Feuille_Oraux_1 – G2E et Agro-Véto

Exercices motivés par le rapport de jury G2E 2025 (épreuve orale de mathématiques)

I. Déroulement de l'épreuve orale de G2E

1.1 Format G2E

L'épreuve orale de mathématiques dure **40 minutes** : **20 minutes de préparation**, suivies de **20 minutes d'exposé** devant l'examinateur. Le sujet comporte toujours **deux exercices obligatoires**, dont l'un porte systématiquement sur les **probabilités**. Le candidat peut choisir par lequel commencer, mais les deux sont **obligatoires**. L'oral Agro-Véto obéit à des règles très différentes, mais les conseils suivants s'adaptent très bien aux deux concours.

1.2 Conseils de gestion du temps

- Répartir **équitablement** le temps de préparation entre les deux exercices plutôt que de s'acharner sur le premier.
- Lire l'intégralité de l'énoncé avant de commencer : une question ultérieure révèle souvent la méthode demandée dès le début.
- Commencer votre oral dès que possible — chaque minute compte.

1.3 Ce que le jury attend explicitement

- **Connaître son cours avec précision**
- **Justifier chaque étape**
- **Critiquer ses résultats**

II. Exercices

> *"La notion de système complet d'événements semble inconnue par de nombreux candidats et donc aussi la formule des probabilités totales. C'est pourtant une notion absolument fondamentale en probabilités discrètes."*

Ex 1 :

1) Donner la définition d'un **système quasi-complet d'événements** $(A_i)_{i\in I}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2) Énoncer la **formule des probabilités totales** avec les hypothèses exactes.

3) Énoncer la **formule de Bayes**.

Ex 2 : Une urne contient r boules rouges et b boules bleues ($r, b \geqslant 1$). On tire des boules **avec remise** jusqu'à obtenir deux boules de la même couleur. On note N le nombre total de tirages effectués.

1) Déterminer $N(\Omega)$.

2) Calculer $\mathbb{P}(N = 2)$ et $\mathbb{P}(N = 3)$.

3) Calculer $\mathbb{P}(N = n)$ pour tout $n \geqslant 2$. *(Décomposer selon la couleur du premier tirage ; vérifier que l'on utilise bien un SCE.)*

4) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1$, puis calculer $\mathbb{E}(N)$ en justifiant la convergence.

Thème 2 V.a. discrète : loi, espérance, formule de transfert

> *"Lors de la recherche de la loi d'une variable aléatoire X, on attend que les candidats définissent $X(\Omega)$ avant de commencer tout calcul. Ceci permet d'éviter des confusions très nombreuses entre variables discrètes et variables à densité."*

Ex 3 : Soient X et Y deux v.a. **indépendantes**, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$, avec $p, q \in (0,1)$.

1) Déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, $(X+Y)(\Omega)$, $(XY)(\Omega)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(XY = 1)$, puis établir la loi de XY.
3) Calculer $\mathbb{P}(X + Y = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Sous quelle condition a-t-on $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2, p)$?
4) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. **Erreur signalée :** beaucoup écrivent $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = Y = k)$.

Ex 4 : Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1) Déterminer $(X+Y)(\Omega)$, puis calculer $\mathbb{P}(X+Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant l'indépendance. *(Ne pas utiliser le produit de convolution des v.a. à densité : c'est une erreur fréquente signalée.)*
2) En déduire la loi de $X + Y$.
3) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ à l'aide de la **formule de transfert**. Justifier la convergence de la série.

Thème 3 Variable aléatoire à densité

> *"Pour montrer qu'une fonction f est une densité, on doit montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1. Il est recommandé de vérifier si la densité proposée a des propriétés de parité. Trop peu de candidats ont mentionné la convergence absolue dans le calcul de l'espérance."*

Ex 5 : Pour $k > 0$, on considère $f_k(x) = \dfrac{k}{2}\, e^{-k|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer rigoureusement que f_k est une densité de probabilité. Écrire la décomposition en deux intégrales semi-convergentes et exploiter la parité.
2) Soit X une v.a. de densité f_k. Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, puis calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Calculer $\mathbb{E}(X^2)$, puis $\mathrm{Var}(X)$.
4) Calculer la fonction de répartition F_k. En déduire F_k' et préciser en quel sens cette dérivée existe et coïncide avec f_k. *(Éviter « on dérive» : citer le théorème utilisé.)*

Ex 6 : Densité gaussienne — formule à connaître exactement.

1) Écrire la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *(Erreur signalée : cette expression est souvent fausse.)*
2) On admet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Vérifier que la densité de $\mathcal{N}(0, 1)$ est bien une densité.
3) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ par le changement de variable $t = (x - \mu)/\sigma$.

Thème 4 Intégrales généralisées et intégration par parties

> *"L'intégration par parties est maintenant devenue une difficulté pour beaucoup de candidats. Les candidats confondent aussi linéarité de l'intégrale avec la relation de Chasles. La plupart des élèves manipulent les intégrales convergentes sans précaution (par exemple lors d'intégrations par parties)."*

Ex 7 : Énoncer le théorème d'**intégration par parties** pour les intégrales sur un segment $[a, b]$ (hypothèses exactes de classe $\mathcal{C}^1$), puis pour les intégrales généralisées. Distinguer linéarité et relation de Chasles.

Ex 8 : Étudier la convergence de $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, puis calculer J par une intégration par parties.

Thème 5 Primitive et dérivée d'une intégrale à borne variable

> *"Les propriétés de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sont totalement ignorées des candidats. Le mot « primitive» n'est plus jamais employé. On entend encore « continu donc dérivable»."*

Ex 9 :

1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Définir une **primitive** de f sur I. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Citer le théorème exact invoqué.
2) Expliquer pourquoi « f continue implique f dérivable» est **faux** en général.
3) Préciser si les fonctions suivantes sont dérivables, et calculer leur dérivée si oui :

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad H(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Thème 6 Valeurs propres, diagonalisation, théorème spectral

> *"On a toujours du mal à obtenir la définition de valeur propre ou de vecteur propre. Plusieurs candidats affirment sans plus de précision que les matrices symétriques sont diagonalisables. On trouve une erreur qui revient très souvent : « A triangulaire supérieure donc elle est diagonalisable.» Le lien entre « 0 est valeur propre de f» et la non-inversibilité de f est souvent ignoré."*

Ex 10 :

1) Définir **valeur propre**, **vecteur propre** et **sous-espace propre** d'un endomorphisme f de E.
2) Donner la définition de « f diagonalisable».
3) Énoncer la CNS de diagonalisabilité en termes de dimensions des SEP.
4) Énoncer le **théorème spectral** pour les matrices symétriques réelles. *Préciser ce qu'il dit de plus que la simple diagonalisabilité.*
5) Construire un exemple explicite de matrice triangulaire **non diagonalisable**.

Ex 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $\mathrm{Sp}(A)$ et justifier que A n'est pas diagonalisable.

Ex 12 : Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la somme des coefficients de chaque ligne de M est constante. En déduire immédiatement une valeur propre et un vecteur propre associé. *(Le jury signale que ce raisonnement élémentaire est rarement justifié correctement.)*

2) Justifier que M est diagonalisable à l'aide du théorème spectral.

3) Trouver une base orthonormée de vecteurs propres de M.

Thème 7 Suites géométriques et séries

> *"La formule de la somme des termes d'une suite géométrique est souvent fausse et les conditions de validité sont presque toujours mauvaises. Il y a aussi confusion entre la somme de la série et sa somme partielle."*

Ex 13 :

1) Calculer $\sum_{k=0}^{n} q^k$ en distinguant $q = 1$ et $q \neq 1$.

2) Pour quelles valeurs de q la série $\sum_{k \geqslant 0} q^k$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa somme ?

3) Qu'est-ce que la **somme partielle** d'ordre n d'une série ?

Ex 14 : Calculer les expressions suivantes en détaillant les conditions de validité.

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k$ pour $x \neq 1$.

2) $T = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Justifier la convergence et donner la valeur exacte.

Thème 8 Indépendance et incompatibilité

> *"Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité."*

Ex 15 : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Rappeler les définitions de « A et B incompatibles» et de « A et B indépendants».

2) Montrer que si $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ et $A \cap B = \emptyset$, alors A et B ne sont **pas** indépendants.

3) Donner un exemple d'événements indépendants mais non incompatibles.

4) Donner un exemple d'événements ni indépendants, ni incompatibles.

Ces exercices couvrent des lacunes les plus fréquemment signalées par le jury G2E 2025.
Le même diagnostic s'applique à l'oral Agro-Véto : programme identique, mêmes exigences de rigueur.