# Feuille_Oraux_3 — Agro/Véto – Exemples 2, 4 et 5 (jury 2025)

**Organisation de la séance.**

- Préparez **un, deux ou trois exemples** pour jeudi, en utilisant toutes les sources à votre disposition. *(Profitez-en pour revoir le cours en lien avec ces exercices)*
- Des élèves **passeront au tableau** pour s'entraîner à la présentation orale : soignez l'expression, la rigueur et la clarté de votre démarche.
- Un **transfert de documents** est ouvert sur Cahier de Prépa : vous pouvez y déposer votre travail sur les **questions d'informatique** avant la séance.

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

# Exemple 2

## Question de cours *2 min*

Donner la définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice inversible.

## Exercice préparé *28 min*

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in ]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité $q$ de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit *positif* si la propriété est présente, *négatif* si elle ne l'est pas.

1. Dans cette question, on étudie le **protocole A**, qui consiste à mélanger le sang des $n$ personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des $n$ personnes. On note $A_n$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour $n$ personnes.

   **(a)** Déterminer $A_n(\Omega)$. $A_n$ admet-elle une espérance ?

   **(b)** Déterminer la loi de $A_n$.

   **(c)** Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste $L$ de $n$ booléens et renvoie la valeur de $A_n$, en considérant qu'un `True` en $k^e$ position signifie que la $k^e$ personne possède la propriété recherchée, un `False` qu'elle ne la possède pas.

   **(d)** Utiliser la fonction en langage Python de la question précédente pour estimer numériquement $\mathbb{E}(A_{10})$ avec $q = 0{,}9$.

   **(e)** Prouver que $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.

   **(f)** On considère un entier naturel $k$ tel que $1 \leqslant k < n$. Calculer la probabilité que les $k$ premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

2. Dans cette question, on étudie le **protocole B**, qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des $n$ personnes. On pourra noter $B_n$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole B pour $n$ personnes.

   **(a)** À quelle condition sur $q$ fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B ? On exprimera le résultat en fonction de $n$.

   **(b)** Étudier les variations et calculer la limite à droite, en 0, de $x \mapsto x^x$.

   **(c)** Justifier que, pour $n$ assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).

3. Dans cette question, on étudie un procédé par regroupements : on mélange le sang des $n$ premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les $n$ personnes suivantes.

   Dès lors qu'un groupe de $n$ personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les $n$ personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note $G$ la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc. On considère $k$ un entier strictement positif.

   **(a)** Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.

   **(b)** En déduire la loi de $G$.

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

# Exemple 4

## Question de cours *2 min*

Énoncer le lemme des coalitions.

## Exercice préparé *28 min*

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :

$$(H) \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad (E) \quad y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}.$$

   **(a)** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(H)$.

   **(b)** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$.
   *On pourra chercher une solution particulière $y_0$ de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$ sous la forme $y_0 : x \mapsto ce^{2x}$, où $c$ est un réel à déterminer.*

2. Pour tout réel $x$, on note $C(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(t)\,dt$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t}\sin(t)\,dt$.

   **(a)** Montrer que, pour tout réel $x$,

$$C(x) = \frac{e^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x) \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{e^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x).$$

(b) En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x}\cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto e^{2x}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel $x$ et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(t)\,dt$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0\,;\,x]$ doit être découpé en `nb_pas` intervalles de même longueur.

Dans toute la suite, on note $E$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les quatre fonctions suivantes de $E$ :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x}\cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x}\sin(x).$$

On note $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $F$.

5. On note $u$ l'application définie sur $F$ par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.

   **(a)** Montrer que $u$ est linéaire.

   **(b)** Calculer l'image par $u$ de $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$.

   **(c)** En déduire que $u$ est un endomorphisme de $F$, et déterminer la matrice représentative $A$ de l'endomorphisme $u$ dans la base $\mathcal{B}$.

6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

7. Résoudre l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)\,X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

# Exemple 5

## Question de cours *2 min*

Donner la définition de $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$, où pour tout entier naturel $n$, $A_n$ est un ensemble.

## Exercice préparé *28 min*

1. Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x).$$

(a) Représenter en Python sur un même graphe les fonctions $f$ et $g$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

(b) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $g'(x)$ pour tout réel $x$.

(d) La fonction $g$ est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ?

2. Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction $f$ définie à la question 1 :

$$F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f).$$

Prouver que la famille $(f_0, f_1, f)$ est une base de $F$.

3. Pour toute fonction $\varphi$ de $F$, on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.

(a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.

(b) Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.

(c) En déduire que $\Phi$ est un endomorphisme de $F$ et préciser sa matrice $M$ dans la base $(f_0, f_1, f)$ de $F$.

(d) L'endomorphisme $\Phi$ est-il bijectif de $F$ vers $F$ ? Si oui, préciser la matrice de $\Phi^{-1}$ dans la base $(f_0, f_1, f)$.

(e) L'endomorphisme $\Phi$ est-il diagonalisable ?