Correction de l'épreuve ENS 2026

1. • $t \longmapsto \dfrac{1}{t^a}$ est continue et décroissante sur $[k;k+1]$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a}$,

• de même $t \longmapsto \dfrac{1}{t^a}$ est continue et décroissante sur $[k-1;k]$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a}$,

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^a}}$$

2. (a) • pour $a=1$ et $k=n+1$ l'encadrement précédent donne : $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

• pour $a=1$ et $k=n$ l'encadrement précédent donne : $\forall n \geqslant 2,\ \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$,

• sachant que $\ln(2) \leqslant 1$ on peut prolonger cette dernière inégalité : $\forall n \geqslant 1,\ \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, En conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}}$$

(b) • pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= H_n - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) - \ln(n) \\ &\geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

• pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

donc (u_n) est décroissante ce qui entraîne que $u_n \leqslant 1$ car $u_1 = 1$

En conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$$

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \gamma \in [0,1]}$$

(c) On vient de voir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(H_n - \ln(n)\big) = \gamma$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{H_n}{\ln(n)} - 1\right) = 0$

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3. On reprend l'encadrement de la question 1) et on somme pour k allant de 2 à n, il vient avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^a} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$$

et comme ici $a > 1$ on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{a-1}(1-n^{1-a}) \leqslant \frac{1}{a-1}$
en ajoutant 1 dans chaque membre il vient :

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leqslant \frac{a}{a-1}}$$

(C_n) est croissante et majorée par 2 donc $\boxed{(C_n) \text{ est convergente}}$.
Pour W_n on peut utiliser $ACV \Rightarrow CV$ mais on peut se passer du cours sur les séries :

$$\begin{aligned} C_{2n} + W_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1+(-1)^n}{k^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4i^2} \\ &= \frac{1}{2}\, C_n \end{aligned}$$

donc $W_{2n} = C_{2n} - \dfrac{1}{2}\, C_n$, or (C_n) converge donc (W_{2n}) converge
de plus $W_{2n+1} = W_{2n} - \dfrac{1}{2n+1}$ donc (W_{2n+1}) converge vers la même limite que (W_{2n}).

En conclusion :

$$\boxed{(W_n) \text{ est convergente}}$$

.

4. En passant à la limite sur la relation $C_{2n} + W_{2n} = \dfrac{1}{2}\, C_n$ démontrée ci-dessus il vient $C + W = \dfrac{1}{2} C$

$$\boxed{W = -\frac{1}{2}\, C}$$

5.

(a) f est de classe C^1 on peut faire une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{-\cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t)\frac{-\cos(\lambda t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(0) - f(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- D'une part $\lambda \mapsto f(0) - f(\pi)\cos(\lambda\pi)$ est bornée donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(0) - f(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} = 0$
- D'autre part $\displaystyle\left| \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |f'(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t$

  donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

(b) On sait que : $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$ donc en soustrayant on obtient : $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$\boxed{\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}}$$

(c) Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
2D_n(t) &= \sum_{i=-n}^{n} e^{ikt} && \textit{(formule d'Euler)}\\
&= e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} && \textit{(car } e^{it}\neq 1\textit{)}\\
&= \frac{e^{-int}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\\
&= \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_n(t)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

(d) Soit $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \left[t\,\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kt)\,\mathrm{d}t\\
&= 0-\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^k-1}{k^2}}$$

(e) Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} tD_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} && \textit{(d'après (e))}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{\pi} tD_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}-C_n+W_n}$$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} tD_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t$ avec $f : t\longmapsto \dfrac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

donc en utilisant le résultat de 5) (a) il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} tD_n(t)\,\mathrm{d}t=0$.

En passant à la limite sur la relation de la question (e) on obtient : $0=\dfrac{\pi^2}{4}-C-\dfrac{C}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

FIN PROVISOIRE DE LA CORRECTION