

1. Cette expérience est constituée de N épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où le succès : "devenir résistante" a pour probabilité $\frac{\lambda}{N}$;
 X_N est égale au nombre de succès donc

$$X_N \text{ suit la loi binomiale de paramètres } \left(N, \frac{\lambda}{N} \right)$$

2. Pour $N > \lambda$,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-k} = \exp \left((N-k) \ln \left(1 - \frac{\lambda}{N} \right) \right)$$

et

$$\begin{aligned} (N-k) \ln \left(1 - \frac{\lambda}{N} \right) &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (N-k) \left(-\frac{\lambda}{N} \right) \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} N \left(-\frac{\lambda}{N} \right) \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\lambda \end{aligned}$$

et comme la fonction exp est continue il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-k} = e^{-\lambda}$$

3. Pour $N \geq k$ et $\geq \lambda$,

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{N} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-k} \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{N}{k} \frac{\lambda^k}{N^k} e^{-\lambda} \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^k}{k!} \frac{\lambda^k}{N^k} e^{-\lambda} \quad (\text{En effet : } \binom{N}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (N-i)) \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X_N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

4. Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$ donc

$$\frac{V(X)}{E(X)} = 1$$

5. On pose $Y = a \mathbb{1}_{X>a}$

- $\mathbb{1}_{X>a}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X > a)$ et ainsi son espérance est $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X>a}) = \mathbb{P}(X > a)$
- De plus comme X est à valeurs positives on a $Y \leq X$ et ces deux variables admettent une espérance donc

$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$$

$$\text{or (linéarité) } \mathbb{E}(Y) = a \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X>a}) \quad \text{ou encore} \quad \mathbb{E}(Y) = a \mathbb{P}(X > a)$$

$$\text{et comme } a > 0 \text{ on peut en conclure que : } \mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

6. si $t = 0$ la relation est vérifiée, il suffit de l'établir pour $t > 0$,

On suppose ici que Z_t admet une espérance et on sait que $Z_t = \exp(tX)$ est à valeurs positives donc on peut lui appliquer l'inégalité de Markov avec $a \leftarrow e^{ta}$:

$$\mathbb{P}(Z_t > e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_t)}{e^{ta}}$$

or d'une part : $\mathbb{P}(Z_t > e^{ta}) = \mathbb{P}(e^{tX} > e^{ta}) = \mathbb{P}(X > a)$ car exp est strictement croissante et $t > 0$.
 et d'autre part $\psi(t) = \ln(\mathbb{E}(Z_t))$ donc $\mathbb{E}(Z_t) = e^{\psi(t)}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(X > a) \leq e^{\psi(t)-ta}}$$

7. 7.a Appliquons le théorème de transfert.

Sachant que Z_t est à valeurs positives,

$Z_t = e^{tX}$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{tk} \mathbb{P}(X = k)$ converge et alors elle vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbb{P}(X = k)$

k)

Utilisons les sommes partielles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{tk} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^n e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} && (\text{car } X \text{ suit la loi } \mathcal{P}(\lambda)) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-\lambda + \lambda e^t) && (\text{série exponentielle}) \end{aligned}$$

donc Z_t admet une espérance égale à $\exp(-\lambda + \lambda e^t)$ et ainsi comme $\psi(t) = \ln(\mathbb{E}(Z_t))$,

$$\boxed{\psi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+ \text{ et pour } t \geq 0, \psi(t) = \lambda(e^t - 1)}$$

7.b $\psi(t) = \lambda(e^t - 1)$ donc $e^{\psi(t)-ta} = \exp(\lambda(e^t - 1) - ta)$

Une étude de la fonction $g : t \mapsto \lambda(e^t - 1) - ta$ donne le tableau de variations suivants :

t	0	$\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)$	$+\infty$
$g'(t)$		-	0
			+
$g(t)$	0		$+\infty$
		$a \ln(\lambda) - a \ln(a) + a - \lambda$	

(Ce tableau est correct car ici on a supposé $a \geq \lambda$ donc $\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right) \geq 0$)

Or on a vu à la question 6. que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > a) \leq e^{g(t)}$ donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(X > a) \leq \exp(a \ln(\lambda) - a \ln(a) + a - \lambda)}$$

7.c On note $M_5 = \frac{\lambda}{a}$ le majorant de la question 5 et $M_7 = \exp(a \ln(\lambda) - a \ln(a) + a - \lambda)$ celui de la 7.

$$\begin{aligned} \frac{M_7}{M_5} &= \exp\left(\underbrace{a \ln(\lambda) - a \ln(a) + a - \lambda - \ln(\lambda) + \ln(a)}_{\underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} -a \ln(a)}\right) \\ &\xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le majorant de la question 7 est meilleur que celui de la question 5}}$$

8. P est une fonction polynomiale et $v > 0$ donc (croissance comparée) $P(s) e^{-\frac{s}{2v}} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$

donc il existe un réel M , tel que $\forall s \geq M, \left|P(s) e^{-\frac{s}{2v}}\right| \leq 1$

ce qui entraîne (en multipliant par $e^{-\frac{s}{2v}} > 0$) :

$$\boxed{\forall s \geq M, |P(s)| e^{-\frac{s}{v}} \leq e^{-\frac{s}{2v}}}$$

- d'une part $\forall s \geq M, 0 \leq |P(s)| e^{-\frac{s}{v}} \leq e^{-\frac{s}{2v}}$
- d'autre part, $F : s \mapsto -2ve^{-\frac{s}{2v}}$ est une primitive de $s \mapsto e^{-\frac{s}{2v}}$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{2v}} ds$ converge donc (théorème de convergence pour deux intégrales impropres) $\int_0^{+\infty} |P(s)| e^{-\frac{s}{v}} ds$ converge.

Sachant de plus que l'absolue convergence entraîne la convergence il vient finalement : $\int_0^{+\infty} P(s)e^{-\frac{s}{v}} ds$ converge

$$\boxed{L_P(v) \text{ est bien définie}}$$

9. Raisonnons par récurrence sur k .

- Pour $k = 0$,

$$\text{d'une part : } \frac{1}{v} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{v}} ds = \frac{1}{v} \left[-ve^{-\frac{s}{v}} \right]_0^{+\infty} = 1, \quad \text{d'autre part : } 0! v^0 = 1$$

la propriété est vraie pour $k = 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{v} \int_0^{+\infty} s^k e^{-\frac{s}{v}} ds = k! v^k$,

pour $A > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \int_0^A s^{k+1} e^{-\frac{s}{v}} ds &= \left[s^{k+1} \left(-e^{-\frac{s}{v}} \right) \right]_0^A \\ &\quad - \frac{1}{v} \int_0^A (k+1) s^k \left(-ve^{-\frac{s}{v}} \right) ds \quad (\text{Int. par parties avec des fonctions } C^1) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \underbrace{0}_{\text{croissance comparée}} + (k+1) \int_0^{+\infty} s^k e^{-\frac{s}{v}} ds \quad (\text{car d'après 8. cette intégrale converge}) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} (k+1)! v^{k+1} \quad (\text{en utilisant l'hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{1}{v} \int_0^{+\infty} s^{k+1} e^{-\frac{s}{v}} ds = (k+1)! v^{k+1}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \frac{1}{v} \int_0^{+\infty} s^k e^{-\frac{s}{v}} ds = k! v^k}$$

$$\text{Si } P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \text{ alors } P(s) = \sum_{k=0}^d a_k s^k \text{ et avec la linéarité de l'intégration, } L_P(v) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{v} \int_0^{+\infty} s^k e^{-\frac{s}{v}} ds$$

$$\boxed{L_P(v) = \sum_{k=0}^d k! a_k v^k}$$

10. L est une application de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X]$, il reste à montrer que L est linéaire.

$$\text{Soit } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (P, Q) \in \mathbb{R}_d[X]^2, \text{ en notant } P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^d b_k X^k$$

$$\begin{aligned} L(\lambda P + \mu Q) &= L \left(\sum_{k=0}^d (\lambda a_k + \mu b_k) X^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^d k! (\lambda a_k + \mu b_k) X^k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^d k! a_k X^k + \mu \sum_{k=0}^d k! b_k X^k \\ &= \lambda L(P) + \mu L(Q) \end{aligned}$$

L est bien linéaire :

L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$

11. $\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$ (En effet : $(1, X, \dots, X^d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$)

12. Il suffit de montrer $\ker(L) \subset \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \ker(L)$,

on a alors $L(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou encore $\sum_{k=0}^d k! a_k X^k = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc (identification) $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, k! a_k = 0$,

et comme $k! \neq 0$ il vient $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_k = 0$ et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

En conclusion :

$\ker(L) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$

13. $\ker(L) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ donc L est injective,

or L est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc L est surjective

14. $L(1) = 1, L(X) = X, L(X^2) = 2X^2$ et $L(X^3) = 6X^3$, donc la matrice de L dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

15. $L(1) = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, L(X^k) = k! X^k$,

Donc $(1, X, \dots, X^d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ formée de vecteurs propres de L donc

Le spectre est $\{ k! \mid k \in \llbracket 1, d \rrbracket \}$

$E_1(L) = \text{Vect}(1, X)$ et $\forall k \in \llbracket 2, d \rrbracket, E_{k!}(L) = \text{Vect}(X^k)$

16. Quelle que soit la valeur de $d \in \mathbb{N}^*$, nous venons de voir que $(1, X, \dots, X^d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ formée de vecteurs propres de L donc :

Quelle que soit la valeur de $d \in \mathbb{N}^*$, L est diagonalisable

17. (Calcul préliminaire)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$M \in C(A) \iff AM = MA$

$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & k \end{pmatrix}$

$\iff c = f = g = h = 0$

$\iff M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

$\iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $C(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

17.a $C(A)$ est un espace engendré par des vecteurs de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $C(A)$ est un espace vectoriel

17.b Comme nous l'avons vu dans le calcul préliminaire $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in C(A) \iff c = f = g = h = 0$

17.c Le calcul préliminaire donne :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } C(A) \text{ et ainsi } \dim(C(A)) = 5$$

17.d En prenant $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $B \in C(A)$ (En effet c'est une vecteur de la base)

et tous les vecteurs M de $\text{Vect}(I_3, A)$ sont des matrices où le coefficient $m_{1,2}$ est nul donc $B \notin \text{Vect}(I_3, A)$

$$\boxed{B \in C(A) \text{ et } B \notin \text{Vect}(I_3, A)}$$

FIN PROVISOIRE DE LA CORRECTION