

Feuille Oraux_4 : Une nouvelle série d'exercices

Sujet 1

Question de cours : Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

Pour tout $n \geq 1$.

On considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(K_n)_{j+1,j} = -n - 1 + j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de K_1 . Cette matrice est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? Sur \mathbb{C} ?
2. Écrire une fonction `K` en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n .
3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer?
4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{C} et V_n le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathcal{B}_n = (f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$$

On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$

- (a) Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Montrer que

$$\lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \dots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.$$

- (b) En déduire que la famille \mathcal{B}_n est une base de V_n et donner la dimension de V_n .
 (c) Montrer que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base \mathcal{B}_n .
 (d) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on note g_k la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n - 2k)x)$$

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k$.

- (e) En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k appartient à V_n .

Indication : On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j \right) \left(\sum_{l=0}^k b_l \right) = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k a_j b_l$.

- (f) En déduire les valeurs propres de φ_n , puis celles de K_n .
 (g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
 (h) Déterminer pour quelle valeur de n , la matrice K_n est inversible.
 (i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

Sujet 2

Question de cours : Donner de la définition de la dérivée d'une fonction f en un point a .

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g , alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une densité $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Soient λ, μ deux réels strictement positifs.

(a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ et $-\frac{1}{\mu} \ln(V)$.

(b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ . Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(d) Déterminer la loi de $-Y$.

(e) Montrer qu'une densité de $X - Y$ est la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

(f) Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leq Y]$.

2. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :

- X_1, X_3, X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 ;
- X_2, X_4, X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2 .

Si $i \geq 2$, on dit que l'événement « X_i est un creux » est réalisé si $[X_i \leq X_{i-1}]$ et $[X_i \leq X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.

(a) À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux » et « X_3 est un creux ».

(b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.

3. (a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux » ?

(b) Les événements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont-ils indépendants ?

(c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \dots, X_{40}$.

Couplage G2E

(Rappel : 20 minutes de passage et vous devez traiter les exercices, l'ordre est au choix.)

Exercice 1.

On note pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^1 e^{-(xu)^2} du$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\forall x \neq 0 \quad F(x) = xG(x)$.

2. Montrer que G est continue sur \mathbb{R} .

3. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}^* et que $\forall x \neq 0, \quad G'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}$, où $f(x) = e^{-x^2}$.

4. En déduire les variations de G .

Exercice 2.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad X_k(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } P(X_k = 1) = p, \text{ où } p \in]0, 1[.$$

On note, pour n entier naturel non nul, $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$ ainsi que $p_n = P(Y_n = 1)$

1. Donner la loi de Y_2 et la loi de Y_3 .

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$.

3. En déduire p_n en fonction de n .