

## Feuille \_Oraux\_ 2 — Agro/Véto – Exemples 1 et 3 (jury 2025)

## Déroulement de l'épreuve réelle.

- **40 min** de préparation, avec l'énoncé, des feuilles de brouillon et accès à un ordinateur.
- **2 min** devant l'examinateur : question de cours (*définition ou théorème, pas de démonstration*)
- **28 min** : exercice préparé. L'examinateur suit votre démarche, pose des questions, peut débloquer si nécessaire. Un ordinateur est à votre disposition (*Vous apportez les programmes préparés avec une clef USB*).
- **10 min** : exercice non préparé. Énoncé découvert en salle, sans préparation. *Vous pouvez répondre au tableau ou sur l'ordinateur.*

**Pour cette séance de TD :** Pour chaque exemple, commencer par lire l'intégralité de l'énoncé pendant quelques minutes, puis travailler la question de cours et l'exercice préparé. Aujourd'hui nous ne traitons pas les questions d'informatique, nous le ferons mercredi.

## Exemple 1

## Question de cours

2 min

Donner la définition d'une fonction de densité de probabilité.

## Exercice préparé

28 min

1. (a) Soit  $f$  la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}.$$

Étudier la fonction  $f$  sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet. En déduire le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 1$ .

- (b) Déterminer les solutions exactes de l'équation  $f(x) = 1$ .

Soit  $A_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne  $j$  sont égaux à  $j$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

2. (a) Écrire une fonction Python d'argument  $n$  renvoyant  $A_n$ .  
 (b) En déduire une valeur approchée des valeurs propres de  $A_n$  pour  $n \in \{2, 3, 4, 10\}$ .

```
n=2 : [-1.4142, 1.4142]
n=3 : [-2.4836, -1.2828, 3.7664]
n=4 : [-3.5250, -2.3667, -1.2145, 7.1062]
n=10 : [-9.6310, -8.5347, -7.4616, -6.3978, -5.3382,
        -4.2800, -3.2210, -2.1587, -1.0890, 48.1120]
```

3. Pour  $n \geq 2$ , on pose

$$f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t}$$

et on considère l'équation  $(\mathcal{E}_n)$  d'inconnue  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = 1.$$

- (a) Montrer que l'équation  $(\mathcal{E}_n)$  admet une unique solution dans chacun des intervalles  $] -1, +\infty[$  et  $] -k, -(k-1)[$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .
- (b) On admet (pour l'instant) que toutes les valeurs propres de  $A_n$  sont les solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_n)$ . La matrice  $A_n$  est-elle diagonalisable ?
4. Pour  $n \geq 2$ , on appelle  $\lambda_n$  la solution de  $(\mathcal{E}_n)$  comprise entre  $-2$  et  $-1$ .
- (a) Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul, pour tout réel  $t$  de  $] -2, -1[$ ,  $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ , et en déduire la monotonie de la suite  $(\lambda_n)$ .
- (b) Montrer que la suite  $(\lambda_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . Si l'on suppose que  $\ell \in ] -2, -1[$ , comparer  $f_n(\lambda_n)$  et  $f_n(\ell)$ .
- (c) Pour  $\lambda \in ] -2, -1[$ , calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda}$  et conclure sur la valeur de  $\ell$ .
- (d) Montrer que pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,
- $$\frac{1}{k} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$
- et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .
- (e) Déterminer un équivalent de  $\frac{1}{1+\lambda_n}$  puis de  $\lambda_n+1$ . On pourra utiliser un encadrement de  $\sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$ .
5. Montrer, à l'aide du système traduisant la recherche des valeurs propres/vecteurs propres, que les valeurs propres de  $A_n$  sont les solutions de l'équation  $(\mathcal{E}_n)$ .

## Exercice non préparé

10 min

1. On considère des listes non vides ne contenant qu'une ou deux valeurs différentes. Par exemple `['Marwa', 'Ambre', 'Marwa', 'Ambre', 'Ambre']`.
- Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election1(L)` qui prend en entrée une liste  $L$  de cette forme et qui renvoie l'élément qui est majoritaire. La fonction doit renvoyer `None` en cas d'égalité.
- Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer `'Ambre'`.
2. On considère maintenant des listes non vides, mais pouvant contenir plus de deux valeurs différentes. Par exemple `['Olivia', 'Gita', 'Mathys', 'Olivia', 'Mathys']`.
- Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election2(L)` qui prend une liste ayant cette forme et qui renvoie la liste des personnes ayant obtenu le maximum de voix (la liste contient plusieurs personnes en cas d'égalité).
- Sur la liste donnée en exemple :
- la fonction doit renvoyer `['Olivia', 'Mathys']` ou `['Mathys', 'Olivia']` car Olivia et Mathys sont ex aequo avec deux voix chacun.

## Exemple 3

### Question de cours

2 min

Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un segment.

### Exercice préparé

28 min

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $n \geq 1$  dont les éléments diagonaux sont  $(d_1, \dots, d_n)$ .

(a) Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur colonne. Vérifier que  $X^\top D X = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$ .

- (b) En déduire que les coefficients diagonaux de  $D$  sont strictement positifs si et seulement si  $X^\top D X > 0$  pour tout vecteur colonne  $X$  non nul.

2. (a) Écrire une fonction en langage Python nommée `f` qui prend en entrée une matrice carrée  $M$  et qui renvoie  $X^\top M X$  où  $X$  est un vecteur colonne dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

- (b) Écrire un script qui affiche le nombre de fois que l'inégalité  $X^\top (A - 3I) X > 0$  est vérifiée après 100 exécutions de la fonction pour la matrice  $A$  ci-dessous ( $I$  désigne la matrice identité de même taille que  $A$ ).

Un affichage :

```
Nombre de fois X^T(A - 3I)X > 0 : 84
```

3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On considère les vecteurs

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que le vecteur  $U_1$  est un vecteur propre de  $A$  et donner la valeur propre associée.
- (b) Montrer que l'ensemble des vecteurs  $X$  tels que  $AX = X$  est un sous-espace propre de  $A$  et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée  $(U_2, U_3)$ .
- (c) Déterminer une matrice  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PD^2P^\top$  et  $P^\top P = I$ .
- (d) En déduire qu'il existe une matrice inversible  $L$  telle que  $A = LL^\top$ .

4. Soit  $B$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- (a) Vérifier que  $C = L^{-1}B(L^{-1})^\top$  est une matrice symétrique (où  $L$  est la matrice définie à la question 3(d)).

En déduire qu'il existe une matrice diagonale  $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et une matrice orthogonale<sup>1</sup>  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $B = LQ\Delta(LQ)^\top$ .

<sup>1</sup>Hors programme :  $Q$  est inversible et  $Q^{-1} = Q^\top$

(b) En utilisant les matrices  $Q$  et  $\Delta$  de la question 4(a), on pose  $R = LQ$ . On a ainsi  $B = R\Delta R^\top$ . Calculer  $RR^\top$ .

5. **[Question ajoutée]** On revient à) la fin de la question 2)

On admet que la probabilité de l'événement  $\{X^\top(A - 3I)X > 0\}$  vaut exactement  $p_0 = \frac{5}{6}$ .

On souhaite vérifier cette valeur par un test statistique. On note  $F_n$  la fréquence d'apparition de l'événement  $\{X^\top(A - 3I)X > 0\}$  lors de  $n$  répétitions indépendantes de l'expérience de la question 2(b).

(a) Écrire une fonction Python `frequence(n)` qui simule  $n$  répétitions indépendantes et renvoie la valeur de  $F_n$ .

(b) On teste  $H_0 : p = p_0 = \frac{5}{6}$  contre  $H_1 : p \neq p_0$  au niveau de confiance 95%. Donner la zone de rejet du test, en utilisant le fait que sous  $H_0$ , l'écart-type de  $F_n$  est  $\sigma = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ .  
On rappelle que  $u_{0,025} = 1,96$ .

(c) On obtient  $F_{1000} = 0,847$ . Conclure.

## Exercice non préparé

10 min

1. Écrire une fonction, en langage Python, nommée `alea` qui prend en argument un entier positif  $k$  et renvoie 1 avec la probabilité  $\frac{k+1}{k+2}$  et 0 avec la probabilité  $\frac{1}{k+2}$ .

2. Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe selon les règles suivantes :

- À l'instant  $n = 0$ , le mobile est au point d'abscisse 0.
- Si à l'instant  $n \in \mathbb{N}$ , le mobile est au point d'abscisse  $k$ , alors à l'instant  $n + 1$  il est au point d'abscisse  $k + 1$  avec probabilité  $\frac{k+1}{k+2}$  et au point d'abscisse 0 avec probabilité  $\frac{1}{k+2}$ .

On note  $X_n$  l'abscisse du mobile à l'instant  $n$ .

(a) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `simulX` qui prend en entrée un entier naturel  $n$  non nul et qui simule  $n$  déplacements du mobile et renvoie la valeur de  $X_n$ .

(b) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `attend` qui ne prend pas d'argument en entrée et qui simule les déplacements du mobile jusqu'au premier retour au point d'abscisse 0 et renvoie le plus petit  $n$  strictement positif pour lequel  $X_n = 0$ .