

Correction de la feuille_Oraux_4

Sujet 1 :

1.

$$\det(K_1 - \lambda I_2) = 0 \iff \lambda^2 = -1$$

$$\iff \lambda = \pm i$$

Les valeurs propres de K_1 dans \mathbb{C} sont i et $-i$: $\text{Sp}(K_1) = \{-i, i\}$. K_1 admettant deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} et K_1 étant carrée d'ordre 2, on peut dire que K_1 est diagonalisable sur \mathbb{C} .

En revanche, l'équation $\lambda^2 + 1 = 0$ d'inconnue λ n'admettant aucune solution réelle, K_1 n'admet aucune valeur propre dans \mathbb{R} : K_1 n'est donc pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

$$E_i(K_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-i}(K_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

2. def K(n):

```
Kn = np.zeros([n+1, n+1])
for i in range(n):
    Kn[i, i+1] = i+1
    Kn[i+1, i] = -n-1 + (i+1)
return Kn
```

3. for n in range(1, 11):

```
print("valeurs propres de K" + str(n) + ":")
print(la.eigvals(K(n)), "\n")
```

Les valeurs obtenues permettent de faire la conjecture suivante :

- si n est pair : $\text{Sp}(K_n) = \{-ni, (-n+2)i, \dots, -2i, 0, 2i, 4i, \dots, (n-2)i, ni\}$
- si n est impair : $\text{Sp}(K_n) = \{-ni, (-n+2)i, \dots, -3i, -i, i, 3i, \dots, (n-2)i, ni\}$

Dans les deux cas, le spectre de K_n peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Sp}(K_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

4. (a) Il suffit de diviser par $\cos^n(x) \neq 0$

$$\lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \dots + \lambda_n \tan^n(x) = 0.$$

(b) Il suffit de montrer que la famille \mathcal{B}_n est libre.

En prolongeant le raisonnement précédent on obtient $P(\tan(x)) = 0$ où $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$

P a alors une infinité de racines donc il est nul d'où les coefficients sont nuls et ainsi \mathcal{B}_n est libre.

On en déduit $\dim(V_n) = n+1$

(c) - La linéarité de φ_n résulte de la linéarité de la dérivation :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall (f, g) \in V_n^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

- Reste à prouver que pour tout $f \in V_n, \varphi_n(f) \in V_n$, pour cela il suffit de montrer que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \varphi_n(f_k) \in V_n$,

or $\varphi_n(f_0) = -nf_1 \in V_n, \varphi_n(f_k) = kf_{k-1} - (n-k)f_{k+1} \in V_n$ si $1 \leq k \leq n-1$ et $\varphi_n(f_n) = nf_{n-1} \in V_n$

donc φ_n est un endomorphisme de V_n .

D'après les calculs précédents,

$$\text{Mat}_{B_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & -n+1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice K_n . Ainsi, $\boxed{\text{Mat}_{B_n}(\varphi_n) = K_n}$

(d) Il suffit de remarquer que

$$\exp(i(n-2k)x) = \exp(i(n-k)x) \cdot \exp(-ikx)$$

(e) En utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} i^j \sin^j(x) \cos^{n-k-j}(x) \right) \left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-i)^l \sin^l(x) \cos^{k-l}(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k \binom{n-k}{j} \binom{k}{l} (-1)^l i^{j+l} \cos^{n-j-l}(x) \sin^{j+l}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k \binom{n-k}{j} \binom{k}{l} (-1)^l i^{j+l} f_{j+l}(x) \quad (\text{avec } 0 \leq k+l \leq n) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k appartient à V_n .

(f) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(g_k) = i(n-2k)g_k$ avec $g_k \neq 0$.

Cela prouve que les nombres complexes $i(n-2k)$, avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sont des valeurs propres de l'endomorphisme φ_n .

Ces $n+1$ valeurs propres étant deux à deux distinctes, comme $\dim(V_n) = n+1$, φ_n n'admet pas d'autres valeurs propres. Ainsi

$$\text{Spec}(\varphi_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Comme K_n est la matrice de φ_n dans la base \mathcal{B}_n , elle possède les mêmes valeurs propres. On a ainsi démontré la conjecture de la question 3 :

$$\text{Spec}(K_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

(g) La matrice K_n appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et a $n+1$ valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{K_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$

(h) La matrice K_n est inversible si et seulement si, 0 n'est pas valeur propre, donc

$$\boxed{K_n \text{ est inversible si et seulement si } n \text{ est impair.}}$$

(i) On suppose ici n pair. On note $p = \frac{n}{2}$

On a assez simplement $\ker(\varphi_n) = \text{vect}(1)$. (Les fonctions constantes)

Pour trouver le noyau de K_n cherchons les coordonnées de $g_p = 1$ dans \mathcal{B}_n

$$\begin{aligned} g_p(x) &= (\cos^2(x) + \sin^2(x))^p \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \sin^{2j}(x) \cos^{2p-2j}(x) \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} f_{2j}(x) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } g_p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} f_{2j} + \sum_{j=0}^{p-1} 0 f_{2j+1}.$$

On en déduit que les coordonnées de g_p dans la base (\mathcal{B}_n) sont :

$$\left(\binom{p}{0}, 0, \binom{p}{1}, 0, \binom{p}{2}, 0, \dots, \binom{p}{p-1}, 0, \binom{p}{p} \right)$$

$$\text{Ker}(K_n) = \text{Vect}(X_k) \text{ où } X_k = \left(1, 0, p, 0, \binom{p}{2}, 0, \dots, 0, \binom{p}{2}, 0, p, 0, 1 \right)^T.$$

Sujet 2

1. (a) *Question ultra-classique, quasiment du cours :*

$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ et $Y = -\frac{1}{\mu} \ln(V)$ de paramètre μ

(b)

```
from math import *
import random as rd
def f(lbd, mu):
    X = - log(rd.random())/lbd
    Y = - log(rd.random())/mu
    return min(X, Y)
```

- (c) Z est à valeurs dans $]0; +\infty[$ et pour $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= 1 - P(\min(X, Y) > x) \\ &= 1 - P((X > x) \cap (Y > x)) \\ &= 1 - P(X > x) P(Y > x) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \times e^{-\mu x} \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent des lois exponentielles.} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est la fonction :

$$F_Z : \begin{cases} \forall x < 0 & F_Z(x) = 0 \\ \forall x \in [0; +\infty[, & F_Z(x) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)x} \end{cases}$$

On remarque que $Z = \min(X, Y)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

- (d) Y est à valeurs dans \mathbb{R}^+ donc $-Y$ est à valeurs dans \mathbb{R}^- et pour $x \in \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned} F_{(-Y)}(x) &= P(-Y \leq x) \\ &= P(Y \geq -x) \\ &= 1 - F_Y(-x) \\ &= e^{\mu x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } F_{(-Y)}(x) = \begin{cases} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

$F_{(-Y)}$ est C^0 sur \mathbb{R} tout entier et C^1 sur \mathbb{R} sauf en 0 donc Z est à densité avec :

$$g : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) \mu e^{\mu t}$$

- (e) X et $-Y$ sont indépendantes, X a pour densité $f : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t}$ et $-Y$ a pour densité $g : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) \mu e^{\mu t}$

donc $X - Y$ est à densité, et une de ses densité est donnée par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) \mu e^{\mu(x-t)} dt$$

Ici Alexane a fait un calcul légèrement différent.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mu e^{\mu x} e^{-(\mu+\lambda)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\ &= \lambda \mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\ &= \lambda \mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} \mathbb{1}_{[x, +\infty[}(t) dt && \text{En effet : } x-t \leq 0 \iff x \leq t \\ &= \begin{cases} \lambda \mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} dt & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda \mu e^{\mu x} \int_x^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} dt & \text{si } 0 < x \end{cases} \end{aligned}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda x} & \text{si } 0 < x \end{cases} \text{ est une densité de } X - Y$$

(f)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq Y) &= \mathbb{P}(X - Y \leq 0) \\ &= \int_{-\infty}^0 h(x) dx \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \lim_{r \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\mu} e^{\mu x} \right]_r^0 \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} e^{\mu r} \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

car $\mu > 0$, d'où

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

2. (a) On utilise l'approche fréquentielle par moyenne empirique, ce qui se justifie par la loi faible des grands nombres.

```
N = 10**5 # nombre de réalisations
M_X2creux, M_X3creux = 0, 0 # moyennes empiriques associées aux événements
for k in range(N):
    X1, X3 = -m.log(rd.random()), -m.log(rd.random())
    X2, X4 = -m.log(rd.random())/2, -m.log(rd.random())/2
    if X2 <= X1 and X2 <= X3: # X2 est un creux
        M_X2creux += 1
    if X3 <= X2 and X3 <= X4: # X3 est un creux
        M_X3creux += 1

print('Probabilité que X2 soit un creux :', M_X2creux/N)
print('Probabilité que X3 soit un creux :', M_X3creux/N)
```

On obtient, en exécutant ce script,

Probabilité que X_2 soit un creux : 0.50077

Probabilité que X_3 soit un creux : 0.20037

- (b) L'évènement « X_2 est un creux » est l'évènement $(X_2 \leq X_1, X_2 \leq X_3) = (X_2 \leq \min(X_1, X_3))$. D'après la question 1(c), $\min(X_1, X_3)$ suit la loi exponentielle de paramètre $1 + 1 = 2$ (X_1 et X_3 sont bien indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 1). D'après le lemme des coalitions, puisque X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, X_2 et $\min(X_1, X_3)$ sont indépendantes. La question 1(f) montre alors que

$$\mathbb{P}(X_2 \leq \min(X_1, X_3)) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, « X_2 est un creux » a pour probabilité $\frac{1}{2} = 0,5$. Le même raisonnement montre que « X_3 est un creux » a pour probabilité $\frac{1}{5} = 0,2$.

3. (a) Si X_2 et X_3 sont tous les deux des creux, en particulier $X_2 \leq X_3$ et $X_3 \leq X_2$ d'où $X_2 = X_3$. Autrement dit, on a l'inclusion

$$(\text{« } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont des creux »}) \subset (X_2 = X_3)$$

d'où

$$0 \leq \mathbb{P}(\text{« } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont des creux »}) \leq \mathbb{P}(X_2 = X_3).$$

Or, $\mathbb{P}(X_2 = X_3) = \mathbb{P}(X_2 - X_3 = 0) = 0$ car $X_2 - X_3$ est à densité d'après la question 1(e) (X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi exponentielle). On en déduit donc par encadrement que la probabilité que X_2 et X_3 soient des creux est nulle.

- (b) L'évènement « X_4 est un creux » ne dépend que des variables aléatoires X_3, X_4 et X_5 . L'évènement « X_8 est un creux » ne dépend que des variables aléatoires X_7, X_8 et X_9 . Or, les variables aléatoires X_3, X_4, X_5, X_7, X_8 et X_9 sont mutuellement indépendantes. Le lemme des coalitions assure alors que les évènements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont indépendants.

- (c) Par le même argument qu'à la question précédente, les évènements « X_{4i} est un creux » pour $i \in \{1, \dots, 10\}$ sont mutuellement indépendants et par le même calcul qu'à la question 2(b), chaque évènement « X_{4i} est un creux » pour $i \in \{1, \dots, 10\}$ a la même probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi : la loi du nombre de creux parmi X_4, \dots, X_{40} suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$.

Couplage 1.

Exercice 1.

Remarque (*th.fondamental de l'analyse*) $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ s'annulant en 0.

1. On fait le changement de variable affine $t = xu$ (x étant fixé dans \mathbb{R}^*)

$$G(x) = \int_0^1 e^{-(xu)^2} du = \int_0^x e^{-t^2} \frac{dt}{x} = \frac{F(x)}{x}$$

2. Sur \mathbb{R}^* , G est le quotient de deux fonctions continues sur \mathbb{R}^* donc G est continue sur \mathbb{R}^* .

En 0, $G(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $G(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = 1$ donc G est continue en 0.

3. G est dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables et

$$G'(x) = \frac{x F'(x) - F(x)}{x^2} = \frac{x f(x) - F(x)}{x^2}$$

4. Comme G est paire, on étudie sur $]0; +\infty[$

- Ce que j'ai fait au tableau :

$$x f(x) - F(x) = \int_0^x (f(x) - f(t)) dt$$

Pour $t \in [0, x]$ on a : $f(x) - f(t) \leq 0$ donc $\int_0^x (f(x) - f(t)) dt \leq 0$ et ainsi G est décroissante sur $]0; +\infty[$

En conclusion : G est croissante sur $] - \infty; 0]$ et décroissante sur $]0; +\infty[$

- Mais on peut aussi étudier $h : x \mapsto x f(x) - F(x)$ qui a pour dérivée : $h'(x) = -2x^2 e^{-x^2} \leq 0$

Exercice 2.

1. $Y_2(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $(Y_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1) \cup (X_1 = -1, X_2 = -1)$ donc $P(Y_2 = 1) = p^2 + q^2$

$Y_3(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$(Y_3 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \cup (X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = 1) \cup (X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = -1)$

$\cup (X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = -1)$

donc $P(Y_3 = 1) = p^3 + 3pq^2$

2. on applique la formule des probabilités totales avec le sce : $((Y_n = -1), (Y_n = 1))$

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = 1) &= P(Y_n = 1)P((Y_{n+1} = 1)|(Y_n = 1)) + P(Y_n = -1)P((Y_{n+1} = 1)|(Y_n = -1)) \\ &= P(Y_n = 1)P(X_{n+1} = 1) + P(Y_n = -1)P(X_{n+1} = -1) \\ &= p_n \times p + (1 - p_n)(1 - p) \end{aligned}$$

donc

$$p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$$

3. C'est une suite arithmético-géométrique de point fixe $\frac{1}{2}$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p - 1)^{n-1}}$$