \text{ événements deux à deux incompatibles alors on a : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}$$

Conséquence.

$$\boxed{\textbf{Si } (A_1, A_2, \ldots, A_n) \text{ est un système complet d'événements } \textbf{alors } \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1}$$

Proposition :

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)}$$

En effet : A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1$

Théorème :

> ❶ $\forall(A,B)\in(\mathscr{P}(\Omega))^2,\quad \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$
>
> ❷ $\forall(A,B,C)\in(\mathscr{P}(\Omega))^3,$
>
> $$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

Démonstration :

❶ On a deux réunions disjointes : $B=(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$ et $A\cup B=A\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$

on en déduit : $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)$ et $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)$

ces deux égalités donnent bien : $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

❷ En utilisant plusieurs fois le résultat de ❶

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cup B\cup C) &= \mathbb{P}((A\cup B)\cup C)\\
&= \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cup B)\cap C)\\
&= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))\\
&= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\Big(\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap C\cap B\cap C)\Big)\\
&= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)
\end{aligned}$$

Proposition :

> ❶ Pour tout $(A,B)\in(\mathscr{P}(\Omega))^2$, si $A\subset B$ alors $\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}(B)$.
>
> ❷ Pour toute liste $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ de n événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$

Démonstration :

❶ On suppose que $A\subset B$,

on a alors la réunion disjointe : $B=A\cup(B\cap\overline{A})$ donc $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\cap\overline{A})$ et ainsi $\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}(B)$.

❷ Pour $n=2$ c'est une conséquence du théorème précédent, ensuite on raisonne par récurrence sur n.

Equiprobabilité.

Définition

> **Les événements élémentaires sont équiprobables** signifie qu'ils ont tous la même probabilité.

Théorème :

> Soit Ω un univers fini de cardinal $n\in\mathbb{N}^*$.
>
> Dans **une situation d'équiprobabilité** sur Ω on a :
>
> • La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à : $\dfrac{1}{n}$
>
> • La probabilité d'un événement A est $\mathbb{P}(A)=\dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

8.2 Conditionnement et indépendance.

On se place dans $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

8.2.1 Probabilité conditionnelle.

Définition.

Définition et proposition :

> Soit A un événement de probabilité non nulle.
>
> L'application $\mathbb{P}_A:\mathscr{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$ qui à $B\mapsto\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega))$
>
> L'application $\mathbb{P}_A$ est appelée probabilité sachant A (probabilité conditionnelle relative à A).

Démonstration :

- On a bien : $\mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$
- $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$.
- Soit B_1 et B_2 deux événements tels que : $B_1 \cap B_2 = \varnothing$,

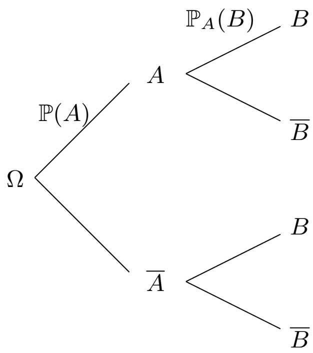
$$\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \cdots = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2)$$

Remarques :

- Toutes les propositions énoncées sur $\mathbb{P}$ sont encore valables pour $\mathbb{P}_A$
  par exemple :
$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$$
- $\mathbb{P}_A(A) = 1$

Remarques :

- On note aussi : $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$
- Attention à cette notation $\mathbb{P}(B|A)$ car BA n'est pas un événement.
- $\boldsymbol{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}$



- Si P est la probabilité uniforme alors $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card}(A)}$, tout se passe comme si on changeait d'univers.
- On peut enchaîner les conditionnements : $(\mathbb{P}_A)_B(C) = \mathbb{P}_{A\cap B}(C)$.

Formule des probabilités composées.

Théorème : (***Formule des probabilités composées***)

> Pour $A_1, \ldots, A_n$, n événements ($n \geqslant 2$) vérifiant $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :
> $$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

On utilise les conventions : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{0} A_i = \Omega$ et $\mathbb{P}_\Omega(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$.

$$\begin{aligned}
P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \qquad \textit{(Produit télescopique)}
\end{aligned}$$

Remarque : La condition $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ entraîne $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \neq 0$ pour k entre 1 et $n-1$.

Formule des probabilités totales.

Théorème : ***(Formule des probabilités totales)***

Soient n un entier naturel non nul et $A_1, \dots, A_n$ n événements de Ω.

❶ Si $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

❷ Si $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements non négligeables pour $\mathbb{P}$ (i.e : pour tout i, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$) alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Démonstration. ❶

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B) \end{aligned}$$

les événements $(A_k \cap B)$ sont deux à deux disjoints donc $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$

❷ En reprenant le résultat précédent et en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle il vient :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Remarque : En prenant la convention suivante : si $P(A_n) = 0$ alors $P(A_n)P_{A_n}(B) = 0$ on peut énoncer ❷ plus simplement :

❷ Si $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Formule de Bayes.

Proposition :

Soient $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements non négligeables pour $\mathbb{P}$ et B un événement également non négligeable pour $\mathbb{P}$ alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

En effet : $\mathbb{P}_B(A_j) = \dfrac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \dfrac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

8.2.2 Evénements indépendants.

Indépendance de deux événements.

Définition :

Soient A et B deux événements,

Dire que A et B sont **indépendants** signifie que : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Remarque :

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, \dots, A_n$, n événements de Ω,

Dire que que ces événements sont **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

Proposition :

Soient A et B deux événements quelconques de Ω,

① A et B sont indépendants équivaut à A et $\overline{B}$ sont indépendants.
② A et B sont indépendants équivaut à $\overline{A}$ et B sont indépendants.
③ A et B sont indépendants équivaut à $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :
Pour montrer ces trois équivalences, il suffit de montrer l'implication suivante :

Quels que soient M et N deux événements de Ω,
Si M et N sont indépendants alors M et $\overline{N}$ sont indépendants.

Prenons deux événements M et N deux événements indépendants de Ω,
On sait que $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \cap N) + \mathbb{P}(M \cap \overline{N})$
et comme M et N sont indépendants il vient : $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(M \cap \overline{N})$, puis :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \cap \overline{N}) &= \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(N) \\ &= \mathbb{P}(M)(1 - \mathbb{P}(N)) \\ &= \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(\overline{N}) \end{aligned}$$

Indépendance mutuelle de n événements.

Définition :

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, \dots, A_n$, n événements de Ω,
Dire que ces événements sont **mutuellement indépendants** signifie que :

$$\forall J \subset [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Proposition :

Si n événements sont mutuellement indépendants **alors** ils sont 2 à 2 indépendants.

8.2.3 Expériences indépendantes.

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ se décomposant en n sous-expériences (ou n épreuves) aléatoires :

$$\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2, \dots,\ \mathcal{E}_n$$

Chacune de ces expériences est modélisée par des espaces probabilisées :

$$(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)\ , \qquad (\Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)\ , \quad \dots \quad , \quad (\Omega_n, \mathscr{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$$

On admet que l'on peut modéliser $\mathcal{E}$ par $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ de telle sorte qu'on ait les deux propriétés suivantes :

Propriétés :

Si $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$ sont indépendantes, on a alors les propositions suivantes :

❶ si A est un événement de l'expérience $\mathcal{E}_i$ alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_i(A)$.
Pour calculer la probabilité de A on n'observe que l'expérience $\mathcal{E}_i$

❷ si A_1, A_2 , ..., A_p sont p événements de p expériences distinctes,
alors les événements A_1, A_2 , ..., A_p sont **mutuellement** indépendants.
en particulier :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_p)$$

Remarques :
- Les tirages successifs avec remise sont souvent modélisés ainsi.
- Cette indépendance peut être conditionnée. (*Exemple : une fois le dé choisi, les tirages sont indépendants*).

9

Variables aléatoires finies.

Plan du chapitre

9.1 Définitions.

Soient Ω un univers fini et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

9.1.1 Variables aléatoires.

Définition

$$\boxed{\textbf{Les variables aléatoires sur } \Omega \textbf{ sont les applications de } \Omega \textbf{ dans } \mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

Remarques :

- On associe à chaque résultat (*un élément de* Ω) une valeur numérique (*un nombre réel*).
- Sur une même expérience on peut définir plusieurs variables aléatoires.
- A partir d'une ou plusieurs variables aléatoires on peut en construire d'autres :

$$\max(X,Y) \qquad X+Y \qquad X^2+1 \qquad e^X \qquad |Y-X| \qquad \sqrt{X^2+Y^2}$$

9.2 Ensemble des valeurs prises.

$$\boldsymbol{X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\ \}}$$

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ et X une variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ le plus souvent on note :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \quad \textbf{avec} \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_r$$

$X(\Omega)$ ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

9.3 Variables aléatoires et événements.

Soient B une partie de $\mathbb{R}$, a, b, x des nombres réels,
on peut définir à l'aide d'une variable aléatoire X les événements :

$$[X \in B] = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\ \}$$

$$[a \leqslant X \leqslant b] = \{\ \omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\ \}$$

$$[X = a] = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\ \} \ \ (\textit{ce sont les antécédents de } a \textit{ par } X).$$

9.4 Système complet associé à une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire sur Ω, avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ **avec** $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$.

La famille $(\,[X = x_i]\,)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est **un système complet d'événements**.

Application de la formule des probabilités totales :

Si A est un événement de Ω alors $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}\,(\,[X = x_i]\,)\,\mathbb{P}_{[X=x_i]}(A)$

9.5 Loi de probabilité.

Définition.

La **loi de probabilité** de X est l'application de $X(\Omega)$ dans $[0;1]$ qui à chaque valeur x prise par X, associe le nombre $\mathbb{P}([X = x])$

C'est l'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X = x]) \end{array}$

et on a : $\forall x \in X(\Omega),\quad \mathbb{P}([X = x]) \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$

Remarques :

• **Déterminer la loi de probabilité de** X, c'est

❶ donner $X(\Omega)$ et ❷ $\mathbb{P}([X = x_i])$ pour toutes les valeurs x_i de $X(\Omega)$.

Parfois (*mais pas toujours*) on donne la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

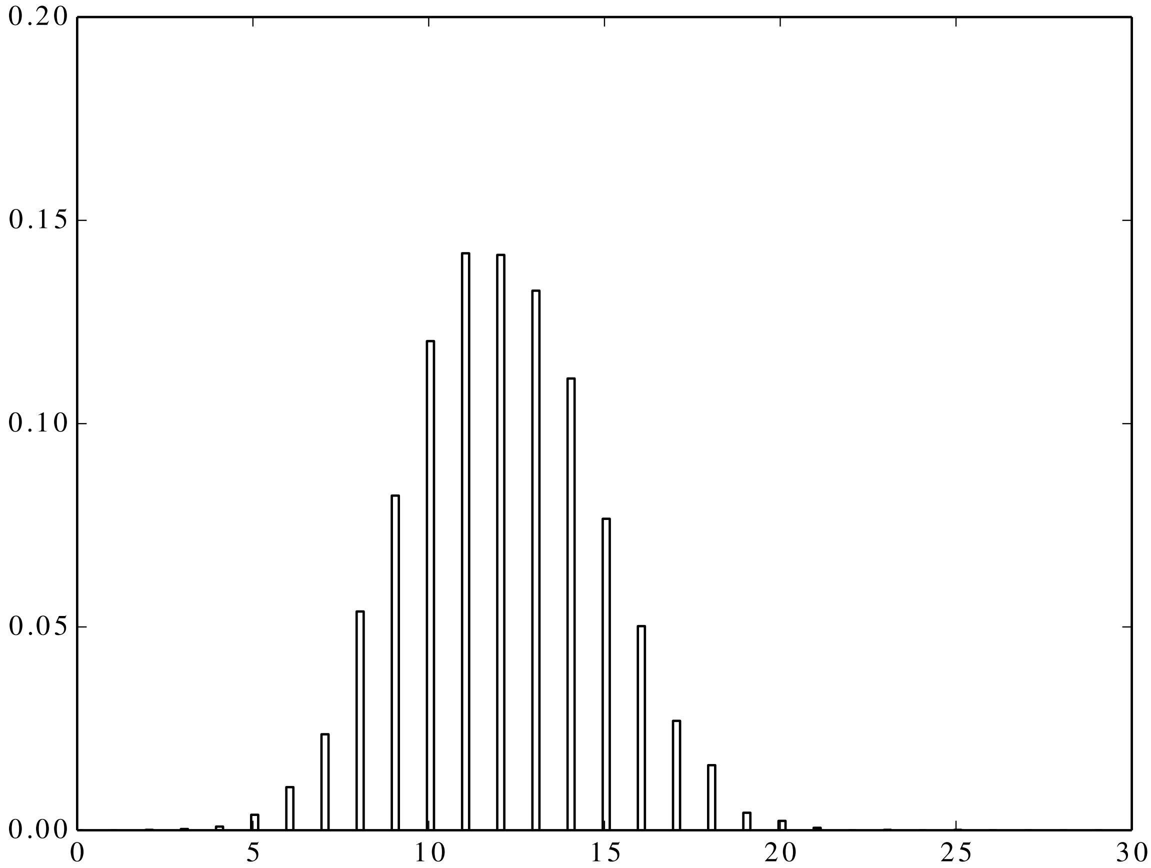
Valeurs (x_i)	x_1	...	...	x_s
Probabilités (p_i)	p_1	...	...	p_s

où $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$

• Souvent on définit une loi en donnant une expression.

Dire que $X \hookrightarrow B(n,p)$ signifie que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ *et* $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

• On représente graphiquement une loi de probabilité par un diagramme en bâtons.



• Si B est une partie de $X(\Omega)$ alors : $\mathbb{P}([X \in B]) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}([X = x])$

• Si $a < b$ alors : $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) = \sum_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ x \in X(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x])$

9.6 Fonction de répartition.

Définition

> Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini.
> Soit X une variable aléatoire sur Ω,
> On appelle fonction de répartition de X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ qui à chaque nombre réel x associe le nombre $\mathbb{P}([X \leqslant x])$.

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}$$

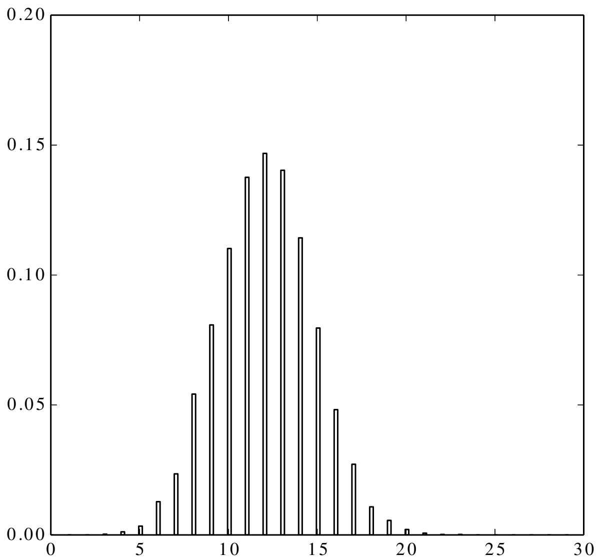
Proposition :

> Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ on a :
> $$\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F(b) - F(a)$$

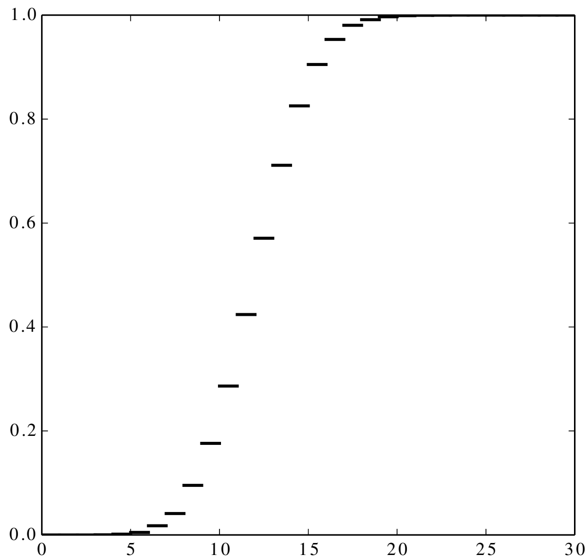
Démonstration :

La réunion disjointe : $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$ entraîne : $\mathbb{P}(X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant a) + \mathbb{P}(a < X \leqslant b)$ et donc $\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F(b) - F(a)$

Représentation graphique :



Loi de probabilité



Fonction de répartition.

Proposition :

> Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F alors :
> - F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
> - F est constante par morceaux. (car $X(\Omega)$ est fini)
> - F est discontinue à gauche en les x_i.
> - $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Remarques : *(passer de l'une à l'autre).*

- On peut construire la loi de probabilité de X à partir de sa fonction de répartition :

$$\mathbb{P}([X = x_1]) = F(x_1) \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k \in [\![2;n]\!], \quad \mathbb{P}([X = x_k]) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

- On peut construire la fonction de répartition de X à partir de sa loi de probabilité de X :

si $x < x_1$, $F(x) = 0$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, si $x_k \leqslant x < x_{k+1}$ alors $F(x) = F(x_{k-1}) + \P([X = x_k])$

$$\text{ou encore} \quad \text{si } x_k \leqslant x < x_{k+1} \quad \text{alors} \quad F(x) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = x_i])$$

9.6.1 Espérance

Définition.

Définition

Soit X une variable aléatoire.
L'espérance mathématique de X est le réel $\mathbb{E}(X)$ défini par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}([X = x])$

Linéarité.

Théorème : (linéarité de l'espérance)

X, Y sont deux variables aléatoires sur Ω et a et b deux réels.

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y)$$

Théorème de transfert.

Théorème :

Soient φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (définie sur $X(\Omega)$) et X une variable aléatoire sur Ω,
La variable aléatoire $\varphi(X)$ a pour espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\ \mathbb{P}([X = x])$$

9.6.2 Variance.

Définitions.

Définition

La variance d'une variable aléatoire X est le réel $V(X)$ défini par : $V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$

Formule de Kœnig-Huygens.

Proposition :

Pour toute variable aléatoire X sur Ω, on a : $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Propriétés.

Proposition :

Pour toute variable aléatoire X sur Ω, et pour tous réels a et b, on a : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Ecart-type.

L'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Définitions :

- On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.
- Pour X une variable aléatoire telle que $V(X) \neq 0$,
  $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centrée réduite** associée à X.

9.7 Indépendance

9.7.1 Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires,

Dire que X et Y sont indépendantes signifie que :

quel que soit le couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$

9.7.2 Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions,

si $X_, Y$ sont indépendantes **alors** $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

9.7.3 n variables aléatoires

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de variables aléatoires,

Dire que les X_k sont *(mutuellement)* indépendantes signifie que :

quel que soit la liste $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que $x_k \in X_k(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k = x_k)$

9.7.4 Propriétés

Propositions :

Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$,

❶ **Si** $X_1, , \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ l'est aussi.

❷ (***Lemme des coalitions***)

Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ deux fonctions,

si $X_1, \dots, X_p, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

$f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

❸ Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

si $X_1, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont (*mutuellement*) indépendantes.

9.7.5 Espérance de XY et variance de $(X + Y)$

Théorème :

❶ Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

❷ Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors $E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$ et $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

9.8 Lois usuelles.

Soient n un entier non nul et X une variable aléatoire de $(\Omega; \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$,

9.8.1 Loi certaine.

Soit a un nombre réel.

La variable certaine égale à a est la fonction constante $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\quad \mathbb{E}(X) = a \qquad V(X) = 0$.

9.8.2 Loi de Bernoulli.

Définition :

Soit p un réel de $]0,1[$,

Dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p signifie que : $\begin{cases} X(\Omega)=\{0,1\} \\ \mathbb{P}([X=0])=1-p\ ; \quad \mathbb{P}([X=1])=p \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\mathbb{E}(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$

Remarque : *(fonction indicatrice)*

$$\text{Si } A \text{ est un événement de } \Omega \text{ alors } \mathbb{1}_A \text{ est une variable aléatoire et } \mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$$

Simulation avec une fonction Python :

```
def bernoulli(p):
    if random() <= p:
        return 1
    return 0
```

9.8.3 Loi uniforme.

Définition :

Dire que X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ signifie que : $\begin{cases} X(\Omega)=[\![1;n]\!] \\ \forall i \in [\![1;n]\!]\ , \quad \mathbb{P}([X=i])=\dfrac{1}{n} \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ et on redémontre que $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

Pour a et b des entiers $(a<b)$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![a;b]\!]\right)$ signifie $\begin{cases} X(\Omega)=[\![a;b]\!] \\ \forall i \in [\![a;b]\!]\ , \quad \mathbb{P}([X=i])=\dfrac{1}{b-a+1} \end{cases}$

On a alors : $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

Simulation avec une fonction Python de la réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![a;b]\!]\right)$

```
def uniforme_discret(a,b):
    return a + int((b-a+1)*random())
```

9.8.4 Loi binomiale.

Définition :

Soit p un réel de $]0,1[$,

Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n,p) signifie que : $\begin{cases} X(\Omega)=[\![0;n]\!] \\ \\ \forall k \in [\![0;n]\!]\ ,\ \mathbb{P}([X=k])=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \end{cases}$

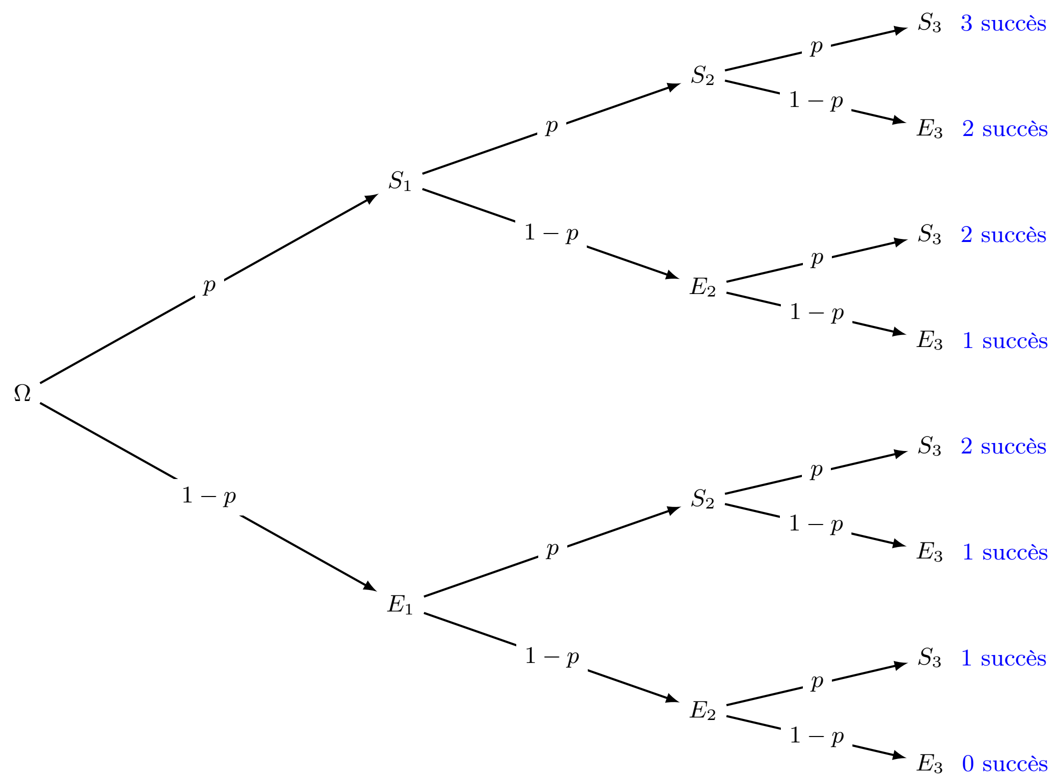
On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,p\right)$ et on a $\mathbb{E}(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Dans quelles situations peut-on observer une loi binomiale ?

Soit $\mathcal{E}$ une expérience constituée de n épreuves **identiques et indépendantes** $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_n$
(toutes modélisées par $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$) et A un événement de Ω de probabilité $\mathbb{P}(A)=p$.

Si X est la variable aléatoire égale **au nombre de réalisation** de A au cours des n épreuves alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Schéma de Bernoulli



Autre situation.

Théorème : *Somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes.*

> La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n, p)

Soient n un entier naturel non nuls et p un réel de l'intervalle $]0, 1[$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} ① \ X_1, \dots, X_n \ \text{ sont indépendantes} \\ ② \ \forall i \in [\![1; n]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ ③ \ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \end{cases} \quad , \qquad \text{alors} \quad X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$$

Simulation avec une fonction Python :

```python
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```

10

Equations différentielles.

Plan du chapitre

10.1 Equations différentielles homogènes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ *(non trivial)*, on note $D^k(I)$ l'espace vectoriel des fonctions k fois dérivables sur I.

• **Equations différentielles linéaire homogènes d'ordre 1 sous forme résolue.**

Soit a une fonction continue sur I, on note (E_0) l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$.

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = 0 \right\}$$

Proposition.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_0) est sous espace vectoriel de $D_1(I)$.

Démonstration :

Théorème.

On note A une primitive quelconque de a sur I,
l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-A(t)} \end{array} \ \middle|\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration :
Soit f une fonction dérivable sur I, on note $g : t \longmapsto e^{A(t)} f(t)$,

$$
\begin{array}{lll}
f \in S_{(E_0)} & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad e^{A(t)} f'(t) + a(t)e^{A(t)} f(t) = 0 \qquad \text{car} \quad e^{A(t)} \neq 0 \\
& \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad g'(t) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad g(t) = k \qquad \text{car} \quad I \text{ est un intervalle} \\
& \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)} f(t) = k \\
& \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad f(t) = ke^{-A(t)} \qquad \text{car} \quad e^{-A(t)} \neq 0
\end{array}
$$

■

Proposition : $\boxed{S_{(E_0)} = \text{Vect } (t \longmapsto e^{-A(t)}), \quad \dim(S_{(E_0)}) = 1 \quad \text{et} \quad S_{(E_0)} \subset C^1(I)}$

Remarques :

- Si f est une solution non nulle de (E_0) alors $S_{(E_0)} = \text{Vect}< f >$
- Les solutions non nulles de (E_0) ne s'annulent pas sur I.
- Si une solution de (E_0) s'annule alors c'est la fonction nulle.

• **Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.**

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note (E_0) l'équation différentielle :

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0 \right\}$$

Proposition.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_0) est sous espace vectoriel de $D_2(I)$.

Théorème

On distingue trois cas :

❶ si $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k_1\, e^{r_1 t} + k_2\, e^{r_2 t} \end{array} \;\middle|\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \mathrm{Vect}(t \longmapsto e^{r_1 t}\ ,\ t \longmapsto e^{r_2 t})$$

❷ si $ax^2 + bx + c = 0$ a une racine réelle double r_0,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k_1\, e^{r_0 t} + k_2\, t\, e^{r_0 t} \end{array} \;\middle|\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \mathrm{Vect}(t \longmapsto e^{r_0 t}\ ,\ t \longmapsto te^{r_0 t})$$

❸ si $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\overline{\alpha + i\omega}$,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k_1\, \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\ +\ k_2\, \sin(\omega t)\, e^{\alpha t} \end{array} \;\middle|\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \mathrm{Vect}(t \longmapsto \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\ ,\ t \longmapsto \sin(\omega t)\, e^{\alpha t})$$

Proposition :

Dans tous les cas : $\dim(S_{(E_0)}) = 2$ et $S_{(E_0)} \subset C^\infty(I)$

Remarques.

- On pourra sauf indication contraire utiliser les résultats suivants :
  - Si $r_1 \neq r_2$ alors $(t \longmapsto e^{r_1 t}\ ,\ t \longmapsto e^{r_2 t})$ est une famille libre.
  - pour tout réel r_0, $(t \longmapsto e^{r_0 t}\ ,\ t \longmapsto te^{r_0 t})$ est une famille libre.
  - Si $\omega \neq 0$ alors $(t \longmapsto \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\ ,\ t \longmapsto \sin(\omega t)\, e^{\alpha t})$ est une famille libre.

- Dans le cas ❸ on peut aussi écrire les solutions sous la forme : $t \longmapsto Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$

10.2 Equation avec second membre.

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I.

10.2.1 Première ordre.

Soit a une fonction continue sur I, on note :

$$(E)\ :\ y' + a(t)y = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad (E_0) : y' + a(t)y = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E) sur I est :

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \right\}$$

Théorème :

Si g est une solution (*particulière*) de (E) sur I alors

l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I est : $S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) + g(t) \end{array} \middle| \quad h \in S_{(E_0)} \right\}$

ou plus simplement : $S_{(E)} = \left\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$

Démonstration :

On suppose que g est une solution de (E), (On sait que : $\forall t \in I, \quad g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t)$)

Soit f une fonction dérivable sur I,

$$\begin{array}{rcl} f \in S_{(E)} & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \\ & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = g'(t) + a(t)g(t) \\ & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad (f-g)'(t) + a(t)(f-g)(t) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & f - g \in S_{E_0} \\ & \Longleftrightarrow & \exists h \in S_{E_0} : \quad f - g = h \\ & \Longleftrightarrow & \exists h \in S_{E_0} : \quad f = h + g \end{array}$$

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} :\ f = g + h \right\} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \left\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$$

■

Remarque :

Si A est une primitive de a sur I et g est une solution de (E) alors

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-A(t)} + g(t) \end{array} \middle| \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

10.2.2 Deuxième ordre à coefficients constants.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note :

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = \varphi(t) \right\}$$

Théorème :

Si g est une solution (*particulière*) de (E) sur I alors

l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I est : $S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) + g(t) \end{array} \middle| \ h \in S_{(E_0)} \right\}$

ou plus simplement : $S_{(E)} = \left\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$

Démonstration :

On suppose que g est une solution de (E), (On sait que : $\forall t \in I, \quad ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) = \varphi(t)$).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I,

$$\begin{array}{rcl} f \in S_{(E)} & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = \varphi(t) \\ & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) \\ & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad a(f-g)''(t) + b(f-g)'(t) + c(f-g)(t) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & f - g \in S_{E_0} \\ & \Longleftrightarrow & \exists h \in S_{E_0} : \quad f = h + g \end{array}$$

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} : \ f = g + h \right\} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \left\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$$

■

10.3 Principe de superposition.

10.3.1 Première ordre.

Proposition :

Soient a, φ_1, φ_2 trois fonctions continues sur I et deux réels α et β,

on considère trois équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t) \qquad (E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$$

Si g_1 est une solution de (E_1), g_2 est une solution de (E_2) alors $\alpha g_1 + \beta g_2$ est une solution de (E).

Démonstration :

On suppose que : $\forall t \in I, \quad g_1'(t) + a(t)g_1(t) = \varphi_1(t) \quad$ et $\quad \forall t \in I, \quad g_2'(t) + a(t)g_2(t) = \varphi_2(t)$

On a alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in I$,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha g_1 + \beta g_2)'(t) + a(t)(\alpha g_1 + \beta g_2)(t) & = & \alpha(g_1'(t) + a(t)g_1(t)) + \beta(g_2'(t) + a(t)g_2(t)) \\ & = & \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) \end{array}$$

donc $\alpha g_1 + \beta g_2$ est solution de (E)

■

Ce principe permet de simplifier une équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t)$$

10.3.2 Deuxième ordre.

Proposition :

Soients φ_1, φ_2 des fonctions définies sur l'intervalle I et α, β des réels,

On considère les équations différentielles : $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$,

$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t)$ et $(E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$

Si g_1 est une solution de (E_1) sur I et g_2 est une solution de (E_2) sur I

alors $\alpha\, g_1 + \beta\, g_2$ est une solution de (E) sur I

Démonstration :

Cette proposition permet de simplifier une équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

10.4 Méthode de variation de la constante.

On ici s'intéresse aux équations différentielles de la forme : $(E) :\ y' + a(t)\, y = \varphi(t)$.
avec a et φ deux **fonctions continues** sur l'intervalle I.

Ces équations sont appelées **équations différentielles linéaires résolues** du premier ordre.

Théorème : $\boxed{(E) \text{ possède au moins une solution sur } I}$

Démonstration : ***(Méthode de la variation de la constante)***

En trois étapes :

❶ On commence par résoudre (E_0), a est continue sur I, on note A une de ses primitives sur I :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k\exp\left(-A(t)\right) \end{array} \;\middle|\; k \in \mathbb{R} \right\}$$

dans la suite, on pose $f_0(t) = \exp\left(-A(t)\right)$ et ainsi : $S_0 = \mathrm{Vect}(f_0)$

❷ **On cherche une solution de** (E) *(on cherche une solution particulière)*

Soit k une fonction dérivable sur I, on note : $g : t \mapsto k(t) \times f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff \forall t \in I,\quad g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I,\quad k'(t)\, f_0(t) + k(t)\, f_0'(t) + a(t)\, k(t)\, f_0(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I,\quad k'(t) f_0(t) + k(t)\underbrace{\left(f_0'(t) + a(t) f_0(t)\right)}_{=0} = \varphi(t) \qquad \text{car } f_0 \in S_{E_0} \\ &\iff \forall t \in I,\quad k'(t) f_0(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I,\quad k'(t) = \varphi(t)\exp\left(A(t)\right) \end{aligned}$$

donc en choisissant pour k une des primitives de $t \longmapsto \varphi(t)\exp(A(t))$
(*cette primitive existe car cette fonction est continue sur I*),

on obtient bien $g : t \mapsto k(t) \times \exp(-A(t))$ est une solution de (E). ■

❸ Connaissant les solutions de (E_0) et une solution de (E) on peut conclure.

Exemples : *Ex 6 de la feuille_ Act_ 13*

Quand utilise-t-on cette méthode :

① Sur une équation différentielle du premier ordre $y' + a(t)\, y = \varphi(t)$.

② Quand l'énoncé ne donne pas la forme d'une solution particulière.

③ Quand on ne trouve pas de solution en faisant : une conjecture sur la forme d'une solution suivie d'une vérification par calcul.

Remarques :

- pour ③ certains utilisent la phrase [1] : "Chercher une solution sous la forme du second membre"
- pour ceux qui veulent aller plus loin ils peuvent étudier le chapitre 6 de ce cours.

10.5 Condition initiale.

10.5.1 Premier ordre.

Soient I un intervalle, $a : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I,

on note (E) l'équation différentielle : $y' + a(t)y = \varphi(t)$

Théorème :

Quel que soient t_0, y_0 deux nombres réels avec $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I vérifiant :

$$f(t_0) = y_0$$

Démonstration :

Soit f une solution de (E) et $k \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \longmapsto k\,e^{-A(t)} + g(t)$,

$$\begin{aligned} f(t_0) = y_0 \quad & \iff \quad k\,e^{-A(t_0)} + g(t_0) = y_0 \\ & \iff \quad k\,e^{-A(t_0)} = y_0 - g(t_0) \\ & \iff \quad k = (y_0 - g(t_0))e^{A(t_0)} \\ & \iff \quad f : t \longmapsto (y_0 - g(t_0))\,e^{-(A(t)-A(t_0))} + g(t) \end{aligned}$$

■

10.5.2 Deuxième ordre.

Soient a, b et c trois **réels** tels que $a \neq 0$, on note $(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$

On suppose ici que (E) possède au moins une solution sur I.

Théorème :

Soit t_0, y_0 et y_1 trois nombres réels avec $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution f de (E) vérifiant :

$$f(t_0) = y_0\ , \quad f'(t_0) = y_1$$

Démonstration :

10.6 Recherche d'une solution particulière *(Complément)*.

Ici on s'intéresse aux équations différentielles à **coefficients constants**.

Ces propriétés illustrent la phrase déjà citée dans ce cours *(paragraphe 4)* [2] :

"Chercher une solution sous la forme du second membre"

10.6.1 Second membre de la forme. $t \longmapsto \cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$

Première ordre. (a *est un réel*) $(E) : y' + ay = \varphi(t)$

Si φ est de la forme $t \longmapsto \cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto \sin(\omega t)$ (ω un réel non nul).

on cherche une solution de (E) sous la forme $t \longmapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$

où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exemples : $y' + 2y = \cos(2t)$ $\qquad$ $y'(t) - 4y(t) = \sin(4t)$

Deuxième ordre.(a, b, c *sont des réels*)

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$$

1. cette phrase sert à guider la recherche en proposant une conjecture, sans constituer une méthode rigoureuse ni une preuve
2. On notera qu'on ne devrait l'utiliser que lorsque les coefficients sont constants, mais pour les équations d'ordre 1 ou 2.

Si φ est de la forme $t \longmapsto \cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto \sin(\omega t)$ (ω un réel non nul).

on commence par chercher une solution du type $t \longmapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

et si on ne trouve pas on cherche sous la forme $t \longmapsto \lambda\, t\, \cos(\omega t) + \mu\, t\, \sin(\omega t)$

où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exemples : $y'' + y' + y = \sin(3t)$ $\qquad y''(t) - 3y'(t) + y(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

10.6.2 Second membre de la forme. $t \longmapsto P(t)e^{mt}$

Première ordre. (*a est un réel*)

$$(E) : y' + ay = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \longmapsto P(t)e^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme).

on cherche une solution de (E) sous la forme $t \longmapsto Q(t)e^{mt}$, où Q un polynôme à déterminer.

Exemples : $y' + 2y = e^{3t}$ $\qquad y'(t) - 4y(t) = t^3 e^{-t}$

Deuxième ordre.(*a, b, c sont des réels*)

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \longmapsto P(t)e^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme).

on cherche une solution sous la forme $t \longmapsto Q(t)e^{mt}$, où Q un polynôme à déterminer.

Exemples : $y'' + y' + y = e^{-4t}$ $\qquad y''(t) - 3y'(t) + y(t) = te^{2t}$

11

Géométrie dans le plan et dans l'espace.

Plan du chapitre

11.1 Introduction.

11.1.1 Des vecteurs.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan (ou de l'espace) qui à tout point M associe l'unique point M' telle que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

La translation de vecteur nul est l'identité du plan (ou de l'espace).

Pour quatre points A, B, C, D du plan (ou de l'espace) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

Pour quatre points A, B, C, D du plan (ou de l'espace) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

Un vecteur a une infinité de représentants : on peut représenter un vecteur à partir de tout point de l'espace :

Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point A, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

11.1.2 Repères, coordonnées.

On se place ici dans le plan et l'espace géométrique usuels munis chacun d'un repère orthonormal.

On note $\mathcal{P}$ le plan et $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. On note $\mathcal{B}$ la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

• on écrit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour indiquer que M est le point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

• on écrit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour indiquer que $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (a, b) dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit l'unique point $\vec{u}$ vérifiant : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

On note $\mathcal{E}$ l'espace et $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal.

• on écrit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour indiquer que M est le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

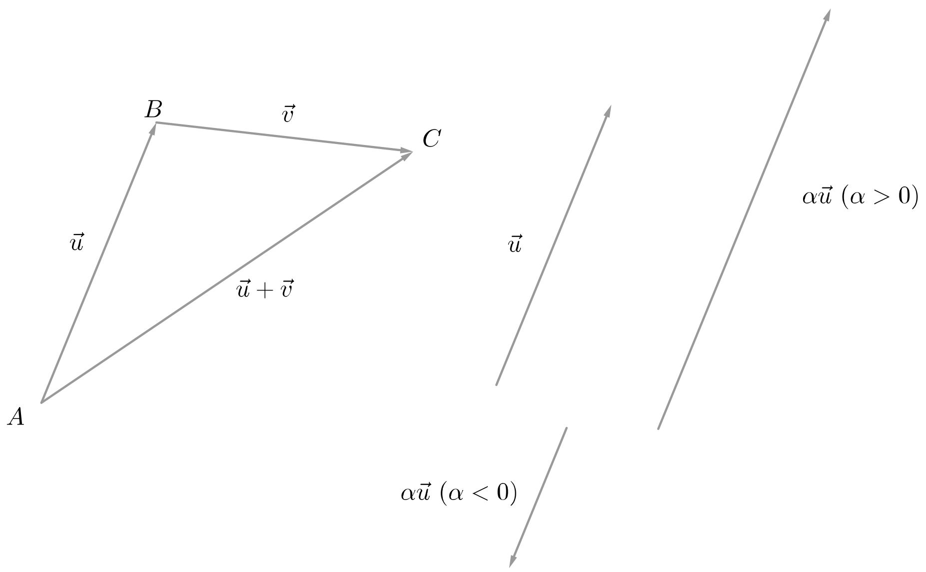
• on écrit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour indiquer que $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

Une fois ce repère fixé,
L'application qui à (x, y, z) associe $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est une bijection, l'image de (x, y, z) est le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

11.1.3 Calculs sur les vecteurs.

On définit deux opérations sur l'ensemble des vecteurs.
La définition de la somme est la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad\qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$



On définit alors deux opérations sur $\mathbb{R}^3$ compatibles avec les opérations sur les vecteurs :

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \qquad \text{et} \qquad k(x,y,z)=(kx,ky,kz)$$

Si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

L'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) est un espace vectoriel.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, a et b deux scalaires, on a alors :

1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
2. $\exists\vec{0} \quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
3. $\exists\vec{u}' \quad \vec{u}+\vec{u}'=\vec{0}$ (on note : $\vec{v}'=-\vec{v}$)
4. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
5. $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$
6. $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$
7. $(ab)\vec{u}=a(b\vec{u})$
8. $0\ \vec{u}=\vec{0}$
9. $1\ \vec{u}=\vec{u}$

Généralisation de la relation de Chasles avec $A_0,A_1,\ldots,A_n$ des points de l'espace.

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \overrightarrow{A_0A_n}$$

11.1.4 Norme d'un vecteur

Soient A et B deux points de l'espace, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB.

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Si $\vec{u}$ est vecteur de l'espace de coordonnées (x,y,z) alors :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Propositions :

① $\|\|\vec{u}\|\| \geqslant 0$	② $\|\|\vec{u}\|\|=0 \iff \vec{u}=\vec{0}$
③ $\|\|\lambda\vec{u}\|\|=\|\lambda\|.\|\|\vec{u}\|\|$	④ $\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\| \leqslant \|\|\vec{u}\|\|+\|\|\vec{v}\|\|$

11.1.5 Vecteurs colinéaires.

Définition :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe $(a,b)\neq(0,0)$ tel que :

$$a\,\vec{u}+b\,\vec{v}=\vec{0}$$

Remarques :

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que : $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.

Définition (*famille libre de deux vecteurs*).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si, et seulement si, $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0} \Longrightarrow a=b=0$.

Cas particulier de deux vecteurs du plan.

Proposition : *Condition (CNS) de colinéarité.*

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy'-x'y=0$

Définition :

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$,

on appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'-x'y$.

11.2 Produit scalaire.

On se place toujours dans un repère orthonormal.

11.2.1 Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace respectivement de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z')
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarques :

- $||\vec{u}||^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u}$
- Définition similaire pour le produit scalaire de deux vecteurs du plan : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$

D'autres moyens de calculer le produit scalaire de deux vecteurs.

avec les normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

avec le cosinus :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Soient A, B et C tels que $A \neq B$ et $A \neq C$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$$

avec le projeté orthogonal :

Soient A, B et C tels que $A \neq B$,
on note H est le projeté orthogonal de C sur (AB),
si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$
sinon $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\, AB \times AH$

Avec la notion de valeur algébrique :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

Orthogonalité.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Deux droites (AB) et (DC) sont **orthogonales** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

11.2.2 Propriétés.

Propositions :

① $\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
② $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
③ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$

$$(\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \alpha\, \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \beta\, \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$$

④ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha\, \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta\, \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

Pour ③ et ④ on parle de bilinéarité du produit scalaire.

Propositions :

① $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
② $||\vec{u}||^2 = \vec{u}.\vec{u}$ (aussi noté $\vec{u}^{\,2}$)
③ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
④ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
⑤ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

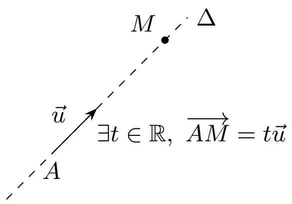
11.3 Droites et cercles du plan.

On note $\mathscr{P}$ le plan (*un ensemble de points*) et P l'ensemble des vecteurs du plan.
On munit le plan d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

11.3.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite.

Soient A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan.
La droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (vecteur directeur) est l'ensemble : (noté $\mathcal{D}(A,\vec{u})$)

$$\left\{ M \in \mathscr{P} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}$$



Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de P

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A,\vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R},\quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \end{array} \right.$$

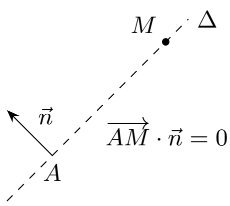
$\left\{ \begin{array}{l} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \end{array} \right.$ $(t \in \mathbb{R})$ est **une représentation paramétrique de la droite** de $\mathcal{D}(A,\vec{u})$

Remarques : Soient A et B deux points du plan et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
- $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}(B,\vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}(B,\vec{v})$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

11.3.2 Equation cartésienne d'une droite, vecteur normal.

Définition :

Soit $\mathfrak{D}$ une droite passant par le point A,
Dire que $\vec{n}$ est une vecteur normal de $\mathfrak{D}$ signifie que $M \in \mathfrak{D} \iff \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = 0$



Si le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ alors il existe c tel que $\mathcal{D} : ax + by = c$

$$\mathcal{D} : ax+by=c \quad \text{signifie que} \quad \mathcal{D} = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{P} \;\middle|\; ax+by=c \right\}$$

L'équation : $ax + by = c$ est appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$.

Remarques : Soient $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteur normal $\vec{n}'$,
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

Proposition :

① Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite D d'équation cartésienne $ax + by = c$

② Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D d'équation cartésienne $ax + by = c$

Remarques : Soient $\mathcal{D} : ax + by = c$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y = c'$,
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' = 0$

11.3.3 Equation cartésienne d'un cercle du plan.

Soient $\Omega\begin{pmatrix}x_\Omega\\y_\Omega\end{pmatrix}$ un point et $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

Les points de $\mathscr{C}$ sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{C} \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

11.3.4 Représentation paramétrique d'un cercle du plan.

Soient $\Omega\begin{pmatrix}x_\Omega\\y_\Omega\end{pmatrix}$ un point et $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

Les points de $\mathscr{C}$ sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{C} \iff \exists t \in [0; 2\pi[, \quad \begin{cases} x = x_\Omega + R\cos(t) \\ y = y_\Omega + R\sin(t) \end{cases}$$

11.4 Droites et plans de l'espace.

On note $\mathscr{E}$ l'espace (*un ensemble de points*) et E l'ensemble des vecteurs de l'espace.
On munit l'espace d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

11.4.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite.

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (vecteur directeur) est l'ensemble : (noté $\mathcal{D}(A, \vec{u})$)

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}$$

Soient $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une **représentation paramétrique de la droite** $\mathcal{D}(A, \vec{u})$

Remarques : Soient A et B deux points de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

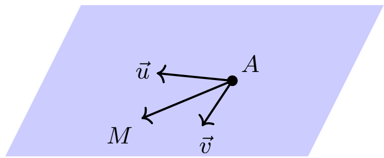
- $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}(B,\vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $\mathcal{D}(B,\vec{v})$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Attention :
  Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si, et seulement si, elles sont orthogonales et sécantes.

11.4.2 Base d'un plan, représentation paramétrique d'un plan.

Soient A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Le plan passant par A et dirigée par $(\vec{u},\vec{v})$ (base du plan) est l'ensemble :

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \;\middle|\; \exists (t,t') \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t'\vec{v} \right\}$$

On notera $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$ ce plan.



Plan Π

Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ un point de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

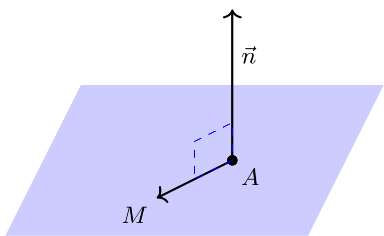
Les points du plan $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$ sont caractérisés par l'équivalence :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi(A,\vec{u},\vec{v}) \iff \exists (t,t') \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \quad ((t,t') \in \mathbb{R}^2)$ est une **représentation paramétrique du plan** $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$.

11.4.3 Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan.

Soit $\mathfrak{P}$ un plan passant par le point A,
Dire que $\vec{n}$ est une vecteur normal de $\mathfrak{P}$ signifie que $M \in \mathfrak{P} \iff \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = 0$



Plan $\mathfrak{P}$

Remarques :

- Les vecteurs normaux d'un plan de l'espace sont non nuls.
- Les vecteurs normaux d'un plan $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$ sont les vecteurs $\vec{n}$ non nuls vérifiant : $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = 0$.
  (Il suffit d'être orthogonal à deux vecteurs non colinéaires pour l'être à tous les vecteurs du plan).
- Si $\mathfrak{P} : ax + by + cx = d$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathfrak{P}$.
- Si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathfrak{P}$ alors il existe d tel que $\mathfrak{P} : ax + by + cx = d$

L'équation : $ax + by + cz = d$ est appelée **équation cartésienne** du plan $\mathfrak{P}$.

Soient deux plans $\mathfrak{P} : ax + by + cz = d$ et $\mathfrak{P}' : a'x + b'y + c'z = d'$

- $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
- $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.

Soient un plan $\mathfrak{P}$ de vecteurs normal $\vec{n}$ et $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- $\mathscr{D}$ et $\mathfrak{P}$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
- $\mathscr{D}$ et $\mathfrak{P}$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

11.4.4 Système d'équations cartésiennes définissant une droite.

Toute droite de l'espace peut s'exprimer comme l'intersection de deux plans sécants.

On obtient alors une caractérisation des points $M(x, y, z)$ d'une droite par un système d'équations linéaires.

$$\Delta : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

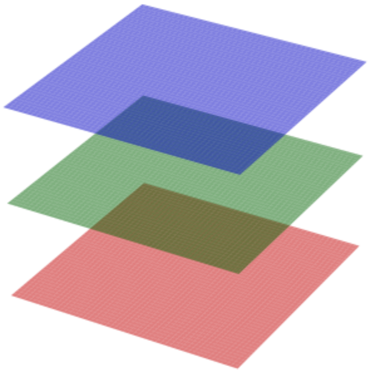
Remarques :

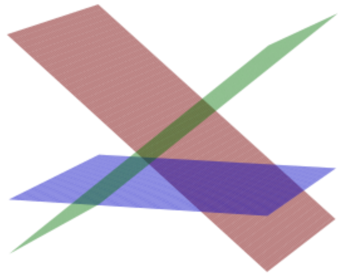
- Pour que ce système caractérise les points d'une droite, les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont nécessairement non colinéaires.
- Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ si, et seulement si, $\vec{u} \perp \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \perp \vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

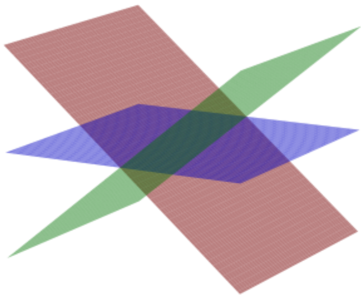
11.4.5 Positions relatives de trois plans.

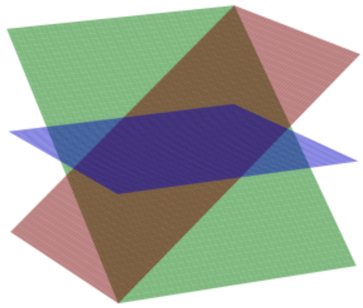
$$\text{On note : } \quad \Sigma \begin{cases} a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z = d_1 & \mathcal{P}_1 \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = d_2 & \mathcal{P}_2 \\ a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z = d_3 & \mathcal{P}_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$$

1. Trois plans parallèles. ($\mathcal{S}$ est vide ou $\mathcal{S}$ est un plan).
2. Exactement deux plans parallèles. ($\mathcal{S}$ est vide ou $\mathcal{S}$ est une droite)
3. Aucun couple de plans parallèles. ($\mathcal{S}$ est vide, une droite ou $\mathcal{S}$ est un point).









11.5 Projection orthogonale

12

Fonctions réelles de deux variables réelles.

Plan du chapitre

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
Soient a, b, c et d tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.
Dans ce chapitre f désigne une application de $P =]a, b[\times]c, d[$ dans $\mathbb{R}$. *(P est un pavé ouvert du plan $\mathbb{R}^2$).*

$$f \quad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

12.1 Surface représentative.

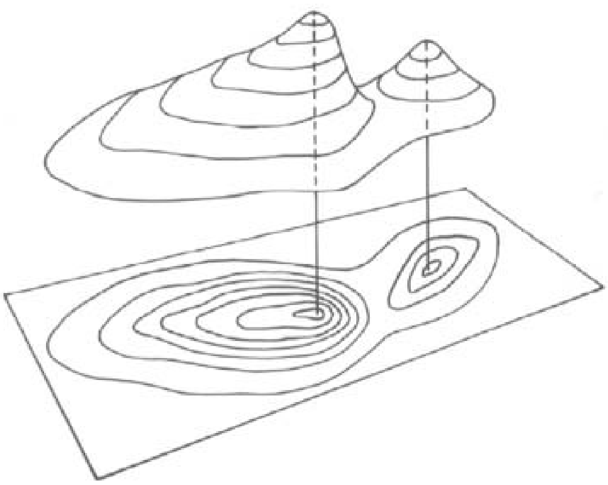
La représentation graphique de f dans un repère de l'espace est une surface, c'est l'ensemble :

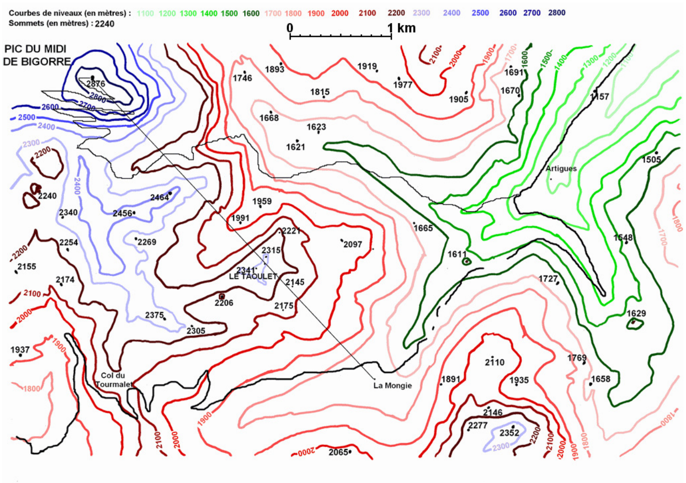
$$S_f = \{ M(x,y,z) \in \mathcal{E} \mid \quad z = f(x,y) \ \}$$

12.2 Courbes (lignes) de niveaux.

On appelle courbes (ou lignes) de niveau de la surface $S : z = f(x,y)$ les ensembles de la forme :

$$\{ M(x,y) \in \mathcal{P} \mid f(x,y) = c \ \} \qquad \text{où } c \text{ est une constante réelle}$$





12.3 Dérivées partielles du premier ordre.

Définitions :

Soit $(x_0, y_0) \in P$.

- Dire que f est dérivable par rapport à x en (x_0, y_0),

  signifie que la fonction partielle $x \longmapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0,

  ou encore $\dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ;

  on note alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

- Dire que f est dérivable par rapport à y en (x_0, y_0),

  signifie que la fonction partielle $y \longmapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0,

  ou encore $\dfrac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ;

  on note alors : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$

Remarques :

- Pour déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on dérive $x \longmapsto f(x, y)$ en considérant que y est une constante.
- Pour déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, on dérive $y \longmapsto f(x, y)$ en considérant que x est une constante.
- On définit ici des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} \begin{array}{rcl} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} \begin{array}{rcl} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array}$

Proposition.

Soit f admettant des dérivées partielles sur P :

❶ Si $\forall (x, y) \in P,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ alors $\exists \varphi :]c, d[\to \mathbb{R} :\ \forall (x, y) \in P,\ f(x, y) = \varphi(y)$

❷ Si $\forall (x, y) \in P,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ alors $\exists \varphi :]a, b[\to \mathbb{R} :\ \forall (x, y) \in P,\ f(x, y) = \varphi(x)$

12.4 Fonctions de classe C^1.

Définition.

Dire que f est de classe C^1 sur P signifie que :

① f admet en tout point des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de P et

② ses dérivées partielles sont continues sur P.

12.5 Développement limité d'ordre 1

.

Théorème

Si f une fonction de classe C^1 sur P alors

Pour chaque $(x_0, y_0) \in P$ fixé, il existe une fonction ε telle que pour tout $(x, y) \in P$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + d\,\varepsilon(d)$$

avec $d = ||(x-x_0, y-y_0)||$ et $\lim\limits_{d \to 0} \varepsilon(d) = 0$

Remarque : $||(x-x_0, y-y_0)|| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Complément. La différentielle de f en (x_0, y_0) notée $df_{(x_0,y_0)}$ est la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$(a,b) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ b$$

on note aussi : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

12.6 Gradient.

Définition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur P,
on appelle gradient de la fonction f en (x_0, y_0) le vecteur :

$$\text{grad}(f)(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Remarques.

- On note aussi $\nabla(f)(x_0, y_0)$ ou $\vec{\nabla}(f)(x_0, y_0)$ le gradient de f en (x_0, y_0).

- Le DL peut s'écrire en notant $M(x, y)$ et $M_0(x_0, y_0)$:

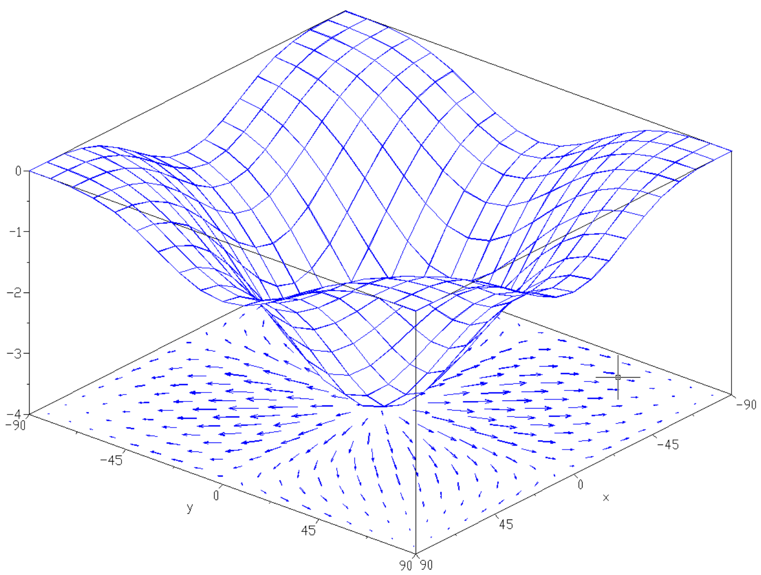
$$f(M) = f(M_0) + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(f)(M_0)\ .\ \overrightarrow{M_0M}}_{\text{produit scalaire}} + d\,\varepsilon(d)$$

avec $d = M_0M$ et $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$

Le gradient représenté dans le plan (Oxy) :

① le gradient est un vecteur normal aux courbes de niveaux.

② le gradient indique la direction de plus grande pente et dans le sens des plus grandes valeurs.



12.7 Dérivation de $t \longmapsto f(x(t), y(t))$.

Théorème :

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : P \to \mathbb{R}$ de classe C^1,
$x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que : $\forall t \in I, \quad (x(t), y(t)) \in P$.
La fonction $t \longmapsto f(x(t), y(t))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

$$t \longmapsto x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Si $g : t \longmapsto f(x(t), y(t))$ alors $g'(t) = \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } f} \right\rangle = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$

Interprétation : La variation de f le long d'une trajectoire est donnée par la projection du vecteur tangent sur la direction du gradient.

12.8 Dérivées partielles de $(x, y) \longmapsto f(u(x, y), v(x, y))$

Proposition.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. On pose

$$g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y))\,\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y))\,\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y))\,\frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \end{pmatrix}.$$

12.9 Condition nécessaire pour avoir un extremum local.

Définition.

Dire que f présente un maximum local (resp. minimum local) en $(x_0, y_0) \in P$
signifie qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tel que :

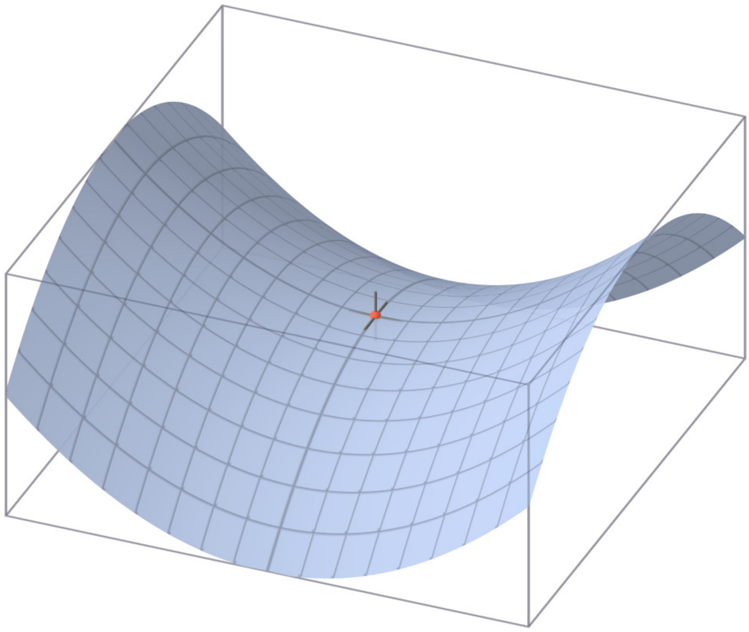
$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}, \quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \qquad (\text{ resp. } f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0) \text{ })$$

Proposition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur P et $(x_0, y_0) \in P$

si f admet un extremum en (x_0, y_0) **alors** $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Cette proposition n'est qu'une implication, il existe des contre-exemples à sa réciproque.
La nullité des dérivées partielles n'implique pas la présence d'un extremum local.



Définition :

On appelle **points critiques** de f les couples (x_0, y_0) de P vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

12.10 Dérivée partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz.

Définition :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $P =]a, b[\times]c, d[$,

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles sur P on note $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet des dérivées partielles sur P on note $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Théorème de Schwarz :

On note $P =]a, b[\times]c, d[$ et f une fonction de P dans $\mathbb{R}$,

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont continues sur P **alors** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

13

Statistique.

Plan du chapitre

13.1 Statistique univariée.

13.1.1 Les résultats d'une expérience.

Les résultats d'une expérience peuvent être qualitatives ou quantitatives.
Nous nous intéresserons ici aux résultats numériques. (souvent le résultat d'une mesure).

On note : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la liste des données (n-uplets). Chaque x_i est un nombre réel.

On commence souvent par rassembler les résultats identiques pour présenter les données sous la forme :

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
effectifs	e_1	e_2	$\cdots$	e_{p-1}	e_p

Les valeurs distinctes sont classées dans l'ordre croissant. $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \cdots < \tilde{x}_{p-1} < \tilde{x}_p$

L'effectif e_i est le nombre de résultats égaux à $\tilde{x}_i$, $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} e_i$ est l'effectif total.

Souvent on préfère souvent utiliser les fréquences plutôt que les effectifs.

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
fréquences	f_1	f_2	$\cdots$	f_{p-1}	f_p

La fréquence $f_i = \dfrac{e_i}{n}$ est la proportion de données dont la valeur est égale $\tilde{x}_i$. Remarque : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i = 1$

On présente aussi les résultats avec les effectifs cumulés.
L'effectif cumulé en un réel x est égal au nombre de données dont la valeur est inférieure ou égale à x.

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
effectifs cumulés	c_1	c_2	$\cdots$	c_{p-1}	c_p

pour i compris entre 1 et p, $c_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} e_k$

On utilise aussi les fréquences cumulées :

valeurs	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
fréquences cumulées	F_1	F_2	$\cdots$	F_{p-1}	F_p

pour i compris entre 1 et p, $\quad F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$

c'est la proportion de données dont la valeur est inférieure ou égale à $\tilde{x}_i$ et $F_p = 1$.

13.1.2 Des nombres caractéristiques.

Caractéristiques de position.

Moyenne :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{p} e_k}\left(\sum_{k=1}^{p} e_k\,\tilde{x}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} f_k\,\tilde{x}_k$$

Médiane : *(Définition)*

On suppose ici que les données brutes sont triées : $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n$.

si n est impair alors on choisit pour médiane le réel $x_{\frac{n+1}{2}}$

si n est pair alors on choisit pour médiane le réel $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$

Si on note $\mathrm{med}(x)$ la médiane on a :

$$\mathrm{card}\{\ i \mid x_i < \mathrm{med}(x)\ \} = \mathrm{card}\{\ i \mid X_i > \mathrm{med}(x)\ \}$$

Interprétation : La médiane est un réel qui partage la série en deux parties de même effectifs. (*Il n'y a pas unicité de ce paramètre*)

Si on change la numérotation comme avec Python : $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-2} \leqslant x_{n-1}$

si n est impair alors on choisit pour médiane le réel $x_{\frac{n-1}{2}}$

si n est pair alors on choisit pour médiane le réel $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}-1} + x_{\frac{n}{2}}\right)$

Premier et troisième quartiles. *(notées Q_1 et Q_3)*

Le **premier quartile** est l'unique valeur x_i où i est l'unique i de $[\![1,p]\!]$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{n}{4} \qquad \sum_{k=1}^{i} e_k \geqslant \frac{n}{4}$$

Le **troisième quartile** est l'unique valeur x_i où i est l'unique i de $[\![1,p]\!]$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{3n}{4} \qquad \sum_{k=1}^{i} e_k \geqslant \frac{3n}{4}$$

Interprétation : Les quartiles partagent en 4 parts *approximativement* égales.

Premier et neuvième déciles *(notées D_1 et D_9)* :

Le **premier décile** est l'unique valeur x_i où i est l'unique i de $[\![1,p]\!]$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{n}{10} \qquad \sum_{k=1}^{i} e_k \geqslant \frac{n}{10}$$

Le **neuvième décile** est l'unique valeur x_i où i est l'unique i de $[\![1,p]\!]$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{i-1} e_k < \frac{9n}{10} \qquad \sum_{k=1}^{i} e_k \geqslant \frac{9n}{10}$$

Interprétation : Les déciles partagent en 10 parts *approximativement* égales.

Remarques :

• L'ensemble de ses valeurs se présente souvent sous la forme d'un **boxplot** ou encore **une boite à moustaches**.

• On rencontre une autre définition des fractiles : les quartiles sont alors les quatre intervalles séparant la population en quatre *(Voir sujet 0 de Biologie)*.

Modes ou valeurs modales :

L'ensemble des valeurs des valeurs modales :

$$\left\{ \ \tilde{x}_i \ | \quad 1 \leqslant i \leqslant p \quad \text{et} \quad e_i = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} (e_k) \ \right\}$$

Interprétation :

- C'est un $\tilde{x}_i$ correspondant à la plus grande valeur des e_i. (*Il n'y a pas unicité de ce paramètre*).
- C'est une valeur qui apparaît le plus souvent.

Caractéristiques de dispersion.

L'écart-type est donné par chacune des formules :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} f_k (\tilde{x}_k - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{k=1}^{p} e_k} \left(\sum_{k=1}^{p} e_k (\tilde{x}_k - \overline{x})^2 \right)}$$

Remarques :

- On a toujours $\sigma_x \geqslant 0$.
- Si les x_i ont une unité alors σ_x a la même unité.
- $\sigma_x = 0$ si, et seulement si, $(x_1, ..., x_n) \in \text{vect} < (1, ..., 1) >$

On appelle **variance** (empirique) le carré de l'écart-type :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{p} f_k (\tilde{x}_k - \overline{x})^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{p} e_k} \left(\sum_{k=1}^{p} e_k (\tilde{x}_k - \overline{x})^2 \right)$$

Remarque :

Dans la suite du cours nous allons définir une variable aléatoire que l'on appellera aussi variance empirique.

13.2 Statistique bivariée.

13.2.1 Nuage de points.

Au cours d'une expérience on recueille des valeurs de deux caractères :

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_n \qquad \text{et} \qquad y_1 , y_2 , \ldots , y_n$$

Lorsqu'on étudie la relation éventuelle entre les deux caractères on commence par représenter tous les points de coordonnées (x_i, y_i). On obtient alors un nuage de points.

On place **le point moyen** du nuage : le point de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$.

On peut organiser ces données dans le tableau suivant :

valeurs du premier caractère	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_{p-1}$	$\tilde{x}_p$
valeurs du deuxième caractère	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	$\cdots$	$\tilde{y}_{p-1}$	$\tilde{y}_p$
effectifs	e_1	e_2	$\cdots$	e_{p-1}	e_p

Remarque : $n = \sum_{k=1}^{p} e_k$

13.2.2 Covariance et coefficient de corrélation linéaire.

Définition :

On appelle **covariance** des séries x et y le réel :

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}) \qquad \text{ou encore} \qquad \operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} e_k(\tilde{x}_k-\overline{x})(\tilde{y}_k-\overline{y})$$

Proposition :

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right) - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\,\tilde{x}_k\,\tilde{y}_k\right) - \overline{x}\,\overline{y}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(x,y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - x_k\overline{y} - \overline{x}y_k + \overline{x}\,\overline{y}) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right) - \frac{1}{n}\overline{y}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - \frac{1}{n}\overline{x}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) + \overline{x}\,\overline{y} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right) - \overline{x}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}
\end{aligned}$$

Définition

On appelle **coefficient de corrélation** (*linéaire*) le nombre :

$$r_{x\,y} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

Remarques :

- Ce coefficient est sans unité.
- Savoir calculer cette valeur avec votre calculatrice, un tableur et en faisant une fonction Python.

Propositions :

① $-1 \leqslant r_{x\,y} \leqslant 1$

② $r_{x\,y} = 1$ ou -1 si, et seulement si, les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont alignés.

13.2.3 Droite de régression linéaire

Définition :

La **droite de régression linéaire de y en x** est la droite d'équation $y = ax+b$ où :

$$a = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \qquad \text{et} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Démonstration : *(Voir Annexe C)*

Savoir faire : calculer a et b avec une calculatrice, un tableur **et** en faisant une fonction Python.

En donnant cette droite on dit que réalise un ajustement affine selon *la méthode des moindres carrés.*

- (*Il existe une deuxième droite de régression linéaire :*)
  On définit la droite de **régression linéaire de x en y** qui est la droite d'équation $x = \alpha y + \beta$ où :

$$\alpha = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_y^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \overline{x} - \alpha\overline{y}$$

- Ces deux droites de régression passent par le point milieu.

Annexes

A

Suites usuelles.

Plan du chapitre

A.1 Suites arithmétiques.

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et r un nombre complexe,
dire que (u_n) est arithmétique de raison r signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$

Proposition : *(Formule explicite)*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes et r un nombre complexe,
(u_n) est une suite arithmétique de raison r, **si, et seulement si,** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, r un nombre complexe et p un entier.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors $\forall n \in [\![p;+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_n}{2}}_{\text{Moyenne arithmétique du 1er et du dernier terme}}$$

A.2 Suites géométriques.

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes et q un nombre complexe,
dire que (u_n) est géométrique de raison q signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\, u_n$

Proposition : (*Formule explicite*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes et q un nombre complexe,
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q **si, et seulement si,** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, q^n$

Sommes.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres complexes, q un nombre complexe tel que $\boldsymbol{q \neq 1}$ et p un entier naturel,

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , alors $\forall n \in [\![p;+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{u_p}_{\text{premier terme}} \frac{1-q^{\overbrace{n-p+1}^{\text{nombre de termes}}}}{1-q}$$

Remarque : lorsque $\boldsymbol{q = 1}$ la suite est constante et alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\,u_p$

A.3 Suites arithmético-géométriques.

Définition :

Soit (u_n) une suite de nombres complexes,
dire que (u_n) est une suite **arithmético-géométrique** signifie que :
il existe deux complexes a et b avec $a \neq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a\,u_n + b$

Méthode pratique :

① **On cherche le point fixe** : $\ell = a\ell + b \iff \quad \dots \qquad \boxed{\ell = \dots}$

② **On montre que $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a** *(une ligne suffit)*.

③ **On exprime $u_n - \ell$ en fonction de** n.

④ **On conclut :** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 - \ell)\,a^n + \ell}$

A.4 Récurrence linéaire d'ordre 2.

Définition :

Soit (u_n) une suite de nombres réels,
dire que (u_n) suit une relation de **récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** signifie qu'il existe deux réels a et b (fixés) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \qquad (*)$$

Remarque : Un telle suite est entièrement définie par la donnée de ses deux premiers termes.

Définition :

Si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ alors
l'équation : $x^2 = ax + b$ est appelée **équation caractéristique** de cette relation de récurrence.

Théorème :

Soient a et b deux nombres **réels** avec $b \neq 0$ et (u_n) la suite vérifiant :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

Cas 1 : Si $x^2 = ax + b$ **possède deux solutions réelles distinctes** q_1 **et** q_2**,**
alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\, q_1^n + \beta\, q_2^n$$

Cas 2 : Si $x^2 = ax + b$ **possède une unique solution réelle** q_0, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\, q_0^n + \beta\, n\, q_0^n$$

Cas 3 : Si $x^2 = ax + b$ **possède deux racines complexes conjugués** $q = re^{i\theta}$ **et** $\bar{q} = re^{-i\theta}$**,**
alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\, r^n \cos(n\theta) + \beta\, r^n \sin(n\theta)$$

En pratique :

① « On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants »

② On donne l'équation caractéristique.
③ On résout l'équation caractéristique et on précise dans quel cas on se trouve.
④ On donne l'expression de u_n en fonction de n avec α et β à déterminer.
⑤ On détermine le système linéaire en α et β avec les premières valeurs et on le résout.
⑥ On conclut en donnant l'expression de u_n en fonction de n.

B

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

B.1 Intervalle stable.

Définition :

> Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
> Dire que "I est stable par f" signifie que $f(I) \subset I$ (*autrement dit :* $\forall x \in I,\ f(x) \in I$)

Remarque :
pour montrer que I est stable par f le plus simple est de construire le tableau de variations de f sur I.

❶ Cela permet de justifier qu'une telle suite est bien définie.

Proposition :

> **Si** $\begin{cases} a \in I \\ I \text{ est stable par } f \end{cases}$ **alors** on peut définir une suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Démonstration (*à savoir faire*) :
On suppose : $\begin{cases} a \in I \\ I \text{ est stable par } f \end{cases}$
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n est bien défini et $u_n \in I$).

- Pour $n = 0$, on a u_0 qui est bien défini et vaut a et on a bien $u_0 \in I$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est bien défini et $u_n \in I$
  on sait que $u_n \in I$, donc on peut définir u_{n+1} par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$
  et comme I est stable par f on a : $u_{n+1} \in I$,

En conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

(Autrement dit : La suite (u_n) est bien définie)

❷ Cela permet de démontrer que toutes les valeurs de (u_n) sont dans I.

Proposition :

> **Si** I est stable par f et si : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ **alors** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$

Démonstration (*à savoir faire*) :
On suppose : I est stable par f et : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

- Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \in I$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$
  on sait que $u_n \in I$, comme I est stable par f on a : $u_{n+1} = f(u_n) \in I$,

En conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$

B.2 Que dire des limites possibles de (u_n) ?

Remarque.

Soit (u_n) une suite réelle quelconque.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, b]$ et si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell \in [a, b]$

En effet : On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b$ et (u_n) converge vers ℓ ,
donc en passant à la limite *(inégalités larges)* on obtient : $a \leqslant \ell \leqslant b$

Théorème du point fixe. (*complément*)

Soit f une fonction et (u_n) une suite bien définie, telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si $\underbrace{\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)}_{f \text{ continue en } \ell}$ alors $f(\ell) = \ell$

Démonstration : (*à savoir refaire*)

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) converge vers un réel ℓ et $\underbrace{\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)}_{f \text{ continue en } \ell}$

On a d'une part : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$ donc $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$,

d'autre part : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

et comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient en passant à la limite : $f(\ell) = \ell$

Remarques :
- Les limites possibles de la suite (u_n) sont les points fixes de f.
- Les points fixes sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de Δ.

B.3 Comment étudier la monotonie de (u_n) ?

On commence par faire une conjecture à partir de la représentation graphique et/ou des premiers termes.

❶ En utilisant le signe de $f(x) - x$.

Pour déterminer ce signe on étudie la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.

Proposition.

① Si $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$ alors la suite (u_n) est croissante.

② Si $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \leqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : (*à savoir refaire*)

① Supposons $\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) - x \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \in I \end{cases}$ et montrons que la suite (u_n) est croissante.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$ et pour tout réel x de I, on a $f(x) - x \geqslant 0$,
on peut en déduire que $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

(u_n) est croissante.

② (*Démonstration identique*).

❷ Par un raisonnement par récurrence.

Proposition. (*Hors programme, mais à connaître*)

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur D et (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in D \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$$

① si f est croissante sur D alors (u_n) est monotone.

② si f est décroissante sur D alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variations opposés.

Démonstration : (*à savoir refaire*)
① Supposons f est croissante sur D et que $\boldsymbol{u_0 \leqslant u_1}$ et montrons que la suite (u_n) est croissante.
Montrons par récurrence sur n que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- Pour $n = 0$, on a supposé que $u_0 \leqslant u_1$,
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$,

on sait de plus que $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } D \\ u_n \in D \text{ et } u_{n+1} \in D \end{cases}$ on en déduit que : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$

et ainsi : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ *(ce qui achève la récurrence)*

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}. \quad ((u_n) \text{ est croissante})$$

Supposons f est croissante sur D et que $\boldsymbol{u_0 \geqslant u_1}$ et montrons que la suite (u_n) est décroissante.
Montrons par récurrence sur n que pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

- Pour $n = 0$, on a supposé que $u_0 \geqslant u_1$,
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$,

on sait de plus que $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } D \\ u_n \in D \text{ et } u_{n+1} \in D \end{cases}$ on en déduit que : $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$

et ainsi : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ *(ce qui achève la récurrence)*

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}. \quad ((u_n) \text{ est décroissante})$$

En conclusion : On a bien montré que lorsque f est croissante alors la suite est monotone.
(*Elle est croissante ou décroissante*)
Attention : On peut avoir f croissante et (u_n) décroissante. *Vous devez pouvoir donner rapidement des exemples.*

② Supposons f est décroissante sur D et montrons que la suite (u_{2n}) est monotone.

En notant (v_n) la suite (u_{2n}), on remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$.
or f est décroissante sur D donc $f \circ f$ est croissante sur D.
On peut appliquer la proposition ① à la suite (v_n) et ainsi : (v_n) est monotone.

$$(u_{2n}) \text{ est monotone.}$$

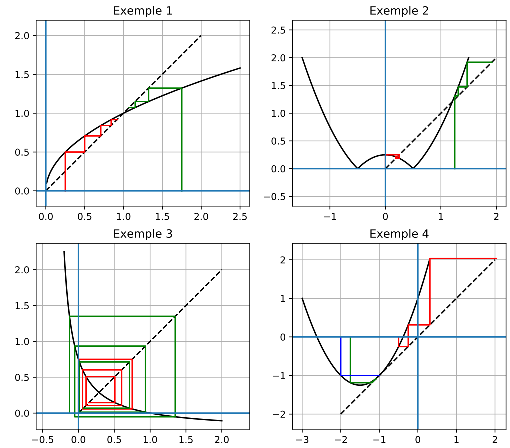
Montrons maintenant que (u_{2n+1}) est monotone, et de monotonie opposée de celle de (u_{2n})
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$
et comme f est décroissante :
si (u_{2n}) est croissante alors (u_{2n+1}) est décroissante
si (u_{2n}) est décroissante alors (u_{2n+1}) est croissante

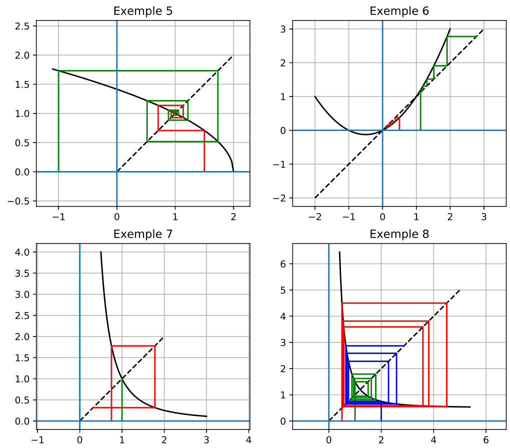
$$(u_{2n+1}) \text{ est monotone, et de monotonie opposée de celle de } (u_{2n})$$

B.4 Des représentations graphiques.

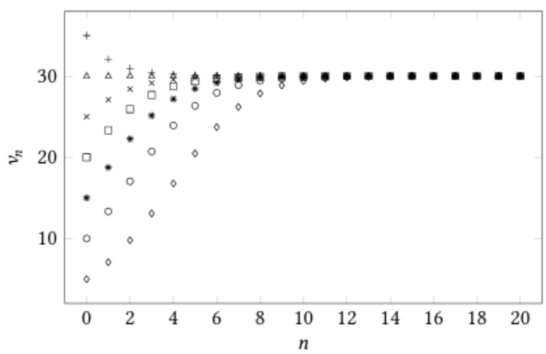
Dans ce contexte on a le choix entre deux représentations usuelles :

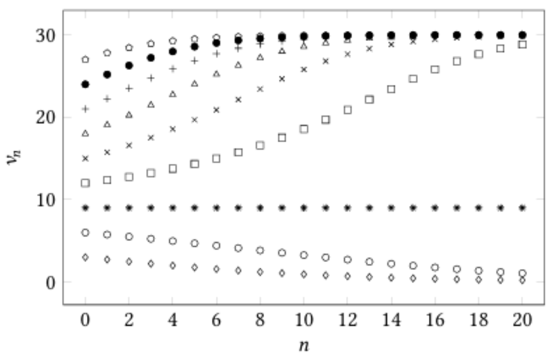
❶ **On trace les segments** $(u_n, u_{n+1}) - (u_{n+1}, u_{n+1})$ **et** $(u_{n+1}, u_{n+1}) - (u_{n+1}, u_{n+2})$





❷ **On trace les points de coordonnées** (n, u_n).





C

Fonctions usuelles

Plan du chapitre

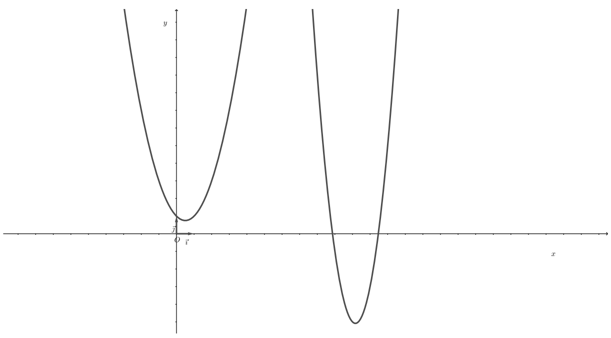
C.1 Polynômes du second degré.

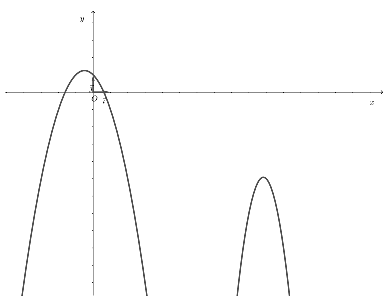
f est un polynome du second degré signifie qu'il existe des réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

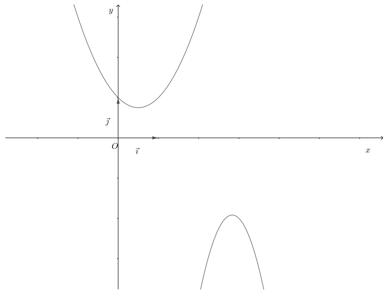
La représentation de ces fonctions est appelée **parabole**.

• Le signe de a donne l'allure de la parabole.

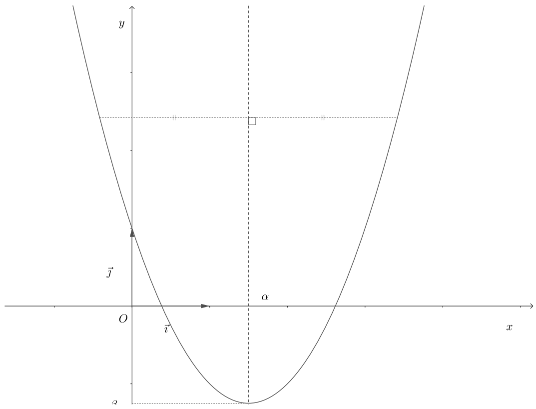




• Lorsque le polynome n'a pas de racines réelles.

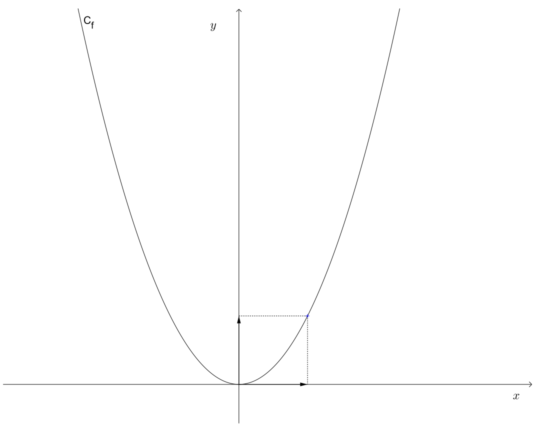


• La forme canonique donne le sommet et l'axe de symétrie.

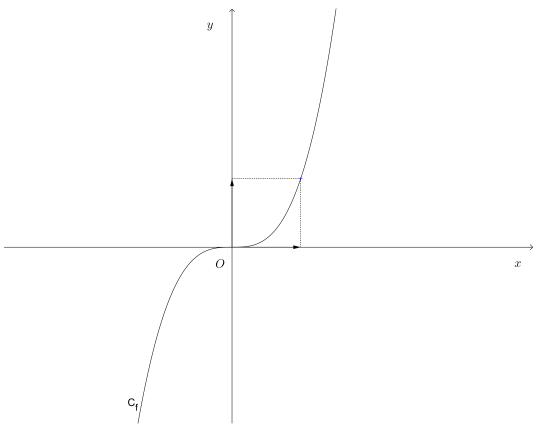


C.2 Fonction $x \longmapsto x^n$. $n \in \mathbb{Z}^*$

• n strictement positif.
La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$
La fonction est paire quand l'entier n est pair, la fonction est impaire quand l'entier n est impair.

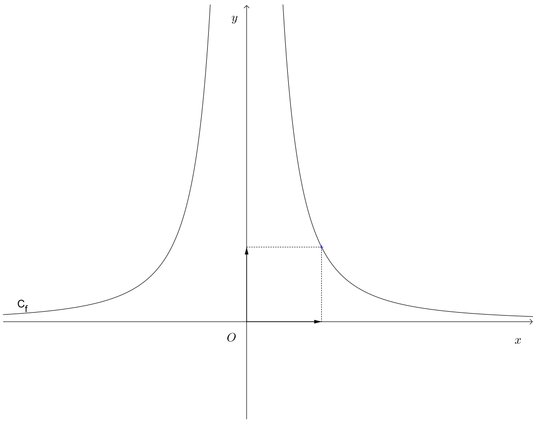


n pair

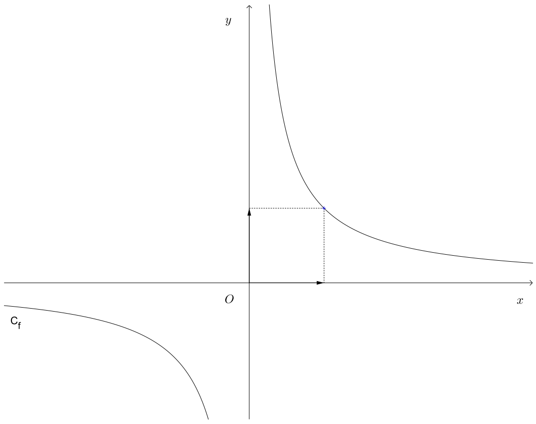


n impair ($n > 1$)

• n strictement négatif.
La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$
La fonction est paire quand l'entier n est pair, la fonction est impaire quand l'entier n est impair.

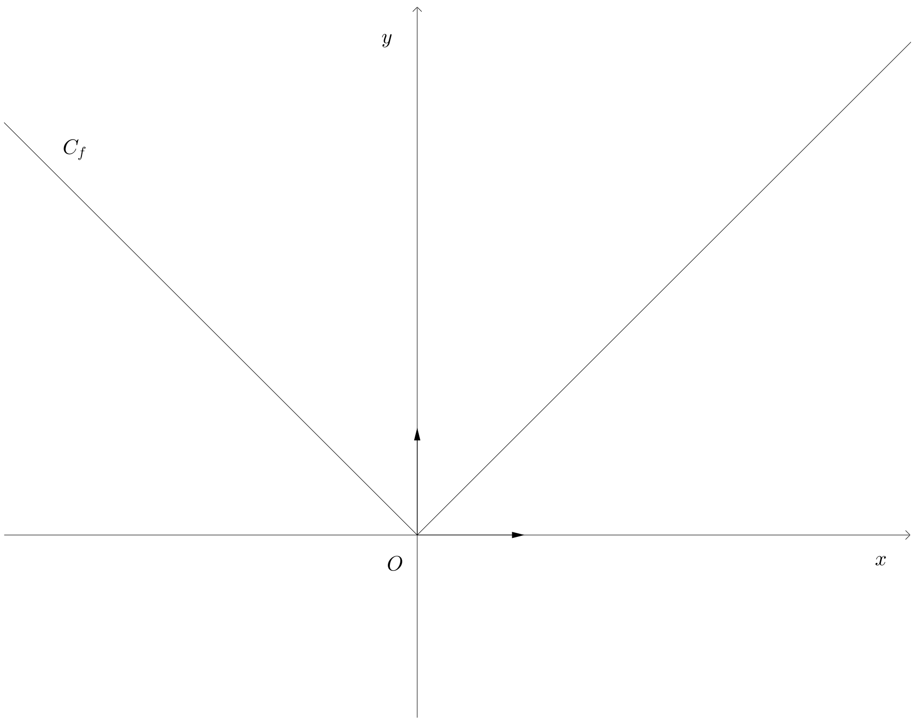


n pair



n impair

C.3 Fonction valeur absolue.



La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est paire.

Elle n'est pas dérivable en 0.

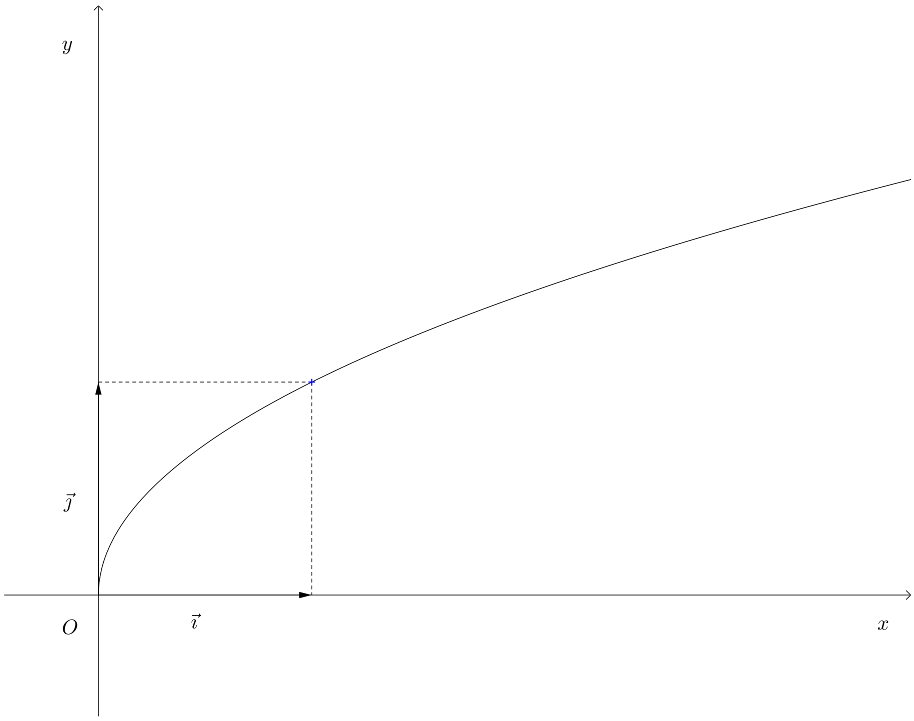
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

C.4 Fonction racine carrée.

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Elle n'est pas dérivable en 0, sa courbe au point d'abscisse 0 possède une tangente verticale.

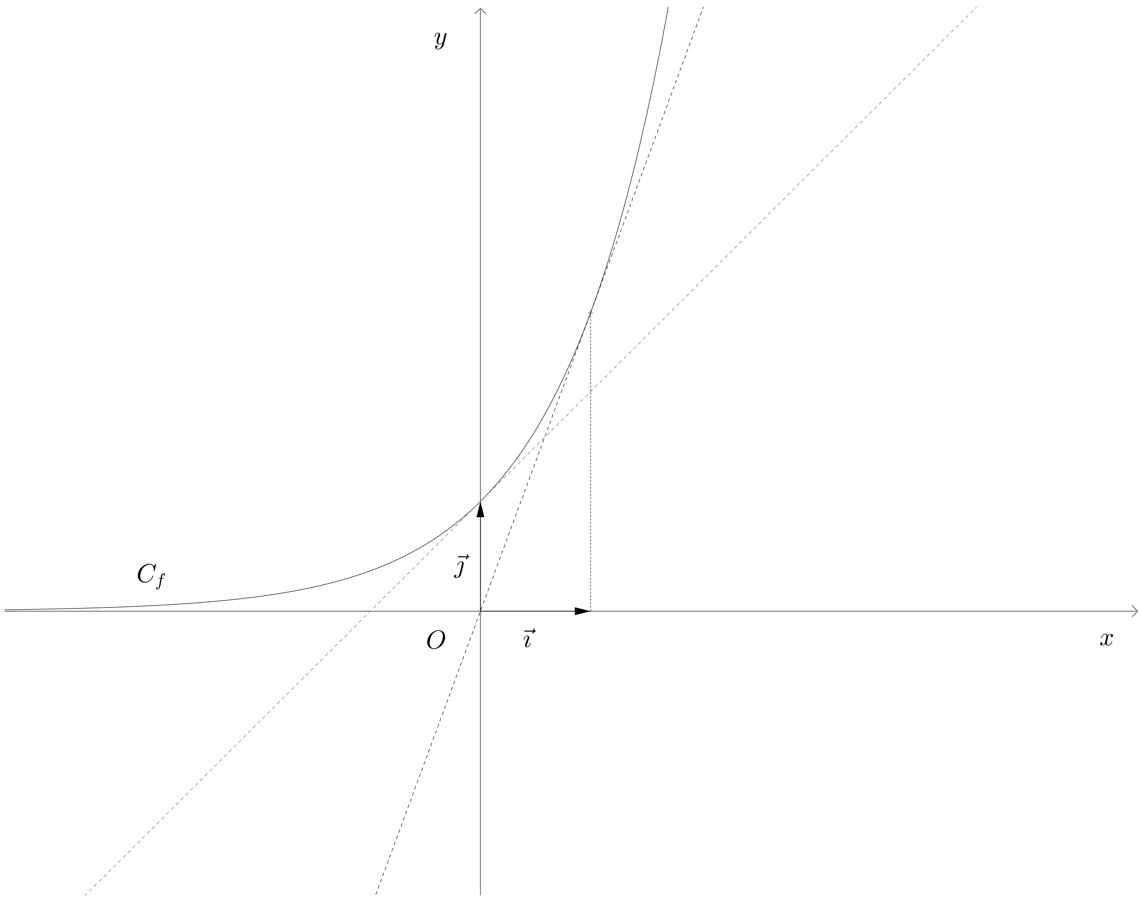
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\quad \forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



C.5 Exponentielle.

Définition : la fonction exponentielle est la seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$



Remarque : La tangente au point de coordonnées $(1, e)$ passe par l'origine. (*Démonstration faite en classe*)

Cette fonction est à valeurs strictement positives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$

• **Propriétés algébriques** :
Pour tout réel a et b :

$$e^0 = 1 \qquad e^{(a+b)} = e^a \times e^b \qquad e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^a)^n = e^{na}$$

• **Nombre dérivé en** 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• **Croissances comparées en** ∞ : $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• **Equations** :

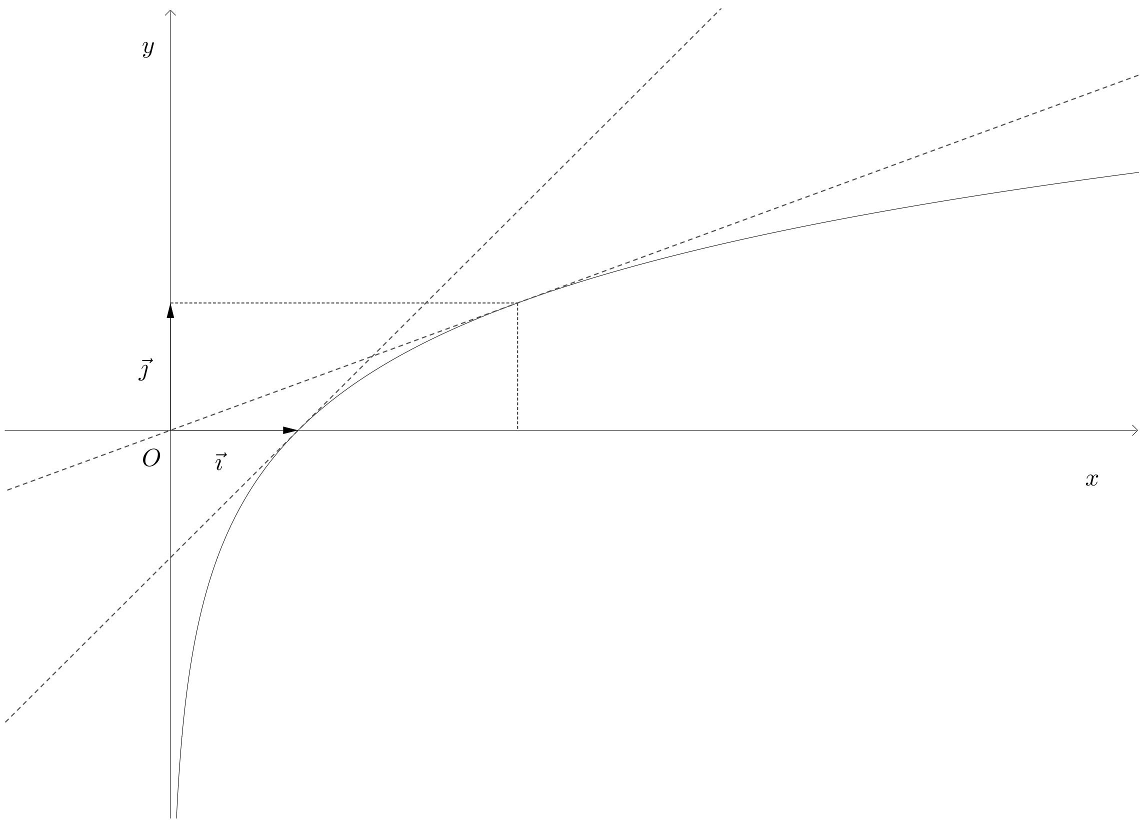
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a = e^b \iff a = b$$

• **Inéquations** :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^a < e^b \iff a < b, \qquad e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b$$

C.6 Logarithme népérien.

Définition : Pour un réel strictement positif x, on appelle logarithme népérien de x, noté $\ln(x)$, l'unique réel t vérifiant : $\exp(t) = x$.



La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriétés algébriques :

Pour a et b deux réels strictement positifs,

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

• **Primitive** :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

C'est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, s'annulant en 1.

• **Nombre dérivé en** 1 :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

• **Croissance comparée en** 0

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

• **Croissances comparées en** $+\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

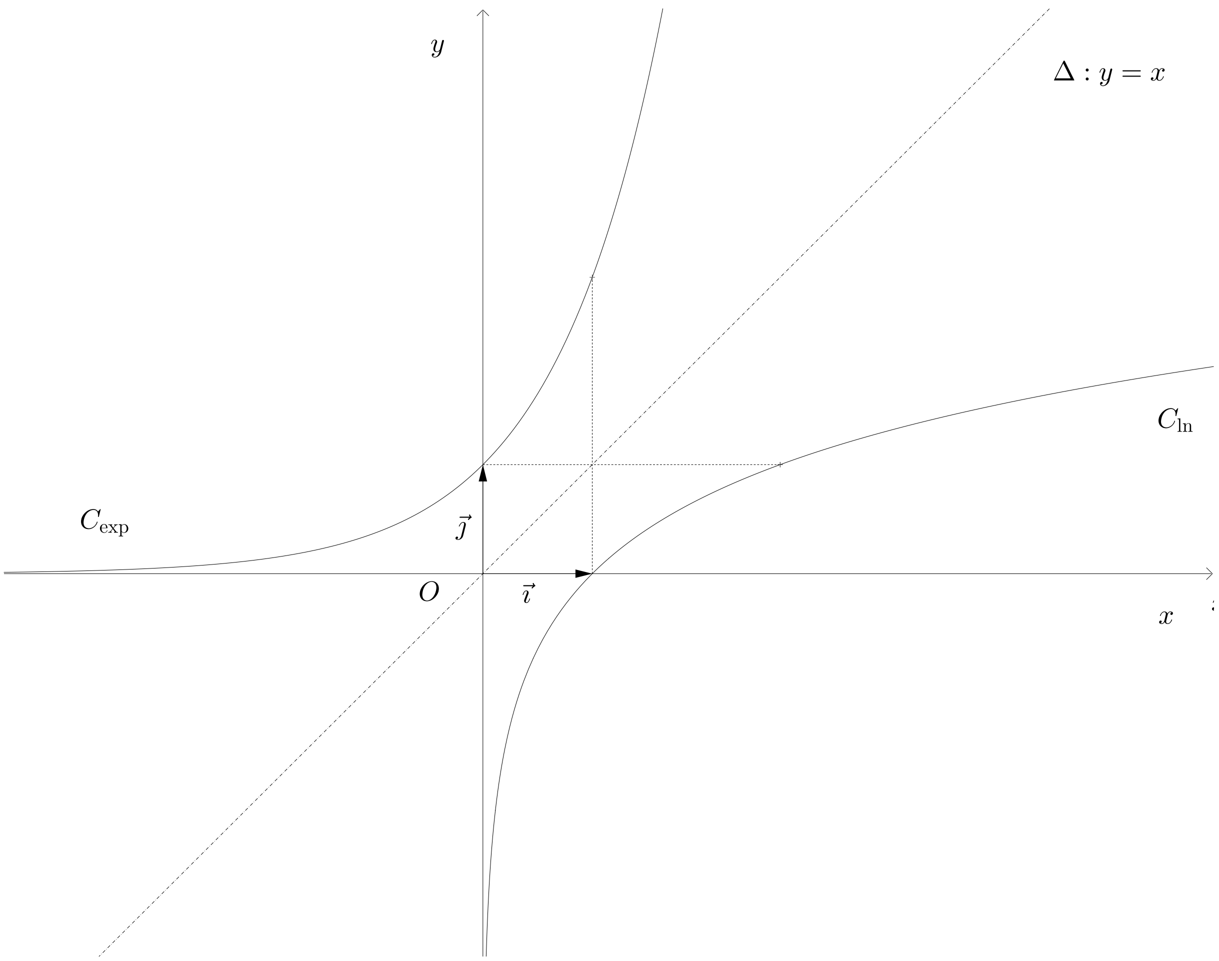
• **Equations :**

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

• **Inéquations :**

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \qquad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b, \qquad \ln(a) \leqslant \ln(b) \iff a \leqslant b$$

C.7 Lien entre exp et ln.



Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$y = \ln(x) \iff x = e^y$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\ln(x)$ est par définition l'unique antécédent de x par exp donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp(\ln(x)) = x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $\ln(\exp(x))$ est par définition l'unique antécédent de $\exp(x)$ par exp donc :

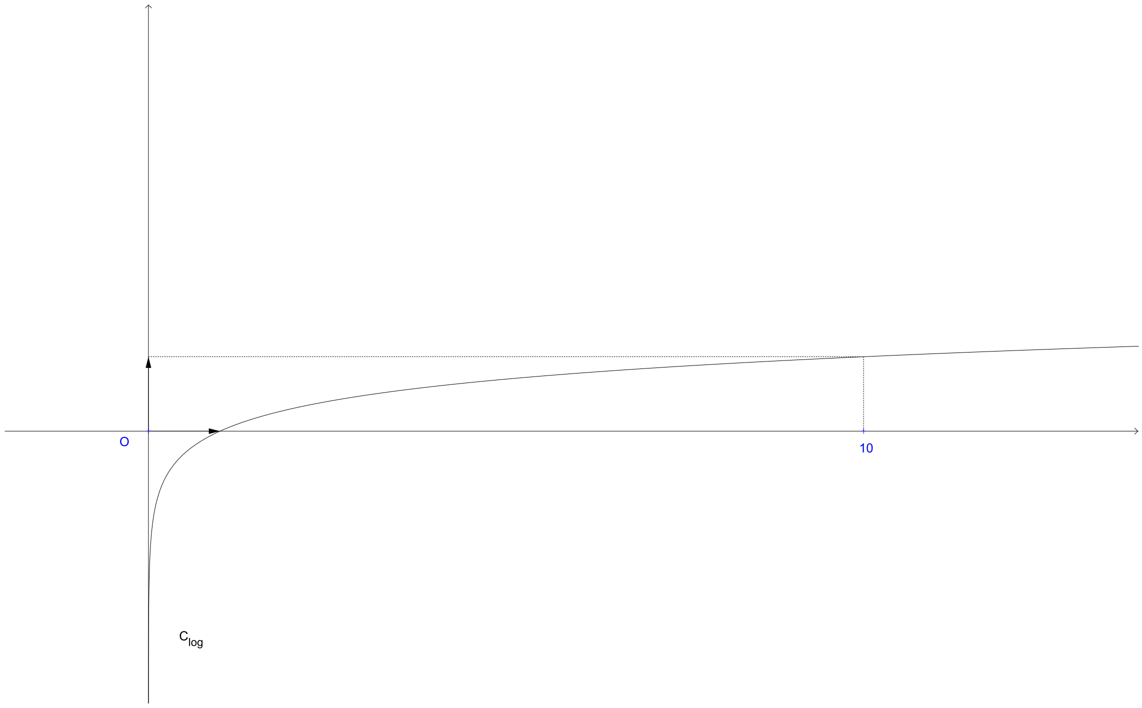
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(x)) = x$$

C.8 Logarithme décimal.

Définition : Pour un réel strictement positif x, on appelle logarithme décimal de x, noté $\log(x)$, l'unique réel t vérifiant : $10^t = x$.

Il est simple de montrer :

$$\log : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{array}$$



La fonction $x \longmapsto \log(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les limites aux bornes de l'ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \to 0} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$$

La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log'(x) = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \dfrac{1}{x}$

Propriétés algébriques :
Pour a et b deux réels strictement positifs,

$$\log(1) = 0 \qquad \log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \log\left(a^n\right) = n\log(a)$$

- Puissance de 10.

$$\log(10) = 1 \qquad \log(10^n) = n \qquad \log\left(\frac{1}{10^n}\right) = -n$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Equations :

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \log(a) = \log(b) \iff a = b$$

- Inéquations :

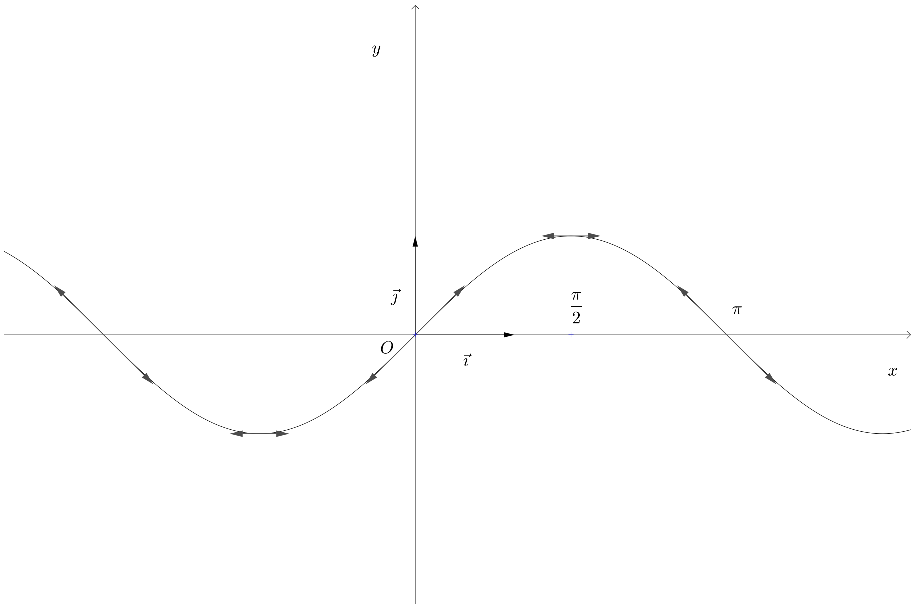
$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \qquad \log(a) < \log(b) \iff a < b, \qquad \log(a) \leqslant \log(b) \iff a \leqslant b$$

Lien avec la fonction $x \longmapsto 10^x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in]0; \infty[, \quad y = 10^x \iff x = \log(y)$$

C.9 Fonctions cosinus et sinus.

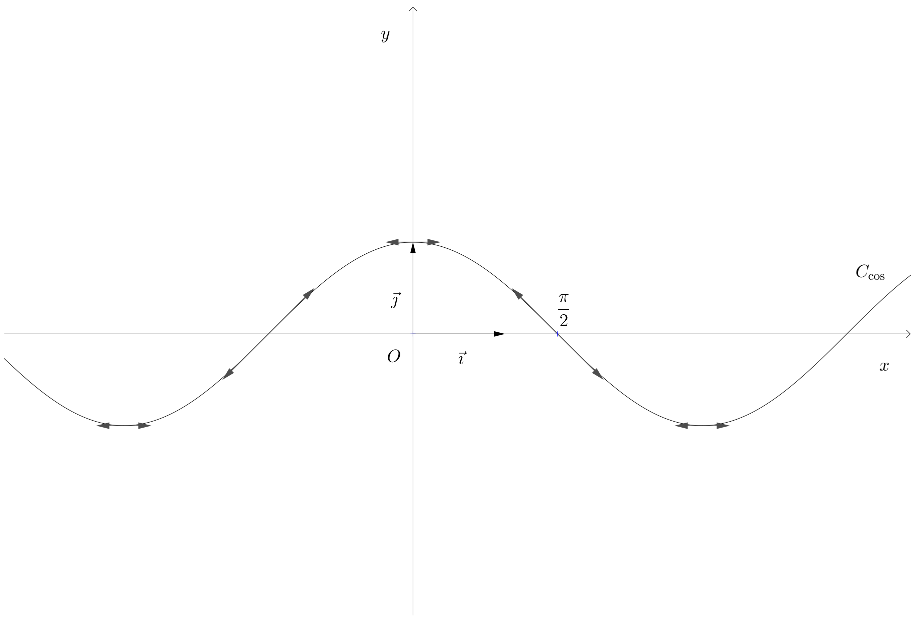
Fonction sinus.
La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire et 2π périodique.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x)$.



Fonction cosinus.

La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est paire et 2π périodique.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x)$.



C.10 Fonction tangente.

La fonction tangente est définie sur : $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ par :

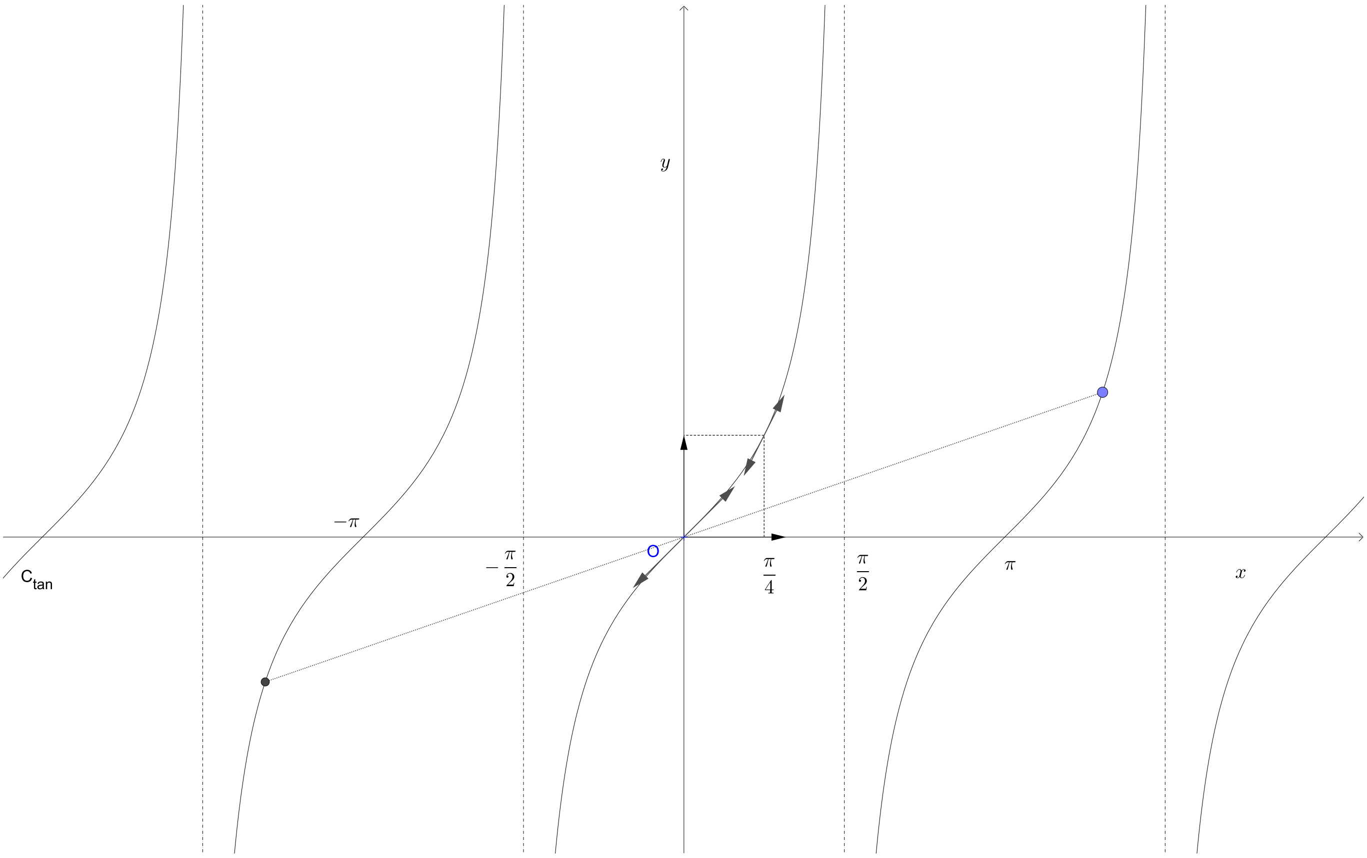
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Cette fonction est continue sur $D_{\tan}$.
Limites :

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan(x) = +\infty$$

Elle est dérivable sur $D_{\tan}$ et $\quad \forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = \tan^2(x) + 1 \quad$ ou $\quad \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Elle impaire et π-périodique.



C.11 Fonction partie entière.

Définition :

> Soit x un réel, il existe un et un seul entier relatif n vérifiant : $n \leqslant x < n+1$
> cet entier s'appelle **la partie entière** de x et se note $\lfloor x \rfloor$

Autrement dit : "La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x".

Propriétés :

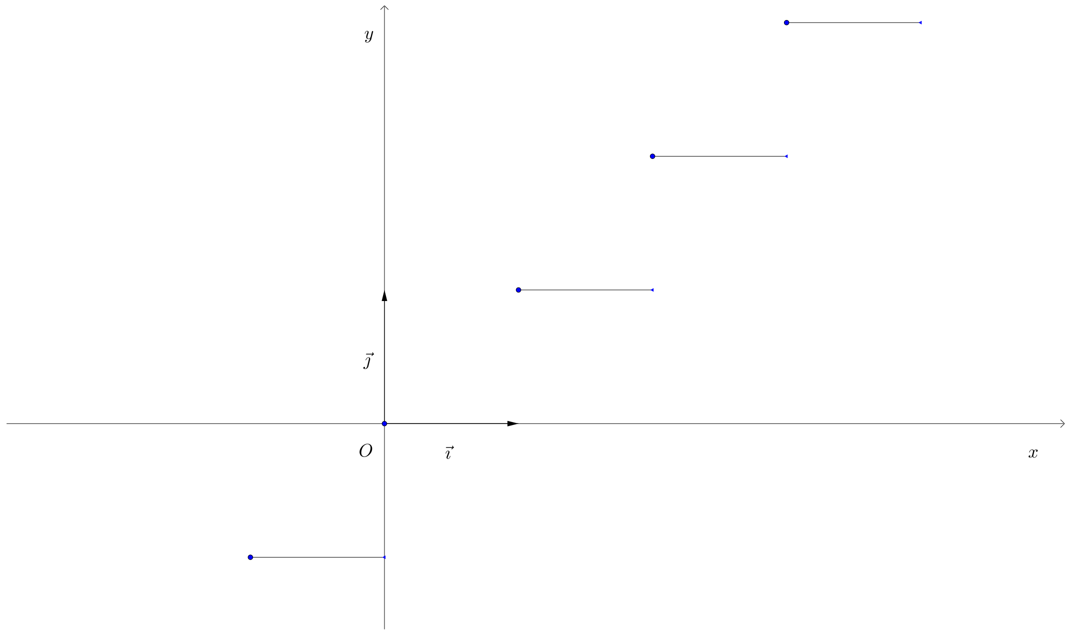
❶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

❷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

❸ La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$.
$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

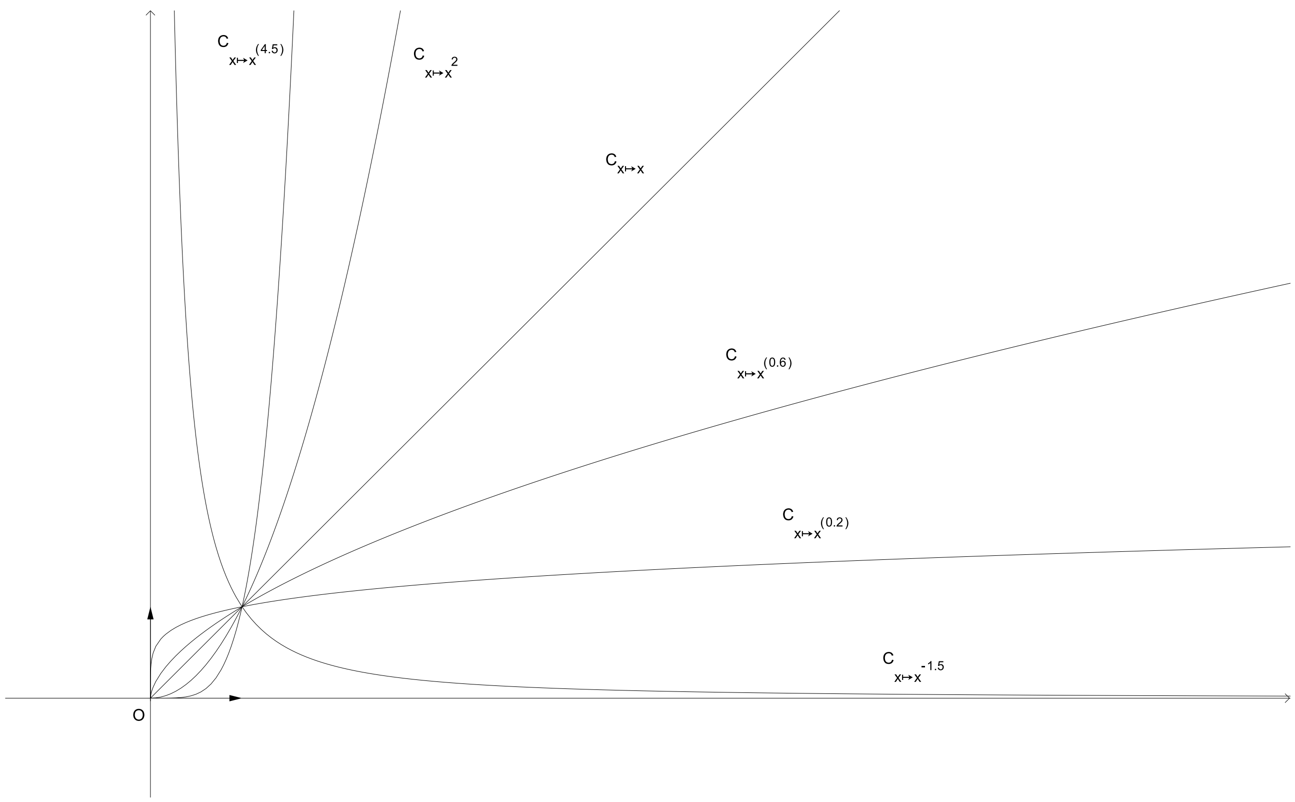
C.12 $x \longmapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est : $x \longmapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$. (*Cela se démontre facilement*)

Sur la représentation suivante on peut distinguer les allures des courbes dans les trois cas suivants :

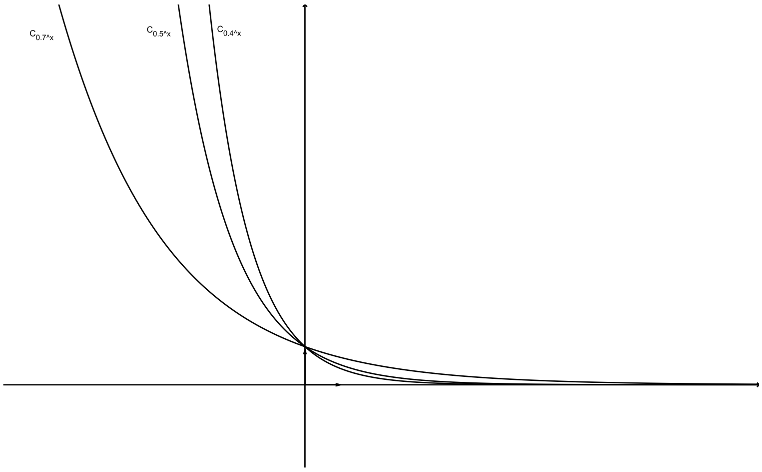
$$\alpha < 0 \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad 1 < \alpha$$



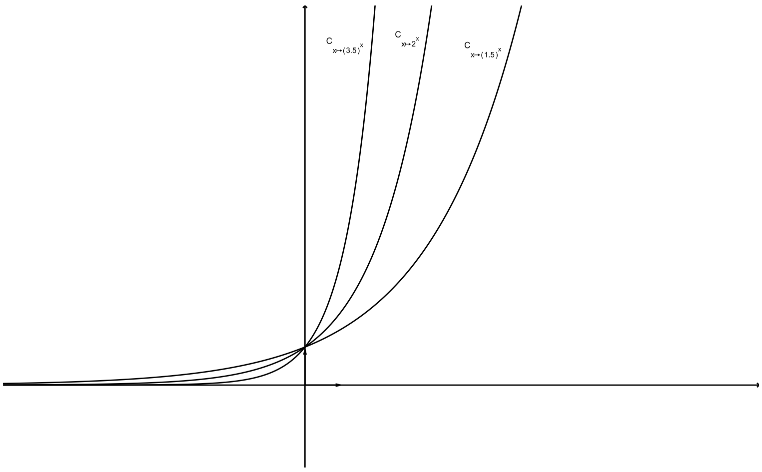
C.13 $x \longmapsto a^x$ (a un réel strictement positif)

La fonction $x \longmapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $x \longmapsto \ln(a)\, a^x$

• Pour $0 < a < 1$, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$



• Pour $1 < a$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$



C.14 Fonction racine n-ième.

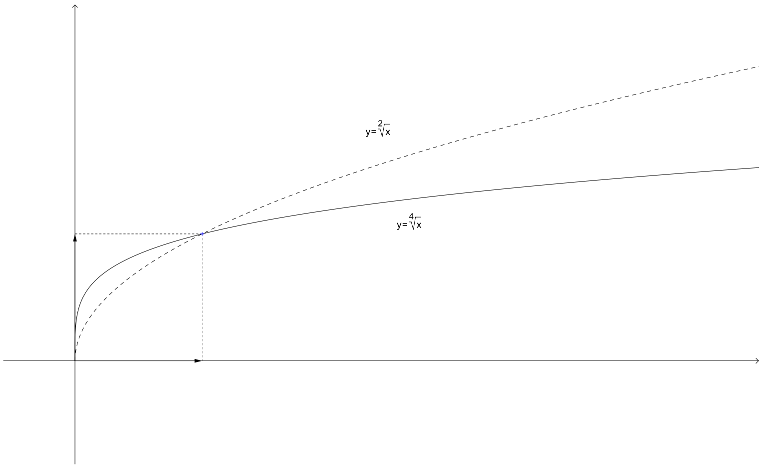
Premier cas : $n \in \mathbb{N}^*$ et $\boldsymbol{n}$ **pair.**

Définition : On appelle racine n-ième la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$



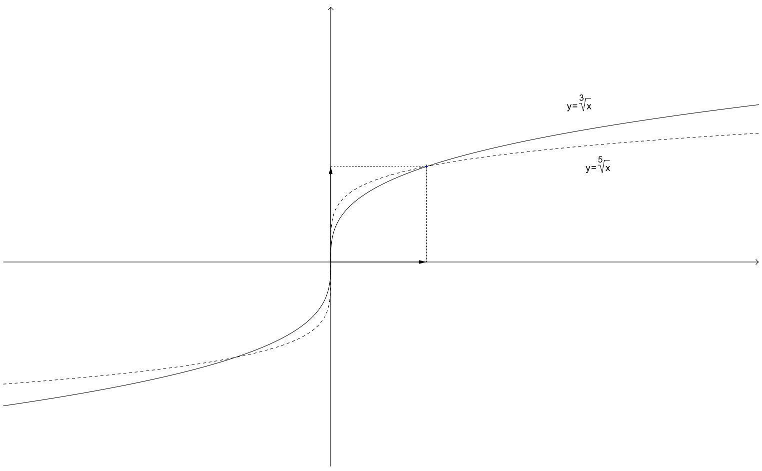
Deuxième cas : $n \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{n}$ **impair.**

Définition : On appelle racine n-ième la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire.

Elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe possède au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.



C.15 Fonction arctangente.

Définition : On appelle arctangente la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$.

Autrement dit :

arctan est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui associe à tout réel x, l'unique réel $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = x$

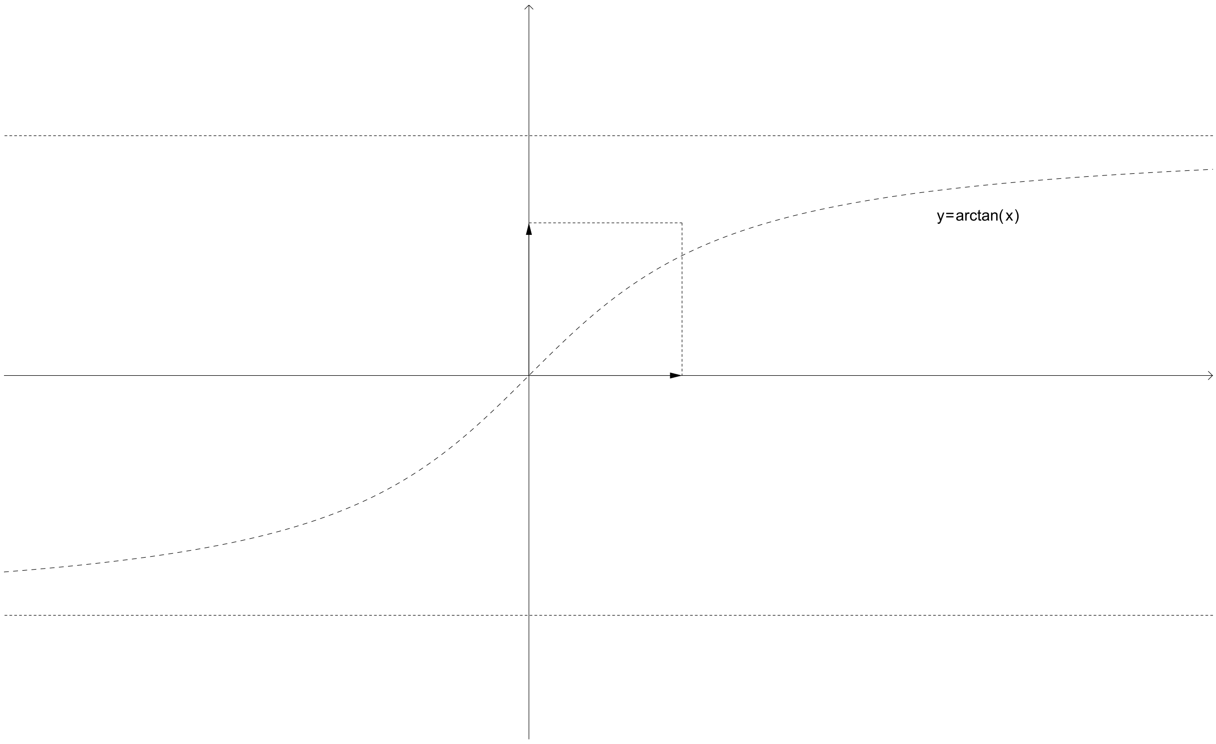
Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arctan(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
- La fonction arctangente est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

- Elle est dérivable et sa dérivée est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$
- Elle est strictement croissante et impaire.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\qquad y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan\left(\arctan(x)\right) = x$
- Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan\left(\tan(x)\right) = x$



C.16 Graphes des fonctions associées.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

C.16.1 $x \longmapsto f(x) + a$

La courbe de la fonction $x \longmapsto f(x) + a$ s'obtient en effectuant une **translation verticale** de $\mathcal{C}_f$.
Résultat : translation de vecteur $(0, a)$.
Interprétation : on ajoute a à toutes les ordonnées.

C.16.2 $x \longmapsto f(a + x)$

La courbe de la fonction $x \longmapsto f(a + x)$ s'obtient en effectuant une **translation horizontale** de $\mathcal{C}_f$.
Résultat : translation de vecteur $(-a, 0)$.
Interprétation : on remplace chaque abscisse x par $x - a$ sur la courbe.
Point important : un point $(x_0, f(x_0))$ de $\mathcal{C}_f$ devient le point $(x_0 - a, f(x_0))$.

C.16.3 $x \longmapsto f(a - x)$

La courbe de la fonction $x \longmapsto f(a - x)$ s'obtient en effectuant une **symétrie par rapport à la droite** $\Delta : x = \dfrac{a}{2}$.
Méthode :

— on remplace x par $-x$: symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
— puis on translate de vecteur $(a, 0)$.

Résultat direct : symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$.

C.16.4 $x \longmapsto f(ax)$

La courbe de la fonction $x \longmapsto f(ax)$ s'obtient par une **transformation horizontale**.
Résultat :

- si $a > 1$: **compression horizontale** ;
- si $0 < a < 1$: **étirement horizontal**.

Interprétation : les abscisses sont divisées par a.
Point important : un point $(x_0, f(x_0))$ devient $(\frac{x_0}{a}, f(x_0))$.

C.16.5 $x \longmapsto af(x)$

La courbe de la fonction $x \longmapsto af(x)$ s'obtient par une **transformation verticale**.
Résultat :

- si $|a| > 1$: **étirement vertical** ;
- si $0 < |a| < 1$: **compression verticale** ;
- si $a = -1$: symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Interprétation : les ordonnées sont multipliées par a.

C.17 Symétries des courbes représentatives.

C.17.1 Symétrie d'axe $\Delta : x = a$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta : x = a$ comme axe de symétrie si, et seulement si,

$$f(a+h) = f(a-h) \text{ pour tout } h \text{ tel que } a+h \text{ et } a-h \text{ appartiennent au domaine.}$$

Interprétation : la fonction est **paire par rapport à** a.
Conséquence graphique : les points $(a+h, f(a+h))$ et $(a-h, f(a-h))$ sont symétriques.

C.17.2 Symétrie de centre $A(a, b)$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet le point $A(a, b)$ comme centre de symétrie si, et seulement si,

$$f(a+h) + f(a-h) = 2b$$

Interprétation : la fonction est **impaire par rapport à** a (à translation verticale près).
Conséquence graphique : les points $(a+h, f(a+h))$ et $(a-h, f(a-h))$ sont symétriques par rapport à A.

Remarque importante : cela équivaut à dire que la fonction

$$x \longmapsto f(x) - b$$

est impaire par rapport à a.

D

Fonctions polynomiales.

Plan du chapitre

D.1 Généralités.

D.1.1 Définitions et notation.

Définition

On appelle fonction polynomiale réelle toute application P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots a_n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Cette application sera notée : $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et on note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles.

D.1.2 Identification des coefficients.

Lemme :

Soient n un entier naturel et $n+1$ réels : $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ **alors** $\forall k \in [\![0; n]\!], \quad a_k = 0$

Conséquence :

Une fonction polynomiale P est non nul si, et seulement si,
il peut s'écrire : $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$

Théorème : (*Identification des coefficients*)

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[x]$ non nuls avec :

$$\begin{cases} P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n & \text{avec } a_n \neq 0 \\ Q : x \longmapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m & \text{avec } b_m \neq 0 \end{cases}$$

On a l'équivalence suivante : $P = Q \iff \begin{cases} n = m \\ \\ \forall k \in [\![0;n]\!], \quad a_k = b_k \end{cases}$

D.1.3 Vocabulaire.

Pour $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$

On dit que la fonction polynômiale P est sous sa **forme développée réduite**.

- $x \mapsto a_n x^n$ est le monôme dominant de P.
- n le degré de P.
- a_n le coefficient dominant.
- $x \mapsto a_k x^k$ est le monôme d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_k le coefficient d'ordre k de P. (ou de degré k)
- a_0 est le terme constant.

Dire qu'une fonction polynomiale est **unitaire**, signifie que son terme dominant vaut 1.

D.1.4 Opérations.

La somme, produit et composée de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

Si $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$ alors $P + Q \in \mathbb{R}[x]$, $P \times Q \in \mathbb{R}[x]$ et $P \circ Q \in \mathbb{R}[x]$

Propriétés : *(de la somme et du produit)*

Soient P, Q et R trois éléments de $\mathbb{R}[x]$, on a alors :

1. $0 + P = P$, $P + Q = Q + P$, $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
2. $P \times 1 = P$, $P \times Q = Q \times P$, $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$
3. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$

Proposition.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$,

① Le produit de m fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

② Si $P \in \mathbb{R}[x]$ et $m \in \mathbb{N}^*$ alors $P^m \in \mathbb{R}[x]$

Complément : Coefficients du produit de deux polynômes.

Soient $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$:

$$P(X) \times Q(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)}_{\text{coefficients de } P\times Q} X^k$$

D.1.5 Dérivée

Proposition.

La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale.

Remarque :

Si $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors $P' : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ ou encore : $P' : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$

D.1.6 Degré.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$,
si $P = 0$ alors $\deg(P) = -\infty$
si $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$ alors $\deg(P) = n$

Théorème :

Soient P et Q deux fonctions polynomiales.

❶ $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$

❷ $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

❸ Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P^m) = m\deg(P)$

❹ Si $\deg(P) \geqslant 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$

Démonstration. *Faite en deuxième année et dans* $\mathbb{C}[X]$.

D.1.7 Intégrité

Théorème : *Intégrité.*

Soient P et Q deux fonctions polynômiales,
$$P \times Q = 0 \iff P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0$$

Démonstration. *Faite en deuxième année et dans* $\mathbb{C}[X]$.

D.2 Racine d'une fonction polynômiale.

D.2.1 Définition.

Définition (*Racine de P*) :

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
Dire que α est une racine de P signifie que : $P(\alpha) = 0$

D.2.2 Racines et factorisation.

Lemme :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists Q_k \in \mathbb{R}[x] : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^k - \alpha^k = (x-\alpha)\,Q_k(x)$$

Démonstration. *Faite en deuxième année et dans* $\mathbb{C}[X]$.

Théorème :

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
$P(\alpha) = 0$ si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P : x \longmapsto (x-\alpha)Q(x)$

Démonstration. *Faite en deuxième année et dans* $\mathbb{C}[X]$.

Théorème :

Soient P une fonction polynômiale et k un entier naturel non nul,
Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont k **racines distinctes** de P alors
$$\exists Q \in \mathbb{R}[x] : \; P : x \longmapsto (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)Q(x)$$

Corollaire :

Soient P une fonction polynômiale et n un entier naturel non nul,
Si P est de degré n et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont n **racines distinctes** de P alors
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \; P : x \longmapsto \lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

D.2.3 Nombres de racines d'un polynôme.

Soient P et Q deux fonctions polynomiales et n un entier naturel.

(1) Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont n racines **distinctes** de P et si $\deg(P) = n$,

alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$,

(2) Si P est de degré n (*Ce qui impose* $P \neq 0$), alors P a au plus n racines **distinctes**.

(3) Si P est de degré inférieur ou égal à n et si P a $(n+1)$ racines **distinctes**, alors $P = 0$.

(4) La seule fonction polynômiale ayant une infinité de racines est la fonction nulle.

D.2.4 Ordre de mutiplicité.

Définition :

Soient $a \in \mathbb{R}$, P une fonction polynomiale non nulle et m un entier naturel non nul.
Dire que α est une racine de P d'ordre de multiplicité m
signifie qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - \alpha)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

D.2.5 Lien entre dérivée et racines multiples.

Théorème :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$,
α est une racine multiple de P, si et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Démonstration.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $P : x \mapsto P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[x]$.

(on suppose que α est une racine multiple)

on a d'une part $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)^2 Q(\alpha)$ donc $P(\alpha) = 0$

on a d'autre part pour $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x)$ d'où $P'(\alpha) = 0$ ■

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

- $P(\alpha) = 0$ donc il existe $R \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x - \alpha)R(x)$ on en déduit que :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = R(x) + (x - \alpha)R'(x)$ ce qui entraîne que : $P'(\alpha) = R(\alpha)$,
- $P'(\alpha) = 0$ donc $R(\alpha) = 0$ et ainsi $R : x \longmapsto (x - \alpha)Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[x]$,
  on en déduit qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $P : x \longmapsto (x - \alpha)^2 Q(x)$,
  autrement dit : α est une racine multiple de P. ■

Une racine α d'un polynôme P est une racine multiple si, et seulement si, $P'(\alpha) = 0$

D.2.6 Fonction polynomiale de degré impair

Théorème :

Soit P une fonction polynomiale réelle,
Si le degré de P est un entier impair alors P a au moins une racine réelle.

Démonstration.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que n est impaire et $a_n \neq 0$

On note : f la fonction $x \longmapsto P(x)$.

Discutons suivant le signe de a_n :

- si $a_n > 0$, on a : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}$

  donc *(Th. des valeurs intermédiaires)* f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$

- si $a_n < 0$, on a : $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}$

  donc (TVI) f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$

Dans tous les cas, il existe un réel x, tel que : $P(x) = 0$

E

Développements limités

Plan du chapitre

E.1 Définition, notation, unicité.

I est un intervalle non trivial tel que 0 est un élément de I ou 0 est une borne de I,

Définition :

Soit n un entier naturel et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$,
Dire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ et une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n \qquad \text{et} \qquad \lim_0 \varepsilon = 0$$

Notation :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}$$

Précicision : $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$ signifie $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$ et se lit "$f(x)$ négligeable x^n".

Théorème (*unicité*)

Le polynôme associé au développement limité d'ordre n est unique.

Vocabulaire : Ce polynôme est appelé partie régulière du $DL_n(0)$.

Attention : Deux fonctions distinctes peuvent avoir la même partie régulière d'ordre n.

E.2 Troncature.

Proposition :

Soit N et n deux entiers naturels.

$$\text{Si} \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k + o(x^N) \quad \text{et} \quad n \leqslant N \qquad \text{alors} \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$$

E.3 Lien avec les équivalents.

Théorème :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ (attention $a \neq 0$),

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a\,x^n + o(x^n) \quad \textbf{si, et seulement si,} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} ax^n$$

E.4 Formule de Taylor-Young.

Théorème :

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + o(x^n)$$

E.5 DL usuels en 0.

(A connaître)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

E.6 Primitivation d'un DL.

Ici I est un intervalle non trivial contenant 0.

Théorème :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}$,

Si $\quad f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad$ alors $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

E.7 Lien avec la régularité de f.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.

f est dérivable en 0 **si, et seulement si,** $\exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$: $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + o\,(x)$

et on a alors : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Remarque :

f est dérivable en 0 **si, et seulement si,** f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.