

## I. Notion de fonctions génératrices.

Q 1.

Q 1.1 Soit  $t \in [0, 1]$ ,Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq P(X = n)t^n \leq P(X = n)$ et la série  $\sum P(X = n)$  converge (car  $X$  est une variable aléatoire),donc le théorème de convergence par comparaison permet d'affirmer que la série  $\sum P(X = n)t^n$  converge. $G_X$  est donc au moins définie sur le segment  $[0, 1]$ Q 1.2 D'une part, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0^n = 0$  et  $0^0 = 1$  donc  $G_X(0) = P(X = 0)$ .d'autre part,  $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)$  et  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  donc  $G_X(1) = 1$ Q 1.3 Soient  $a$  et  $b$  dans  $[0, 1]$  et vérifiant  $a < b$ , $a$  et  $b$  sont positifs donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a^n \leq b^n$  et comme  $P(X = n) \geq 0$  on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n)a^n \leq P(X = n)b^n$$

et comme les deux séries convergent on a :  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)a^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)b^n$  ou encore  $G_X(a) \leq G_X(b)$ La fonction  $G_X$  est croissante sur  $[0, 1]$ Q 1.4  $G_X$  est croissante sur  $[0, 1]$  donc pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $G_X(0) \leq G_X(x) \leq G_X(1)$ ,or (avec Q.1.2)  $G_X(1) = 1$  et  $G_X(0) = P(X = 0) \geq 0$  doncPour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $G_X(t) \in [0, 1]$ Q 1.5 Soit  $t \in [0, 1]$ , Appliquons le théorème de transfert.La variable aléatoire  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,la série  $\sum P(X = n)t^n$  est absolument convergente (car elle converge et est à termes positifs).donc la variable aléatoire  $t^X$  admet une espérance et  $E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$  $t^X$  admet une espérance et  $E(t^X) = G_X(t)$ Q 1.6 Soit  $t \in [0, 1]$ , on a  $t^2 \in [0, 1]$  donc en appliquant le résultat de la question précédente avec  $t \leftarrow t^2$  $(t^2)^X$  admet une espérance et  $E((t^2)^X) = G_X(t^2)$ ou encore  $(t^X)^2$  admet une espérance et  $E((t^X)^2) = G_X(t^2)$ 

Ce qui permet avec le théorème de Koenig-Huygens d'en déduire :

 $t^X$  admet une variance et  $V(t^X) = G_X(t^2) - G_X(t)^2$ comme  $G_X(t)^2 \geq 0$  on en déduit que  $V(t^X) \leq G_X(t^2)$ de plus, sachant que  $t^2 \in [0, 1]$ , avec le résultat de (Q.1.4) on a :  $G_X(t^2) \leq 1$ 

En conclusion :

 $V(t^X) \leq 1$

**Q 2.** Soit  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned}
 G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \\
 &= (pt + 1 - p)^n \quad (\text{formule du binôme})
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ alors } G_X(t) = (pt + 1 - p)^n}$$

**Q 3.**

**Q 3.1** Raisonnons par double implication :

•  $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$

S'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $P(X \leq m) = 1$  alors pour tout  $n > m$ ,  $P(X = n) = 0$

on a alors  $\sum_{k \geq 0} P(X = k)t^k$  converge (la suite des termes est à support fini)

et  $G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^m P(X = k)t^k$  et c'est donc un polynôme.

•  $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$

On suppose que  $G_X$  est de degré  $N$  ( $G_X(1) = 1$  donc  $G_X \neq 0$ )

il suffit de montrer que pour tout  $n > N$ ,  $P(X = n) = 0$

Soit  $n > N$

on a  $\forall t > 0$ ,  $G_X(t) \geq P(X = n)t^n$  ou encore  $\frac{G_X(t)}{t^n} \geq P(X = n) \geq 0$

or comme  $G_X$  est de degré  $N$  et que  $n > N$  on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_X(t)}{t^n} = 0$  donc  $P(X = n) = 0$

donc en prenant  $m$  le degré de  $G_X$ , on a bien il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $P(X \leq m) = 1$

$$\boxed{\text{Il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } P(X \leq m) = 1 \text{ si, et seulement si, } G_X \text{ est un polynôme}}$$

**Q 3.2** On suppose (i) et (ii) vérifiés,

• d'une part, pour tout  $n > m$ ,  $P(X = n) = 0$

donc  $\sum kP(X = k)$  converge et sa somme vaut  $\sum_{k=0}^m kP(X = k)$

$X$  admet une espérance et  $E(X) = \sum_{k=0}^m kP(X = k)$

• d'autre part,  $G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^m P(X = k)t^k$  donc  $G_X$  est dérivable et  $G'_X(t) = \sum_{k=1}^m kP(X = k)t^{k-1}$

$G_X$  est dérivable en 1 et  $G'_X(1) = \sum_{k=0}^m kP(X = k)$  (Pour  $k = 0$  le terme est nul)

En conclusion :

$$\boxed{E(X) = G'_X(1)}$$

**Q 4.** Ici on se retrouve aussi avec les assertions de la question Q 3.1 vérifiées.

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
 X \text{ et } Y \text{ ont même loi} &\iff \forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, P(X = k) = P(Y = k) \\
 &\quad \text{(identification des coefficients de deux polynômes égaux)} \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^m P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^m P(Y = k)t^k \\
 &\iff G_X = G_Y \\
 &\quad \text{(Deux polynômes coïncidant sur un ensemble infini sont égaux)} \\
 &\iff \forall t \in [0, 1], G_X(t) = G_Y(t)
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont même loi si, et seulement si, } \forall t \in [0, 1], G_X(t) = G_Y(t)}$$

## II.

### II.A.

**Q 5.** Cette expérience est constituée de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques ( $A_1$ ) et indépendantes ( $A_3$ ), le succès est : "atteindre 20cm" a pour probabilité  $p_1$  ( $A_1$ ).

$J_1$  est le nombre de succès donc

$$\boxed{J_1 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, p_1)}$$

**Q 6.** (la suite de l'énoncé donne trois approches, ici on en choisit une)

Cette expérience est constituée de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques ( $A_1$ ) et indépendantes ( $A_3$ ), le succès est : "atteindre 20cm et fleurir" a pour probabilité  $p_1 p_2 = \frac{1}{2}$  ( $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_4$ ).

$J_2$  est le nombre de succès donc

$$\boxed{\text{Pour } n = 2, p_1 = \frac{2}{3} \text{ et } p_2 = \frac{3}{4}, J_2 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (2, 1/2)}$$

**Q 7.**

**Q 7.1** `import numpy.random as rd`

```

def J2(n, p1, p2):
    aux = 0
    l = [0 for i in range(n)]
    for i in range(n):
        if rd.binomial(1, p1) == 1:
            l[i] = 1
    for i in range(n):
        if l[i] == 1:
            if rd.binomial(1, p2) == 1:
                aux = aux + 1
    return aux

```

**Q 7.2** Les lignes 4 et 6 simulent la première phase et indiquent dans la liste  $l$ <sup>1</sup> les plantes qui dépassent le seuil, on met un 1 en  $l[k]$  quand la plante  $k$  dépasse 20cm.

Les lignes 7 et 10 simulent la deuxième phase et comptent dans `aux` les plantes qui fleurissent parmi celle qui dépassaient 20cm au cours de la première phase.

**Q 8.**

**Q 8.1**  $J_1$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p_1)$  donc  $J_1(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et ainsi

$$\boxed{(J_1 = i)_{0 \leq i \leq n} \text{ est un système complet d'événements}}$$

**En effet :** les  $(J_1 = i)$  sont deux à deux incompatibles et leur réunion est égale à l'univers.

**Q 8.2**  $0 < p_1 < 1$  et  $J_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_1)$  donc  $P(J_1 = i) = \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i} > 0$

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(J_1 = i) > 0}$$

1. Personnellement j'évite la lettre 1 trop proche à la lecture du chiffre 1

Pour un  $i$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , si  $(J_1 = i)$  est réalisé :

la deuxième phase est une succession de  $i$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes  $(A_3)$  et  $(A_4)$ .

Le succès est la plante fleuri a pour probabilité  $p_2 : (A_2)$ .

$J_2$  est égal au nombre de succès donc

Loi conditionnelle de  $J_2$  sachant  $(J_1 = i)$  est la loi  $\mathcal{B}(i, p_2)$

**Q 8.3** On applique ici la formule des probabilités totales avec le système complet de la question Q 8.1. :

$$\begin{aligned}
 P(J_2 = \ell) &= \sum_{i=0}^n P(J_2 = \ell | J_1 = i) P(J_1 = i) \\
 &= \sum_{i=\ell}^n P(J_2 = \ell | J_1 = i) P(J_1 = i) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=\ell}^n \binom{i}{\ell} p_2^\ell (1-p_2)^{i-\ell} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}}_{\text{La formule demandée}} \quad \text{avec Q 5. et Q 8.2.}
 \end{aligned}$$

**Q 8.4**

$$\begin{aligned}
 \binom{i}{\ell} \binom{n}{i} &= \frac{i!}{\ell!(i-\ell)!} \times \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
 &= \frac{n!}{\ell!} \times \frac{1}{(i-\ell)!(n-i)!} \\
 &= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{(i-\ell)!(n-i)!}
 \end{aligned}$$

donc

$$\binom{i}{\ell} \binom{n}{i} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{i-\ell}$$

**Q 8.5** Avec ce dernier résultat on peut prolonger le calcul de la question Q 8.3.

Pour  $\ell \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned}
 P(J_2 = \ell) &= \sum_{i=\ell}^n \binom{i}{\ell} \binom{n}{i} p_2^\ell (1-p_2)^{i-\ell} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=\ell}^n \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{i-\ell} p_2^\ell (1-p_2)^{i-\ell} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{\ell} p_2^\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{i} (1-p_2)^i p_1^{i+\ell} (1-p_1)^{n-i-\ell} \\
 &= \binom{n}{\ell} p_2^\ell p_1^\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{i} ((1-p_2)p_1)^i (1-p_1)^{n-\ell-i} \\
 &= \binom{n}{\ell} p_2^\ell p_1^\ell ((1-p_2)p_1 + 1 - p_1)^{n-\ell} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_1 p_2)^\ell (1 - p_1 p_2)^{n-\ell}
 \end{aligned}$$

$J_2$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p_1 p_2)$

**Q 9.** La fonction `mystere1` simule la réalisation de la variable aléatoire  $J_2$ .

**En effet** : La ligne 2 simule la première phase de l'expérience et la ligne 3 simule la deuxième phase suivant la valeur de  $i$  obtenu à la première phase.

Q 10.

Q 10.1 On admet que  $G_{J_2} = G_{J_1} \circ G_{X_1}$ , or (d'après la question Q 2.)  $G_{X_1} : t \mapsto p_2t + 1 - p_2$  et  $G_{J_1} : t \mapsto (p_1t + 1 - p_1)^n$  donc

$$\begin{aligned} G_{J_2}(t) &= G_{J_1}(G_{X_1}(t)) \\ &= G_{J_1}(p_2t + 1 - p_2) \\ &= (p_1(p_2t + 1 - p_2) + 1 - p_1)^n \\ &= (p_1p_2t + 1 - p_1p_2)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{G_{J_2} : t \mapsto (p_1p_2t + 1 - p_1p_2)^n}$$

Q 10.2 On reconnaît à la question précédente la fonction génératrice d'une variable suivant la loi binomiale de paramètres  $(n, p_1p_2)$  donc (d'après Q 4.)

$$\boxed{J_2 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, p_1p_2)}$$

Q 11.

Q 11.1 Une plante est finalement retenue si, et seulement si, elle franchit le seuil de 20cm et fleurit. Ces deux événements sont indépendants donc

$$\boxed{\text{La probabilité que la plante soit finalement retenue vaut } p_1p_2}$$

Q 11.2 Cette expérience est constituée de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques ( $A_1$ ) et indépendantes ( $A_3$ ), le succès est : "atteindre 20cm et fleurir" a pour probabilité  $p_1p_2$  ( $A_1, A_2$  et  $A_4$ ).

$J_2$  est le nombre de succès donc

$$\boxed{J_2 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, p_1p_2)}$$

Q 12. Le programme `mystere2` est le programme classique permettant de simuler une loi binomiale.

avec pour succès "`rd.binomial(1, p1) == 1` et `rd.binomial(1, p2) == 1`" qui a pour probabilité  $p_1p_2$ .

d'après ( $A_4$ ).

$$\boxed{\text{La fonction } \text{mystere2} \text{ simule la réalisation de la variable aléatoire } J_2}$$

### III.

#### III.A.

Q 13. ( $H_3$ ) : Le nombre de descendants d'un euglène suit toujours la même loi de probabilité.

( $H_5$ ) : Le nombre de descendants de chaque euglène est au plus égal à  $m$ .

( $H_6$ ) : Le nombre de descendants des euglènes sont indépendants les uns des autres.

Q 14.  $N_1$  est le nombre d'euglènes au jour 1, donc  $N_1 = D_{0,1}$  et ainsi en avec ( $H_3$ ) :  $\boxed{N_1 \text{ et } D \text{ suivent la même loi}}$

Q 15.  $N_j$  est un nombre d'euglènes donc c'est un entier naturel, et à chaque génération, au mieux, tous les euglènes ont  $m$  descendants donc le nombre maximum d'euglènes est, au mieux, multiplié par  $m$  chaque jour, donc le jour  $j$  :

$$\boxed{N_j \text{ est à valeurs dans } \{0, \dots, m^j\}}$$

Q 16. C'est une conséquence de ( $H_4$ ) :

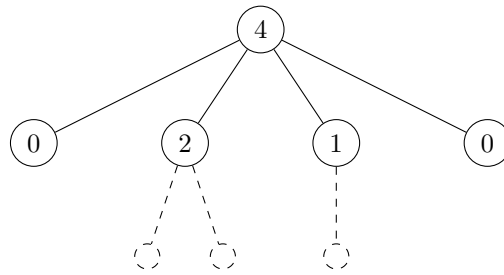
• d'une part,  $D$  est à valeurs donc pour tout  $n \notin \{0, \dots, m\}$ ,  $P(D = n) = 0$ , autrement dit : Si  $P(D = n) > 0$  alors  $n \in \{0, \dots, m\}$ , ce qui justifie :

$$\boxed{S \subset \{0, \dots, m\}}$$

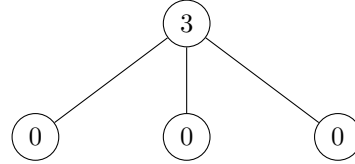
• d'autre part,  $P(D = m) > 0$  donc  $\boxed{m \in S}$ .

Q 17.

Q 17.1 Événement  $A_1 : (D_{0,1} = 4, D_{1,1} = 0, D_{1,2} = 2, D_{1,3} = 1, D_{1,4} = 0)$



**Événement**  $A_2 : (D_{0,1} = 3, D_{1,1} = 0, D_{1,2} = 0, D_{1,3} = 0)$



**Q 17.2**  $A_1 = (D_{0,1} = 4) \cap (D_{1,1} = 0) \cap (D_{1,2} = 2) \cap (D_{1,3} = 1) \cap (D_{1,4} = 0)$ , de plus les  $D_{i,j}$  sont indépendantes et toutes de même loi que  $D$  donc

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(D_{0,1} = 4)P(D_{1,1} = 0)P(D_{1,2} = 2)P(D_{1,3} = 1)P(D_{1,4} = 0) \\ &= P(D = 4)P(D = 0)P(D = 2)P(D = 1)P(D = 0) \\ &= p_4 p_0 p_2 p_1 p_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A_1) = p_0^2 p_1 p_2 p_4}$$

De même on montre :

$$\boxed{P(A_2) = p_0^3 p_3}$$

**Q 17.3** Dans cette question 17 on a supposé que  $\{0, 1, 2, 3, 4\} \subset S$  donc  $p_0, \dots, p_4$  sont strictement positifs et ainsi comme  $P(A_1) = p_0^2 p_1 p_2 p_4$  et  $P(A_2) = p_0^3 p_3$

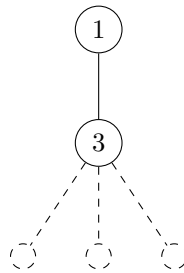
$$\boxed{P(A_1) > 0 \text{ et } P(A_2) > 0}$$

**Q 17.4** Si  $A_1$  est réalisé alors au jour 2 il y a 3 euglènes donc  $N_2$  prend la valeur 3, autrement dit  $\boxed{A_1 \subset (N_2 = 3)}$  et comme les  $(N_2 = n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux à deux disjoints on a bien :

$$\boxed{\text{il existe un unique entier } n \text{ tel que } A_1 \subset (N_2 = n) \text{ et cet entier est } 3}$$

**Q 17.5** Comme  $A_1 \subset (N_2 = 3)$  on a déjà  $P(A_1) \leq P(N_2 = 3)$ , il reste à montrer que ces deux probabilités sont distinctes.

Si on prend  $A_3$  représenté par l'arbre :



On remarque que  $A_1 \cup A_3 \subset (N_2 = 3)$ , que  $A_1$  et  $A_3$  sont incompatibles donc  $P(A_1) + P(A_3) \leq P(N_2 = 3)$ , de plus  $P(A_3) = p_1 p_3 > 0$  donc

$$\boxed{P(A_1) < P(N_2 = 3)}$$

**Q 18.**

- Q 18.1** • D'une part  $N_j$  s'exprime en fonction des variables aléatoires  $D_{i,k}$  avec  $i < j$ ,  
 • D'autre part les  $D_{a,b}$  sont mutuellement indépendantes,

donc en appliquant la lemme de coalition il vient :

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } D_{j,1}, \dots, D_{j,m^j} \text{ et } N_j \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

**Q 18.2** On applique la formule des probabilités totales avec le système complet  $(N_j = \ell)_{0 \leq \ell \leq m^j}$

$$\begin{aligned} P(N_{j+1} = n) &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P(N_{j+1} = n | N_j = \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P\left(\sum_{k=1}^{N_j} D_{j,k} = n | N_j = \ell\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(N_{j+1} = n) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right)}$$

**Q 18.3** Ce sont toutes des variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs donc

$$\boxed{D, N_j \text{ et } N_{j+1} \text{ admettent des espérances}}$$

$$\begin{aligned} E(N_{j+1}) &= \sum_{n=0}^{m^{j+1}} n P(N_{j+1} = n) \\ &= \sum_{n=0}^{m^{j+1}} n \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) \sum_{n=0}^{m^{j+1}} n P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) E\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) \sum_{k=1}^{\ell} E(D_{j,k}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) \ell E(D) \quad (\text{car tous les } D_{j,k} \text{ suivent la loi de } D) \\ &= E(N_j) E(D) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, E(N_{j+1}) = E(D)E(N_j)}$$

**Q 18.4** La question précédente montre que la suite  $(E(D_j))_{j \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $E(D)$  et comme  $E(N_0) = E(1) = 1$  il vient :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, E(N_j) = E(D)^j}$$

**Q 19.** Lorsque  $E(D) > 1$ , sachant que  $\forall j \in \mathbb{N}, E(N_j) = E(D)^j$ , la population d'euglènes croît exponentiellement.

Cette croissance illimitée est irréaliste à long terme, quand les euglènes deviennent nombreuses il faut remettre en cause l'indépendance des reproductions.

Il faut tenir compte des interactions entre euglènes et des limites du milieu.

**Q 20.** Si  $A_1$  est réalisé, le jour 2 il y a 3 euglènes.

$E_0$  est alors réalisé si, et seulement si, les trois lignées indépendantes s'éteignent donc

$$\boxed{P(E_0 | A_1) = \alpha^3}$$

Si  $A_1$  est réalisé, le jour 2 il n'y a plus d'euglène.

donc  $E_0$  est certain.

$$\boxed{P(E_0 | A_2) = 1}$$

**Q 21.**

**Q 21.1** En prenant  $m = 2$ ,

$p(D = 0) + P(D = 2) = p + 1 - p = 1$  donc pour tout  $n \notin \{0, 2\}$ ,  $P(D = n) = 0$ ,  
on a bien  $D$  est valeurs dans  $\{0, 1, 2\}$  et  $P(D = 2) = p \neq 0$  car  $p \in ]0, 1]$ .

$(H_4)$  est satisfaite

**Q 21.2** On utilise la proposition admise au début de ce paragraphe.

Soit  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} G_D(t) - t = 0 &\iff (1 - p) + 0 + pt^2 - t = 0 \\ &\iff pt^2 - t + (1 - p) = 0 \\ &\iff (t - 1)(pt - (1 - p)) = 0 \\ &\iff t = 1 \quad \text{ou} \quad t = \frac{1 - p}{p} \end{aligned}$$

de plus  $\frac{1 - p}{p} < 1 \iff 1 - p < p \iff p > \frac{1}{2}$

or  $\alpha_p$  est la plus petite solution de l'équation :  $G_D(t) - t = 0$  sur  $[0, 1]$ .

Si  $0 < p \leq \frac{1}{2}$  alors  $\alpha_p = 1$ , sinon  $\alpha_p = \frac{1 - p}{p}$

**Q 21.3** • d'une part  $p \mapsto \alpha_p$  est constante égale à 1 sur  $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

• d'autre part, sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\alpha_p = \frac{1}{p} - 1$  donc  $p \mapsto \alpha_p$  est strictement décroissante.

Et comme  $\alpha_{\frac{1}{2}} = 1$ , la fonction est décroissante sur  $]0, 1]$

**Q 22.**

**Q 22.1** Aux lignes 4 à 6, on effectue  $N$  simulations de la variable aléatoire  $D$  et on additionne les résultats dans la variable `aux`.

Autrement dit : simule  $N_{i+1}$  à partir de  $N_i$ .

**Q 22.2** `N1` contient le nombre de descendants d'une euglène à n'importe quel niveau de l'arbre.

**Q 22.3** La fonction `extinction_iter` effectue un parcours en largeur : elle regarde les générations les unes après les autres.

La fonction `extinction_rec` effectue un parcours en profondeur : elle regarde euglène par euglène si les lignées s'éteignent.

En dehors des problèmes liés aux fonctions récursives, la fonction `extinction_rec` semble la plus efficace car dès qu'une lignée survit, on peut conclure sans poursuivre la suite des simulations.

**Q 23.**

**Q 23.1** On est dans la situation de Q 21. avec  $p = \frac{1}{2}$  donc d'après Q 21.1. on a :

$(H_4)$  est satisfaite

**Q 23.2** Le résultat de la question Q 21 2 donne  $\alpha = 1$  et donc on est certain qu'il existe un  $j \geq 1$  tel que  $N_j = 0$  autrement dit que  $\mathcal{E}(\omega) \neq \emptyset$  donc

$P(J = 0) = 0$

**Q 23.3** En appliquant le théorème de convergence pour deux séries par équivalence des termes généraux positifs

comme  $jP(J = j) \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{j}$  ( $\geq 0$ ) et on sait que  $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j}$  diverge on a  $\sum_{j \geq 1} jP(J = j)$  diverge donc

$J$  n'admet pas d'espérance

**Q 23.4** def temps\_extinction():  
 if rd.random() < 0.5:  
     return 1 # condition d'arrêt : extinction dès la génération suivante  
 else:  
     t1 = temps\_extinction() # temps d'extinction de la première lignée  
     t2 = temps\_extinction() # temps d'extinction de la seconde lignée  
     return 1 + max(t1, t2)

**Q 24.**

**Q 24.1** *Raisonnons par double inclusion :*

- Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on a  $(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \subset (N_{j+1} = 0)$  donc  $\bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \subset E_0$
- Soit  $\omega \in E_0$ ,  
 on note  $r$  le premier entier  $\geq 1$  tel que  $N_r(\omega) = 0$ , en posant  $j = r - 1$  on a :  $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$   
 donc  $\omega \in \bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$  d'où la deuxième inclusion.

$$E_0 = \bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$$

**Q 24.2** On sait que  $(N_{j+1} = 0) = (N_{j+1} = 0 \cap N_j \neq 0) \cup (N_{j+1} = 0 \cap N_j = 0)$  et comme  $(N_j = 0) \subset (N_{j+1} = 0)$  il vient :

$$(N_{j+1} = 0) = (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cup (N_j = 0)$$

**Q 24.3** Les événements  $(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$  sont deux à deux disjoints donc l'égalité de Q 24.1. donne

$$P(E_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$$

et la réunion de Q 24.2. est disjointe donc  $a_{j+1} = P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) + a_j$  ce qui permet de conclure :

$$\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} (a_{j+1} - a_j)$$

**Q 24.4** La somme partielle est télescopique  $\sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) = a_n$  et converge vers  $\alpha$  d'après Q 24.3. donc

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = \alpha$$

**Q 25.**

**Q 25.1** La définition de  $S$  permet d'affirmer que  $(N_1 = n)_{n \in S}$  est un système quasi-complet d'événements, en appliquant la formule des probabilités totales il vient :

$$P(N_{j+1} = 0) = \sum_{n \in S} P(N_1 = n) P(N_{j+1} = 0 | N_1 = n)$$

et comme  $N_1$  et  $D$  suivent la même loi :

$$\text{pour tout } j \in \mathbb{N}, a_{j+1} = \sum_{n \in S} p_n P(N_{j+1} = 0 | N_1 = n)$$

**Q 25.2** Si  $(N_1 = n)$  est réalisée,

alors le jour 2 on a  $n$  euglènes,  $(N_{j+1} = 0)$  est réalisé les  $n$  lignées indépendantes s'éteignent au cours des jours 2 à  $j + 1$  ainsi

$$P(N_{j+1} = 0 | N_1 = n) = (a_j)^n$$

**Q 25.3** Les deux questions précédentes donnent  $a_{j+1} = \sum_{n \in S} p_n (a_j)^n$  et comme pour  $n \notin S$ ,  $p_n = 0$  on a :

$$a_{j+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (a_j)^n$$

ou encore

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in \mathbb{N}, a_{j+1} = G_D(a_j)}$$

**Q 25.4** On a pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $a_{j+1} = G_D(a_j)$ ,  $a_j \in [0, 1]$ ,  $(a_j)$  converge vers  $\alpha$  et  $G_D$  est continue sur  $[0, 1]$  (c'est un polynôme).

donc en passant à la limite on obtient :

$$\boxed{\alpha = G_D(\alpha)}$$

**Q 25.5** On fixe  $t$  dans  $\mathcal{F}$  et raisonnons par récurrence sur  $j$  :

- Pour  $j = 0$ ,  $a_0 = 0$  et  $t \in [0, 1]$  donc on a bien :  $a_0 \leq t$ .
- Soit  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $a_j \leq t$ ,  
on sait que  $G_D$  est croissante sur  $[0, 1]$  donc  $G_D(a_j) \leq G_D(t)$ ,  
de plus  $a_{j+1} = G_D(a_j)$  et  $t = G_D(t)$  donc  $a_{j+1} \leq t$

En conclusion :  $\boxed{\text{Pour tout } j \in \mathbb{N}, a_j \leq t}$

**Q 25.6**  $G_D$  est un polynôme donc  $\mathcal{F}$  est fini, il contient 1 donc  $\mathcal{F}$  possède un plus petit élément que l'on note  $\min(\mathcal{F})$

De plus pour tout  $t \in \mathcal{F}$ ,  $a_j \leq t$  donc pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \leq \min(\mathcal{F})$

et en passant à la limite il vient  $\alpha \leq \min(\mathcal{F})$ , et comme on a vu que  $\alpha \in \mathcal{F}$  à la question Q 25.4. on a bien

$$\boxed{\alpha = \min(\mathcal{F})}$$

**Q 26.**

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\iff G_D(0) = 0 && \text{(d'après Q 25.4.)} \\ &\iff p_0 = 0 && \text{(d'après Q 1.2.)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = 0 \iff p_0 = 0}$$

**Q 27.**

**Q 27.1**  $G_D$  est un polynôme donc  $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable}}$

**Q 27.2** Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f''(t) = G_D''(t)$

or  $G_D$  est un polynôme de degré  $\geq 2$  et à coefficients positifs donc  $\forall t \in ]0, 1[$ ,  $G_D''(t) > 0$  et ainsi

$$\boxed{f' \text{ est strictement croissante sur } [0, 1]}$$

**Q 27.3**  $f'(0) = G_D'(0) - 1 = p_1 - 1$  or  $\underbrace{\sum_{i=0}^m p_i = 1}_{(H_4)}$  et  $p_m > 0$  donc  $p_1 < 1$  et ainsi  $\boxed{f'(0) < 0}$

**Q 28.**

**Q 28.1**  $f'(1) = G_D'(1) - 1$  et d'après Q 3.2.  $G_D'(1) = E(D)$ , et ici on a supposé  $E(D) \leq 1$  donc  $\boxed{f'(1) \leq 0}$

**Q 28.2**  $f'$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et  $f'(1) \leq 0$  donc  $\forall t \in [0, 1[$ ;  $f'(t) < 0$  et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1]}$$

**Q 28.3**  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  donc  $f$  s'annule au plus une fois sur  $[0, 1]$ , or on sait que  $f(1) = 0$  donc

$$\boxed{\mathcal{F} = \{1\}}$$

D'après Q 25.6.  $\alpha$  est le plus petit élément de  $\mathcal{F}$  donc

$$\boxed{\alpha = 1}$$

**Interprétation :** Lorsque  $E(D) \leq 1$  on est presque sûr que la population d'euglènes va finir par disparaître.

Q 29.

Q 29.1  $f'(1) = G'_D(1) - 1$  et ici on a supposé  $E(D) > 1$  donc  $f'(1) > 0$

Q 29.2  $f'$  est continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$ ,  $f'(0) < 0$  et  $f'(1) > 0$  donc

Il existe  $\beta \in ]0, 1[$  tel que  $f'(\beta) = 0$

Q 29.3 L'étude précédente permet d'affirmer que  $f' < 0$  sur  $]0, \beta[$  et  $f' > 0$  sur  $] \beta, 1[$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $[0, \beta]$  et strictement croissante sur  $[\beta, 1]$

Q 29.4 L'étude de  $f$  montre qu'il existe exactement deux valeurs qui annulent  $f$  : une sur  $]0, \beta[$  et l'autre  $1 \in [\beta, 1]$ .

Ainsi  $\mathcal{F}$  contient deux valeurs et comme  $\alpha$  est la plus petite de ces valeurs  $\mathcal{F} = \{\alpha, 1\}$  et  $\alpha < 1$

**Interprétation** : L'extinction de la population n'est pas sûr. Il est probable (dans le modèle) que la population ne s'éteigne jamais.

Q 30. def proba\_extinction(epsilon):

a = 0

c = 1

while c - a > epsilon:

b = (a+c)/2

if G\_D(b) - b > 0:

a = b

else:

c = b

return c

Q 31.

Q 31.1 On fixe  $t$  dans  $[0, 1]$  et on définit la variable aléatoire  $Y = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}$

• On sait (Q 1.5.) que les  $t^{X_j}$  admettent pour espérance  $G_X(t)$  donc par linéarité :

$$E(Y) = G_X(t)$$

• On sait que les  $t^{X_j}$  sont indépendantes et admettent une variance (Q 1.6.) donc  $V(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} V(t^{X_j})$

de plus on sait (Q 1.6.) que  $V(t^{X_j}) \leq 1$  donc

$$V(Y) \leq \frac{1}{n}$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire  $Y$  :

$$P(|Y - E(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(Y)}{\epsilon^2}$$

on en déduit avec les deux résultats précédents :

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j} - G_X(t)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{n\epsilon^2}$$

Q 31.2 On remarque que  $\bar{A}_i = \left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j} - G_X(t)\right| \geq \epsilon\right)$  avec  $t = \frac{i}{p}$  donc  $P(\bar{A}_i) \leq \frac{1}{n\epsilon^2}$  d'après Q 31.1.

de plus on sait que :  $P\left(\bigcup_{i=0}^p \bar{A}_i\right) \leq \sum_{i=0}^p P(\bar{A}_i)$  donc  $P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \leq \frac{p+1}{n\epsilon^2}$  et ainsi :

$$P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \geq 1 - \frac{p+1}{n\epsilon^2}$$

**Q 31.3** Pour que  $P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \geq 1 - \eta$ , il suffit d'avoir  $1 - \frac{p+1}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \eta$

$$\text{or } 1 - \frac{p+1}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \eta \iff \dots \iff n \geq \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}$$

donc

$$\text{Pour que } P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \geq 1 - \eta, \text{ il suffit d'avoir } n \geq \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}$$

**Q 32.**

**Q 32.1** La ligne 4 permet d'obtenir un entier  $n$  vérifiant la condition suffisante de la question Q 31.3.

**Q 32.2** Les lignes 7 et 8 permettent d'estimer pour chaque  $i$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j}$  pour l'échantillon des  $X_j$ .

**Q 32.3** Les lignes 9 et 10 définissent deux listes  $y_{\min}$  et  $y_{\max}$  telles que  $y_{\min}[i]$ ,  $y_{\max}[i]$  sont les bornes permettant de définir l'événement  $A_i$ .

**Q 32.4** L'amplitude du segment  $[M_i, N_i]$  vaut  $y_{\max}[i] - y_{\min}[i] = 2\varepsilon$ .

La probabilité que la courbe représentative de  $G_X$  intersecte ces  $(p+1)$  segments est égale à :  $P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right)$

et comme on a choisi  $n \geq \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}$  on a bien d'après Q 31.

La probabilité que la courbe représentative de  $G_X$  intersecte ces  $(p+1)$  segments est au moins égale à  $1 - \eta$

**Q 33.** `def trace2(p, liste):`

```
x = [i/p for i in range(p+1)]
y = [0 for i in range(p+1)]
m = len(liste)-1
for i in range(p+1):
    for n in range(m+1):
        y[i] = y[i] + liste[n] * x[i]**n
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

**FIN DE LA CORRECTION**