

Correction de la feuille Oraux 3

Exemple 2

Question de cours

une matrice carrée

A est inversible signifie que :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n$

l'inverse de A

on note alors $B = A^{-1}$.

car cette matrice B est unique

Exercice préparé

1. (a) A_n peut prendre deux valeurs : 1 si le mélange est négatif et $n + 1$ sinon.

Description du protocole A

comme $A_n(\Omega)$ est fini

$A_n(\Omega) = \{1; n + 1\}$ et on a A_n admet une espérance.

- (b) ($A_n = 1$) : "Les n individus sont négatifs" et cette expérience est constitué de n épreuves de Bernoulli indépendantes donc $P(A_n = 1) = q^n$,
Sachant que $A_n(\Omega) = \{1; n + 1\}$ on obtient la loi de A_n :

$$P(A_n = 1) = q^n \text{ et } P(A_n = n + 1) = 1 - q^n$$

- (c) cette fonction a été faite (et bien faite) en direct par Aïcha.

```
def A_(L):
    for t in L:          # on parcourt L en valeurs
        if t:           # si t vaut True
            return n+1
    return 1
```

- (d) Le programme n'a pas été fait pendant l'oral.

```
n = 10
N = 10000
c = 0
for k in range(N):
    L = [ rd.random() < 0.1 for k in range(n) ]
    c += A_(L)
print(c/N)

print(n+1 -n*0.9**n)
```

(e) Connaissant la loi de A_n on a : $\mathbb{E}(A_n) = 1 \times q^n + (n + 1) \times (1 - q^n)$ $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.

(f) On note S_i : "la i ème personne est positive"

On veut ici $P_A(B)$ avec $A = \bigcup_{i=1}^n S_i$ et $B = \bigcap_{i=1}^k \overline{S_i}$

D'une part $P(A) = 1 - q^n$,

d'autre part $P(B \cap A) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{S_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=k+1}^n S_i\right)\right) = q^k(1 - q^{n-k})$

ce qui donne $P_A(B) = \frac{q^k - q^n}{1 - q^n}$

2. **Remarque** : le protocole B est très simple (trop) et B_n est la variable certaine égale à n .

(a) On cherche n tels que $E(A_n) < E(B_n)$ ce qui équivaut à $n + 1 - nq^n < n \iff q^n > \frac{1}{n}$

$$E(A_n) < E(B_n) \iff q > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(b) Avec de l'aide Aïcha avait finalement obtenu le tableau de variations de $f : x \mapsto x^x$.

| | | | |
|---------|---|---------------|-----------|
| x | 0 | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | + |
| f | 1 | $e^{-1/e}$ | $+\infty$ |

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$$f'(x) = (1 + \ln(x))x^x$$

Pour la limite en 0, on a utilisé la croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

(c) On remarque que : $E(A_n) < E(B_n) \iff q > f\left(\frac{1}{n}\right)$

Or l'étude de f nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

donc pour n assez grand, $q \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ et ainsi Le protocole B est préférable (en moyenne).

3. (a) La probabilité qu'un groupe de n personnes est négatif est égale à q^n et $(G > k)$ est l'événement : " les k premiers groupes sont négatifs" il vient (indépendance)

$$P(G > k) = q^{nk}$$

(b) (Je ne fais pas comme au tableau, je trouve plus simple ce que je fais ici)

Cette expérience est la succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (succès : le groupe est positif de paramètre $1 - q^n$)

G est le rang du premier succès donc G suit la géométrique de paramètre $1 - q^n$

Exemple 4

Question de cours

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient $p, q \geq 1$ deux entiers vérifiant $p + q = n$, et soient f, g deux fonctions. Alors les variables aléatoires

$$Y = f(X_1, \dots, X_p) \quad \text{et} \quad Z = g(X_{p+1}, \dots, X_n)$$

sont **indépendantes**.

Exercice préparé

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(H) \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \quad (E) \quad y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}.$$

(a) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 5 = 0$, de discriminant

$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Les racines complexes sont $r = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{2x}(A \cos x + B \sin x), (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(b) D'une part $x \mapsto \frac{5}{2}$ est une solution de $y'' - 4y' + 5y = 2$,

D'autre part $x \mapsto -e^{2x}$ est une solution de $y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$

On a suivi l'indication.

On obtient ainsi (*principe de superposition*)

$$x \mapsto \frac{5}{2} - e^{2x} \text{ est une solution de } y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}$$

$$S_E = \left\{ x \mapsto e^{2x}(A \cos x + B \sin x) + \frac{2}{5} - e^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Pour tout réel x , on note $C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ et $S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt$.

(a) C'est une intégration par parties.

(b) Il suffit de résoudre le système précédent :

$$C(x) = \frac{e^{2x}(2 \cos x + \sin x)}{5} - \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{e^{2x}(2 \sin x - \cos x)}{5} + \frac{1}{5}$$

Théorème fondamental de l'analyse : C et S sont des primitives respectivement de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ et $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$ sur \mathbb{R} .

3. `import math as m`

```
def intC(x, nb_pas):
    dt = (x-0) / nb_pas
    somme = 0
    for k in range(nb_pas):
        t = k * dt
        somme += m.exp(2 * t) * m.cos(t)
    return somme * dt
```

Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x} \sin(x).$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Etant une famille génératrice, il suffit de montrer que la famille est libre

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$,

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{2x} \cos x + \lambda_4 e^{2x} \sin x = 0$.

en passant à la limite $x \rightarrow -\infty$ on a : $\lambda_1 = 0$ et en divisant par e^x il vient

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lambda_2 + \lambda_3 \cos x + \lambda_4 \sin x = 0$.

En prenant $x = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ on obtient le système $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$ et donc $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

La famille \mathcal{B} est donc libre, et c'est bien une base de F .

5. (a) C'est une propriété du cours (*long à démontrer à partir de la définition*) u est linéaire.

(b)

$$\begin{aligned} u(f_1) &= 0 \\ u(f_2) &= 2f_2, \\ u(f_3) &= 2f_3 - f_4, \\ u(f_4) &= f_3 + 2f_4. \end{aligned}$$

(c) D'une part u est linéaire et l'image d'une base de F est une famille de vecteurs de F

donc u est un endomorphisme de F et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. **Question 6 – Résolution de $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**

On cherche $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c + d = 1 \\ -c + 2d = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ 2c + d = 1 \\ d = \frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ 2c + \frac{c}{2} = 1 \\ d = \frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{5} \\ d = \frac{1}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Interprétation. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ revient à trouver $f \in F$ telle que $u(f) = f' = f_3$, c'est-à-dire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos x$.

La solution générale s'écrit $f = af_1 + \frac{2}{5}f_3 + \frac{1}{5}f_4$, soit :

$$f : x \mapsto a + \frac{e^{2x}(2 \cos x + \sin x)}{5}, \quad a \in \mathbb{R},$$

ce qui retrouve bien le résultat de la question **2(b)**.

7. Même raisonnement : on cherche les solutions de (E) qui sont dans F.

Remarque : pour $y \in F$, en notant $X = \text{Coord}_B(y)$

$$\begin{aligned}
 (A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \text{Mat}_B(u^2 - 4u + 5id)\text{Coord}_B(y) = \text{Coord}_B(2f_1 - f_2) \\
 &\iff \text{Coord}_B(y'' - y' + 5y) = \text{Coord}_B(2f_1 - f_2) \\
 &\iff y'' - y' + 5y = 2f_1 - f_2 \\
 &\iff y'(x)' - y'(x) + 5y(x) = 2 - e^{2x} \\
 &\iff y \text{ solution de (E)}
 \end{aligned}$$

Nous n'avons pas eu le courage de calculer $A^2 - 4A + 5I_4$.

Exemple 5

Question de cours

$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est l'ensemble des x vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n$

Exercice préparé

1. (a) La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0 = f(0)$ donc f continue sur \mathbb{R} .
 (b) La fonction g est C^1 sur \mathbb{R}^* (produit de fonctions C^1) et, pour tout $x \neq 0$: $g'(x) = 2x \ln |x| + x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0, g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et on a } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2f(x) + x$$

 Comme f est continue sur \mathbb{R} , g' aussi et g est bien de classe C^1 sur \mathbb{R} .
 (c) $\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{2f(x) + x}{x} = 1 + 2 \ln |x|$ qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.
 La fonction g' n'étant pas dérivable en 0, g n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \mu f(x) = 0$
 En prenant successivement $x = 0, 1, 2$ on montre que $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) = (0, 0, 0)$
 Par conséquent, la famille (f_0, f_1, f) est libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel F .

3. # Version sans numpy

```
def f(x):
    if x == 0:
        return 0
    # Attention à x=0
    return x*log(abs(x))
```

```
def F(a,b,c):
    x = [ -1 + 2*k/100 for k in range(101) ]
    y = [ a + b*t + f(t) for t in x ]
    plt.plot(x,y,'b')
    plt.show()
```

4. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a + bx + cf(x)$

$x = 0$ donne $a = h(0)$, $x = 1 \rightarrow$ $b = h(1) - a$ et $x = 2 \rightarrow$ $c = (h(2) - a - 2b)/f(2)$

```
def f(x):
    # Ici cela ne fonctionne pas avec les fonctions numpy
    if x == 0:
        return 0
    return x*log(abs(x))
```

```
def Question4(h):
```

```

a = h(0)
b = h(1)-a
c = (h(2)-a-2*b)/f(2)
return [a,b,c]

```

5. (a) Soit $\varphi \in F$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu f$. Ainsi, pour tout réel x , $x\varphi(x) = \lambda_0 x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu x f(x) = x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu g(x)$.

Puisque g est dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto x\varphi(x)$ est bien dérivable sur \mathbb{R} .

Soient $(\varphi_1, \varphi_2) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, on a bien :

$$\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \lambda\Phi(\varphi_1)(x) + \Phi(\varphi_2)(x).$$

Ainsi $\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)$ et Φ est bien linéaire.

(b)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f_0)(x) = 1 = f_0(x)$ donc $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1)(x) = 2x = 2f_1(x)$ donc $\Phi(f_1) = 2f_1$

$$\Phi(f)(x) = g'(x) = x + 2f(x) = f_1(x) + 2f(x) \text{ donc } \Phi(f) = f_1 + 2f$$

- (c) On a démontré que Φ est linéaire et, puisque $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f)$ appartiennent à F , par linéarité, pour tout élément φ de F , $\Phi(\varphi)$ appartient également à F donc Φ est bien un endomorphisme de F et

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3))$$

- (d) La matrice M est de rang 3 (*matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont non nuls*) donc M est inversible et Φ est bijective. Par le calcul, on obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (e) M étant triangulaire, on peut lire ses valeurs propres sur sa diagonale donc $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$. Par le calcul, on détermine les sous-espaces propres de M , on obtient :

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 2 donc, d'après la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, M n'est pas diagonalisable. Par conséquent, Φ non plus.