MATHÉMATIQUES
MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT
Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet propose quelques développements autour de l'expérience de Luria et Delbrück. Ces chercheurs ont montré que les mutations à l'origine de l'apparition d'une résistance bactérienne à un phage surviennent au hasard lors des divisions cellulaires et non suite à l'interaction avec le phage.
À l'exception de la dernière question, les parties sont indépendantes.

Partie I : Approximation de la loi de Poisson

Dans cette partie, λ est un réel strictement positif fixé.
On considère un milieu de culture composé de N bactéries, N étant un entier strictement positif. Exposée à un antibiotique, chaque bactérie a une probabilité notée λ/N de devenir résistante et de ne pas mourir. On suppose que les bactéries sont indépendantes dans leur possibilité de devenir résistante. On note X_N la variable aléatoire qui représente le nombre de bactéries vivantes à la fin de l'expérience.

1. Donner la loi de X_N.

2. Soit k un entier positif, déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$.

3. Montrer que, pour tout entier positif k :

$$\lim_{N\to+\infty} P(X_N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson. Que vaut le rapport $\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)}$?

Partie II : Inégalités de concentration

On se donne une variable aléatoire réelle positive X admettant une espérance notée $\mathbb{E}(X)$, ainsi qu'un réel $a > 0$.

5. Démontrer l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}(X > a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}\cdot$ On pourra supposer que X est une variable aléatoire discrète.

Pour tout réel t positif, on introduit la variable aléatoire réelle $Z_t = \exp(tX)$. Sous réserve d'existence, on note $\psi(t) = \ln(\mathbb{E}(Z_t))$.

6. On suppose ici que la fonction ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
Soit t un réel positif. En appliquant l'inégalité de Markov à la variable Z_t, montrer que :

$$\mathbb{P}(X > a) \leq e^{\psi(t)-ta}.$$

7. On suppose dans cette question que la variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

7.a. Justifier, dans ce cas, que la fonction ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son expression.

7.b. En déduire que, si $\lambda \leq a$, alors on a :

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \exp\left(a \ln \lambda - a \ln a + a - \lambda\right).$$

7.c. Laquelle des deux bornes des questions 5 et 7.b est la meilleure lorsque a tend vers $+\infty$?

Partie III : Étude d'un endomorphisme

On se donne une fonction polynomiale P, et on s'intéresse à l'application qui à un réel strictement positif v, associe la quantité

$$L_P(v) = \frac{1}{v}\int_0^{+\infty} P(s)\, e^{-s/v}\, \mathrm{d}s.$$

8. Soit v un réel strictement positif. Justifier qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall s > M, \quad |P(s)|\, e^{-s/v} \leq e^{-s/(2v)}$$

et en déduire que $L_P(v)$ est bien défini.

9. Soit v un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier k, on a :

$$\frac{1}{v}\int_0^{+\infty} s^k\, e^{-s/v}\, \mathrm{d}s = k!\, v^k.$$

En déduire $L_P(v)$ en fonction des coefficients de P.

On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et on note l'application L, qui à un polynôme $\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}_d[X]$ associe le polynôme $\sum_{k=0}^{d} k!\, a_k X^k$.

10. Justifier que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.

11. Donner, sans justification, la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$.

12. Donner la définition du noyau de L et déterminer-le.

13. L'endomorphisme L est-il surjectif ?

14. Déterminer la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ lorsque $d = 3$.

On revient au cas d quelconque.

15. Quels sont les valeurs propres et les espaces propres de L ?

16. Pour quelle(s) valeur(s) de d, l'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

17. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ AM = MA\}$.

17.a. Prouver que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

17.b. Soient a, b, c, d, e, f, g, h et k 9 réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ appartienne à $C(A)$.

17.c. Donner, sans justification, une base et la dimension de $C(A)$.

17.d. Donner, avec justifications, une matrice appartenant à $C(A)$ et pas à $\mathrm{Vect}(I_3, A)$.

Partie IV : Loi de Yule–Simon

Soit ν un réel strictement supérieur à 1.
Pour tout entier naturel k, on pose :

$$p_k = \nu \int_0^{+\infty} (1 - e^{-s})^k e^{-(\nu+1)s} \, \mathrm{d}s,$$

18. Justifier que pour tout entier naturel k, l'intégrale définissant p_k est convergente.

19. Montrer que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \nu \int_0^1 t^\nu (1 - t)^k \, \mathrm{d}t.$$

20. Soit N un entier.

20.a. Soit $t \in [0,1]$, simplifier la somme géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (1 - t)^k$.

20.b. Montrer que :

$$\int_0^1 t^{\nu-1} (1 - t)^{N+1} \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1 - t)^{N+1} \, \mathrm{d}t.$$

20.c. En déduire qu'il existe une variable aléatoire réelle discrète X telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

On dit alors que X suit une loi de Yule–Simon de paramètre ν.

Partie V : Calculs de moments

Dans cette partie, on considère que les bactéries d'un milieu de culture proviennent de la division d'un unique ancêtre commun. Au fil des divisions, une bactérie peut devenir résistante à l'antibiotique, auquel cas elle transmet cette propriété à l'ensemble de ses descendantes. On admet que, dans ce cadre, la variable aléatoire X qui décrit le nombre de bactéries vivantes à la fin de l'expérience suit une loi de Yule–Simon de paramètre ν, avec ν un réel strictement supérieur à 2.

21. Pour tout couple d'entiers (n,p), on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^p\,\mathrm{d}t$.

21.a. Soient n et p deux entiers naturels. Trouver une relation entre $I_{n,p+1}$ et $I_{n+1,p}$.

21.b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{n,p} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$

21.c. En déduire $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} (N+1)\int_0^1 t(1-t)^N\,\mathrm{d}t$.

22.a. Soit N un entier et $t \in]0,1]$. En utilisant la question 20. a, prouver que :

$$\sum_{k=1}^{N} k\,(1-t)^{k-1} = \frac{1}{t^2} - \frac{(1-t)^{N+1}}{t^2} - \frac{(N+1)(1-t)^N}{t}.$$

22.b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \nu\, t^{\nu}\,(1-t)\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

22.c. En utilisant les questions précédentes, prouver que X possède une espérance et que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\nu - 1}.$$

23. On admet que $(X-1)X$ possède une espérance et que :

$$\mathbb{E}\left((X-1)X\right) = \nu \int_0^1 t^{\nu}\,(1-t)^2\,\frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

23.a. Déterminer $\mathbb{E}\left((X-1)X\right)$ en fonction de ν.

23.b. Justifier que X possède une variance et déterminer son expression en fonction de ν.

23.c. Prouver que $\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)} > 1$.

24. Comment pourrait-on, à partir d'un échantillon, privilégier le modèle de la partie I plutôt que celui de la partie V ?

FIN DU SUJET