

## Correction – Feuille\_Oraux\_2 (Agro/Véto 2025)

(Questions de cours et informatique non traitées)

## -----EXEMPLE 1-----

## Exercice préparé

1.a) Ensemble de définition :  $f$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ .
$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(2+x)^2} < 0 \text{ sur tout } D : f \text{ est strictement décroissante sur chacun des trois intervalles } ]-\infty, -2[, ]-2, -1[ \text{ et } ]-1, +\infty[.$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$	$0^+$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $0^+$	

On applique théorème de la bijection sur les trois intervalles.

L'équation  $f(x) = 1$  admet exactement 2 solutions.

$$1.b) f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} = 1 \Leftrightarrow (2+x) + 2(1+x) = (1+x)(2+x) \Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ et } x = \sqrt{2}.$$

3.a) La fonction est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles.

$x$	$-\infty$	$-n$	$-n+1$	$\dots$	$-2$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$	$0^+$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $0^+$	

 $(\mathcal{E}_n)$  admet une unique solution dans chacun des intervalles  $]-1, +\infty[$  et  $]-k, -(k-1)[$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .  
Cela donne  $1 + (n-1) = n$  solutions distinctes en tout.
3.b)  $A_n$  est une matrice  $n \times n$  et  $A_n$  admet  $n$  valeurs propres distinctes donc $A_n$  est diagonalisable.

$$4.a) \text{ Pour } t \in ]-2, -1[, f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{n+1}{n+1+t}.$$

de plus  $n+1+t > n-1 > 0$  (car  $n \geq 2$ ), donc  $\frac{n+1}{n+1+t} > 0$ , d'où  $f_{n+1}(t) > f_n(t)$ .On en déduit que  $\lambda_n \in ]-2, -1[$  et ainsi  $f_{n+1}(\lambda_n) > f_n(\lambda_n) = 1$  d'où  $f_{n+1}(\lambda_n) > f_{n+1}(\lambda_{n+1})$  et comme  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $]-2, -1[$  $(\lambda_n)$  est (strictement) croissante.

4.b)  $(\lambda_n)$  est croissante et majorée par  $-1$  donc *théorème de convergence monotone* :

$$\boxed{(\lambda_n) \text{ converge vers un réel } \ell \in ]-2, -1]}$$

Si  $\ell \in ]-2, -1[$ , sachant que  $-2 < \lambda_n \leq \ell < -1$  et que  $f_n$  est décroissante sur  $] -2, -1[$  :  $\boxed{f_n(\lambda_n) \geq f_n(\ell)}$ .

4.c) La question précédente donne  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(\lambda) \leq 1$ ,

$$\text{or } \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} \geq \frac{n}{1+\lambda}. \quad (\text{En effet : pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \frac{k}{k+\lambda} \geq \frac{1}{1+\lambda})$$

Ce qui entraîne par minoration que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) = +\infty$  ce qui est impossible car  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(\lambda) \leq 1$ .

$$\boxed{\ell = -1.}$$

$$4.d) \quad 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geq \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} \text{ pour } k \geq 1.$$

En sommant de  $k = 1$  à  $n$  :

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(Théorème des gendarmes)

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow 0.}$$

$$4.e) \text{ On sait } f_n(\lambda_n) = 1, \text{ donc } \frac{1}{1+\lambda_n} + \frac{2}{2+\lambda_n} + \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} = 1 \text{ puis } \frac{1}{1+\lambda_n} = \frac{\lambda_n}{2+\lambda_n} - \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$$

$$\text{Comme } -2 \leq \lambda_n \leq -1 \text{ on montre que : } \sum_{k=3}^n \frac{k}{k-1} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k-2}$$

$$\text{avec un changement d'indice : } \sum_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

En appliquant le résultat de 4)d) on en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{1+\lambda_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n, \quad \text{et. } 1+\lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{n}.}$$

5. Sur  $(A - \lambda I_n)X = 0$  en faisant les opérations élémentaires  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$  il vient :

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ (\lambda + 1)x_1 - (\lambda + 2)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda + 1)x_1 - (\lambda + n)x_n = 0 \end{cases}$$

Si  $\lambda = -1$  la seule solution est  $(0, \dots, 0)$  donc  $-1$  n'est pas valeur propre et on continue avec  $\lambda \neq -1$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{\lambda + 1}{\lambda + n} x_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (f_n(\lambda) - 1)x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{\lambda + 1}{\lambda + n} x_1 \end{array} \right.$$

Les valeurs propres de  $A_n$  sont exactement les solutions de  $(E_n)$ .

## -----EXEMPLE 3-----

**Exercice préparé**

1.a)  $D$  diagonale donc :  $(DX)_i = d_i x_i$ , donc  $X^\top DX = \sum_{i=1}^n x_i (DX)_i = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$

$$X^\top DX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

1.b)

( $\Rightarrow$ ) Si tous les  $d_i > 0$  et  $X \neq 0$ , alors **au moins un  $x_i \neq 0$** , donc  $X^\top DX = \sum d_i x_i^2 > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $X^\top DX > 0$  pour tout  $X \neq 0$  : en prenant  $X = e_i$  (vecteur de base canonique),  $e_i^\top D e_i = d_i > 0$ .

tous les  $d_i > 0$  si, et seulement si,  $X^\top DX > 0$  pour tout  $X \neq 0$ .

3.a)  $AU_1 = 4U_1$ ,  $U_1$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 4.

3.b)  $AX = X \iff x + y + z = 0$  donc 1 est valeur propre et  $E_1(A)$  est de dimension 2.

On remarque que  $U_2$  et  $U_3$  forment une base orthonormale de  $E_1(A)$

De plus  $(U_2, U_3)$  est une famille orthonormale :

3.c) En posant  $P = (U_1|U_2|U_3)$  (famille orthonormale :  $P^\top P = I$ ) et  $\Delta = \text{diag}(4, 1, 1)$ , on a :  $A = P\Delta P^\top$ .

En posant  $D = \text{diag}(2, 1, 1)$  et alors :

$$A = PD^2P^\top \text{ avec } P = (U_1|U_2|U_3), D = \text{diag}(2, 1, 1), P^\top P = I.$$

3.d) En posant  $L = PDP^\top$  (qui est inversible car  $D_0$  est inversible et  $P$  orthogonale) :

$$LL^\top = (PDP^\top)(PD^\top P^\top) = PD(P^\top P)DP^\top = PD^2P^\top = A.$$

(On utilise  $D_0 = D_0^\top$  car  $D_0$  est diagonale.)

$$L = PD_0P^\top \text{ est inversible et } A = LL^\top.$$

4.a)  $C = L^{-1}B(L^{-1})^\top$ . Vérifions la symétrie :

$$C^\top = ((L^{-1})^\top)^\top B^\top (L^{-1})^\top = L^{-1}B(L^{-1})^\top = C.$$

$C$  est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, il existe  $Q$  orthogonale et  $\Delta$  diagonale telles que  $C = Q\Delta Q^\top$ .

Donc  $L^{-1}B(L^{-1})^\top = Q\Delta Q^\top$ , soit  $B = LQ\Delta(LQ)^\top$ .

$$B = LQ\Delta(LQ)^\top \text{ avec } Q \text{ orthogonale et } \Delta \text{ diagonale.}$$

4.b)  $R = LQ$ ,  $B = R\Delta R^\top$ . Calculons  $RR^\top$  :

$$RR^\top = LQ(LQ)^\top = LQQ^\top L^\top = LL^\top = A.$$

$$RR^\top = A.$$