Sujet 1

Question de cours : Enoncer le théorème des accroissements finis.

– –

Exercice préparé :

Sur une période de deux jours une poule pond un œuf avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou deux œufs avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour la modélisation du problème, nous considèrerons qu'une période de temps correspond à 2 jours.

1. Écrire un programme Python `poule(n,p)` qui prend comme argument un entier naturel n un réel $p \in]0,1[$ et qui simule le nombre d'œufs pondus par une poule au bout de n périodes de temps (c'est-à-dire $2n$ jours).
2. On note S_n le nombre de périodes où la poule a pondu 2 fois, au bout de n périodes de temps. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
3. On note X_n le nombre d'œufs pondus par la poule au bout de n périodes de temps. Exprimer X_n en fonction de S_n.
4. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
5. On note Y_n le nombre de périodes de temps nécessaires pour atteindre ou dépasser n œufs et on posera par convention $Y_0 = 0$.
   (a) Écrire un programme Python $\mathrm{Y(n,p)}$ qui simule Y_n.
   (b) Estimer l'espérance de Y_n pour différentes valeurs de n et les représenter graphiquement pour $p = 3/4$. Que peut-on conjecturer ?
   (c) Justifier que $Y_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul k,
   $$\mathbb{P}\left(Y_{n+2} = k\right) = p\,\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = k-1\right) + q\,\mathbb{P}\left(Y_n = k-1\right)$$
   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n
   $$\mathbb{E}\left(Y_{n+2}\right) = p\;\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right) + q\;\mathbb{E}\left(Y_n\right) + 1$$
6. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$,
   $$\mathbb{E}\left(Y_n\right) = \frac{q}{(1+q)^2}\left(1 - (-q)^n\right) + \frac{n}{1+q}$$
7. Un éleveur possède 100 poules Leghorn de un an. On estime pour cette question que chaque poule pond indépendamment des autres et que, sur deux jours, elle pond un œuf avec la probabilité $p = \dfrac{3}{4}$ ou deux œufs avec la probabilité $q = \dfrac{1}{4}$. L'éleveur doit commander des boîtes pour les œufs avec 6 emplacements tous les 64 jours (soit 32 périodes).
   Combien de boîtes l'éleveur doit-il commander au minimum pour être sûr à 98% d'en avoir assez ?

   On admettra que si Φ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, $\Phi(2.06) \simeq 0.98$.

Sujet 2

Question de cours :

On appelle P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

Si $\vec{x}$ est un vecteur de E, quelle relation lie $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\vec{x})$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\vec{x})$?

– –

Exercice préparé :

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors $X+Y$ est une variable à densité, dont la densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy.$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $x^2 - y > 0$.

   Indication : on pourra commencer par étudier le nombre de valeurs propres de la matrice A dans le cas où elle est diagonalisable.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

   On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y.

   (a) Ecrire une fonction informatique qui calcule une valeur approchée de $P\left(X^2 - Y > 0\right)$.

   On rappelle qu'en Python la fonction random() de la bibliothèque random renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

   (b) Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.

   (c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Sujet 3

Question de cours :

Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

– –

Exercice préparé :

Pour tout $n \geqslant 1$.
On considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $(K_n)_{j+1,j} = -n-1+j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Écrire une fonction `K` en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.
3. Utiliser la fonction précédente et la fonction eigvals du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1,10]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = (f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$

   On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$

   (a) Soient $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2,\pi/2[$.
   Montrer que
   $$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1\tan(x) + \cdots + \lambda_n\tan(x)^n = 0.$$
   (b) En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et donner la dimension de V_n.
   (c) Montrer que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.
   (d) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on note g_k la fonction définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$
   Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos(x)+i\sin(x))^{n-k}(\cos(x)-i\sin(x))^k$.
   (e) En déduire que pour tout $k \in [\![0,n]\!], g_k$ appartient à V_n.
   <u>Indication</u> : On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.
   (f) En déduire les valeurs propres de φ_n, puis celles de K_n.
   (g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   (h) Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.
   (i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

– –

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction `gene(n)` qui prend en entrée un entier naturel non nul n et retourne une chaîne de n caractères formée aléatoirement, de façon équiprobable, des caractères 'A', 'C', 'G', 'T'.
2. Écrire une fonction `nbAC(g)` qui prend en entrée une chaîne de caractères formée des caractères 'A', 'C', 'G', 'T' et qui retourne le nombre de fois où la séquence 'AC' est présente.
   Par exemple, `nbAC('GAGCACCCTACTTGGCGCGA')` retournera 2.

Sujet 4

Question de cours :

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire : $f : E \to F$

— —

Exercice préparé :

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

   On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.
2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?
3. (a) Ecrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.
   (b) Ecrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X.
   On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste `L` avec la commande `set(L)` et obtenir le cardinal d'un ensemble `s` avec la commande `len(s)`.
   (c) Ecrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X.
4. Calculer :
   (a) $P(X = 1)$
   (b) $P(X = n)$
   (c) $P(X = 2)$
   (d) $P(X = n - 1)$
5. Pour i entre 1 et n, on note A_i l'événement "le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages" et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).
   (a) Calculer la loi de X_i et son espérance.
   (b) Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. (a) Pour i et j distincts entre 1 et n, calculer la loi de la variable $X_i X_j$.
   (b) Calculer la variance de X.

— —

Exercice non préparé :

On s'intéresse dans cet exercice à des listes d'entiers. L'utilisation de `max` ou de `count` est interdite.

1. Écrire une fonction prenant en argument une liste d'entiers `L` et un entier $k \in \mathbb{N}$. Cette fonction renvoie `True` si tous les entiers de cette liste sont compris entre 0 et k et `False` sinon.
   Par exemple, pour L $= [0, 2, 0]$, la fonction renvoie `True` si $k = 2$ ou $k = 3$ et `False` si $k = 1$.
2. Écrire une fonction de mêmes arguments, où la liste est supposée ne contenir que des entiers compris entre 0 et k. Cette fonction renvoie l'élément le plus fréquent (ou l'un d'entre eux s'il y en a plusieurs).
   Par exemple, pour `L = [0, 4, 0, 1, 4]` et `k = 3`, la fonction renvoie 0 ou 4.

Sujet 5

Question de cours :

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance.

— —

Exercice préparé :

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

   (b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathscr{B}$.

   (c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python. *La commande* ***`inv`*** *du module* ***`linalg`*** *de la bibliothèque* ***`numpy`*** *permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type* ***`matrix`****.*

2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) = 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) = f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) = 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

   (a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.

   On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.

   Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

   (c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.

— —

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction `somme(f, a, b, N)` qui retourne $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)$ où f est une fonction, a et b deux réels ($a < b$), et N un entier supérieur à 1.

2. Écrire une fonction prenant en entrée une fonction `f`, deux réels `a`, `b` qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

   Utiliser cette fonction pour donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$ *à l'aide de l'égalité :*

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} f\left(\frac{t}{1-t}\right)\mathrm{d}t.$$

Sujet 6

Question de cours :

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

– –

Exercice préparé :

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité $f*g$ définie par

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Soient λ, μ deux réels strictement positifs.
   (a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\dfrac{1}{\mu}\ln(V)$.
   (b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (d) Déterminer la loi de $-Y$.
   (e) Montrer qu'une densité de $X-Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x} & \text{si } x>0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\mu x} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   (f) Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leqslant Y]$.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   - X_1, X_3, X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 ;
   - X_2, X_4, X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2 .

   Si $i \geqslant 2$, on dit que l'événement « X_i est un **creux**» est réalisé si $[X_i \leqslant X_{i-1}]$ et $[X_i \leqslant X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.
   (a) À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux» et « X_3 est un creux».
   (b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. (a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux» ?
   (b) Les événements « X_4 est un creux» et « X_8 est un creux»sont-ils indépendants ?
   (c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \ldots, X_{40}$.

– –

Exercice non préparé :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On considère le polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$.

Dans Python, on représente ce polynôme P par la liste de ses coefficients $[a_0,\ldots,a_n]$

1. Écrire une fonction Python `eval` qui prend en argument un polynôme P et un réel a et qui renvoie $P(a)$.
2. Écrire une fonction Python `deriv` qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie P'.
3. On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P)(X) = 2XP(X) - P'(X)$.

   Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie $f(P)$.

Sujet 7

Question de cours :

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

– –

Exercice préparé :

- On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la façon suivante. On effectue 3 tirages **avec remise** dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0 = 1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et $k \in \{0;1;2;3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer, pour tout $j \in \{0;1;2;3\}$: $\mathbf{P}_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right)$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$
4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que tout $k \in \{0;1;2;3\}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} j\mathbf{P}_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right) = k$.
   (b) En déduire que $\mathbf{E}\left[Y_{n+1}\right] = \mathbf{E}\left[Y_n\right]$.
   (c) En déduire l'expression de $\mathbf{E}\left[Y_n\right]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $a_n = \mathbf{P}\left(Y_n=0\right)$, $b_n = \mathbf{P}\left(Y_n=1\right)$ $c_n = \mathbf{P}\left(Y_n=2\right)$, et $d_n = \mathbf{P}\left(Y_n=3\right)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad b_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{2}{3}\left(b_n + c_n\right)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n).
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. À l'aide de la question 4 , montrer que (d_n) converge vers $1/3$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\mathbf{P}(T > n)$.
   (b) En déduire la loi de T et son espérance.

– –

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction `somme_cumul` qui prend en entrée une liste L d'entiers et qui renvoie une liste M des sommes cumulées, c'est à dire une liste M, de même longueur que L, telle que $M[i] = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} L[k]$ pour tout indice i de L.
2. On propose à deux joueurs A et F la résolution d'une suite infinie de problèmes numérotés $0, 1, \ldots, n, \ldots$. Ils débutent la résolution à l'instant 0 du problème numéro 0 . Dès que l'un des joueurs termine la résolution du problème k il passe au problème $k+1$.
   Le numéro d'un problème est attribué au joueur qui le résout en premier. En cas de simultanéité de la résolution d'un problème par les deux joueurs celui-ci n'est pas attribué.
   On souhaite écrire une fonction Python `répartition(duréesA, duréesF)` qui, étant donnés les deux listes des durées de résolution des n premiers problèmes par les deux joueurs, renvoie les listes des numéros des problèmes attribués à A et F pour les n premiers problèmes.
   (a) `répartition([7,1,2,1,2],[4,2,4,3,1])` renvoie (`[3,4], [0,1]`).
   Quel couple renvoie l'exécution de `répartition([3,2,5,1,1,1],[4,2,2,4,4,2])` ?
   (b) Écrire la fonction recherchée.

Sujet 8

Question de cours :

Enoncer l'inégalité de Markov.

— —

Exercice préparé :

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.
On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.
On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.
On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n, simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
   Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = MU_n$.
3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de dégré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de E.
   Soit φ l'application définie sur E par :
   $$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}\left(1 - X^2\right)P'(X).$$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E, justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (b) Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose : $P_k(X) = \dfrac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}$.
   Démontrer que pour $k \in [\![0,3]\!], \varphi(P_k) = \left(1 - \dfrac{2}{3}k\right)P_k$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
4. On pose : $Q = \dfrac{1}{4}\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)$.
   (a) Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on ?
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n P_2$.
   (c) À l'aide des questions précédentes, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 3)$. De quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?
5. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

— —

Exercice non préparé :

Sujet 9

Question de cours :

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Donner son tableau de variation.

– –

Exercice préparé :

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$. On pose $j = -\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2, j^3 et j^4.
2. (a) Soit r et s deux complexes non nuls. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres de M.
   (b) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable lorsque $r = 0$ ou $s = 0$?
3. Écrire une fonction decalage(L) qui renvoie, si $L = [a_1, \ldots, a_n]$, la liste $L_1 = [a_2, \ldots, a_n, a_1]$. Utiliser cette fonction pour écrire une fonction matrice (a1, a2, a3) qui renvoie la matrice A. On pourra par exemple compléter le script suivant :

```
def matrice ( a1 , a2 , a3 ):
    A = ....
    L = ....
    for i in ...
        A. append ( L [:]);
        ...
    return ...
```

4. Si a_1, a_2, a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?
6. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans justifier que la famille (U, X_1, X_2) est libre.
   (a) Calculer AX_1 et AX_2. En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1 = s^2X_2$ et $AX_2 = r^2X_1$.
   (b) Déterminer le spectre de A. On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits question 6 et utiliser la question 2.
7. Préciser dans les cas suivants si la matrice A est diagonalisable.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$

– –

Exercice non préparé :

Sujet 10

Question de cours :

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

– –

Exercice préparé :

Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Écrire une fonction Python `proj` qui prend en argument une matrice carrée M (entrée par exemple sous la forme d'une liste de listes) et qui renvoie un booléen : `True` si $M^2 = M$, `False` sinon.
   Tester cette fonction sur la matrice A.
4. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = E_1$
5. Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ codés sous forme de tableaux `numpy` ou de listes, et retournant leur produit scalaire.
6. (a) Montrer que les deux sous-espaces propres E_0 et E_1 sont orthogonaux, c'est-à-dire que :
   $$\forall u \in E_0, \quad \forall v \in E_1, \quad \langle u, v\rangle = 0.$$
   (b) En déduire que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, on a :
   $$f(x) \in E_1 \quad \text{et} \quad \forall y \in E_1, \quad f(x) - x \text{ orthogonal à } y.$$
   On a donc montré que f était la projection orthogonale sur E_1.
7. Déterminer une base orthonormale de E_1. En déduire la distance du vecteur $t = (1, 2, 1)$ à l'espace E_1.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 11

Question de cours :
À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

– –

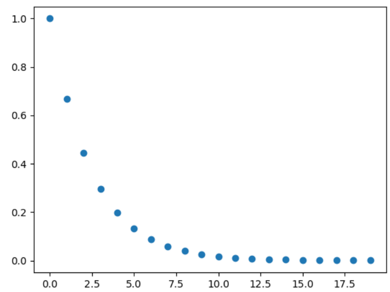
Exercice préparé :
Rappel : algorithme de dichotomie. *On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$. On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$, en un point que l'on note γ.*
On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :
- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et : $\begin{array}{l} \textit{si } f(a_k)f(c_k) \leqslant 0, \textit{ alors } a_{k+1} = a_k \textit{ et } b_{k+1} = c_k \\ \textit{sinon, on pose } a_{k+1} = c_k \textit{ et } b_{k+1} = b_k. \end{array}$
On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers γ, en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k \leqslant \gamma \leqslant b_k \quad \text{ et } \quad \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées de γ à ε-près.

1. On considère pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - \ln x - n$.
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (b) On rappelle et on admet l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \quad (*)$.
   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n \in]0, n^{-\frac{1}{n}}[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.
2. Étude de la suite (v_n).
   La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.
   (a) Justifier en utilisant si besoin $(*)$ que $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.
   (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n pour n allant de 2 à 30. Représenter la suite (v_n) graphiquement.
   On rappelle que la fonction `plot` *des modules* `pylab` *ou* `matplotlib.pyplot` *permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :*

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [ n for n in range (20) ]
Y = [(2/3)**k for k in X ]
plt.plot(X, Y, "o")
plt.show()
```



   (c) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
   (d) On admet le résultat suivant : si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
   On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
   Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.
3. Étude de la suite (u_n)
   (a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8 .
   (b) Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).
   (c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 12

Question de cours :

Rappeler la formule des accroissements finis.

– –

Exercice préparé :

Rappel : la fonction définie ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!](n \in \mathbb{N})$*, loi étant la liste* $[P(X_n=0), P(X_n=1), \ldots, P(X_n=n)]$.

```
from matplotlib.pyplot import *
def graphe(loi):
    lx= [ i for i in range(len(loi)) ]
    bar(lx,1oi)
    ylim (0, 0.5)
    show()
```

Pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmillère ont le choix entre deux trajets disjoints, que nous nommerons A et B. À chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone qui peut éventuellement dépendre de la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin.
Notations : pour chaque $n \geqslant 1, \alpha_n$ (respectivement β_n) désigne la quantité de phéromone présente sur le chemin A (resp. B) après le n-ième trajet. A_n (resp. B_n) désigne l'événement «la n-ième fourmi choisit le trajet A (resp. B)». Nous supposerons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.
On a donc : $P_{[\alpha_n=a]\cap[\beta_n=b]}(A_{n+1}) = \dfrac{a}{a+b}$ et $P_{[\alpha_n=a]\cap[\beta_n=b]}(B_{n+1}) = \dfrac{b}{a+b}$ Enfin, X_n désignera le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A lors des n premiers trajets.
Nous supposerons qu'initialement $\alpha_0=\beta_0=1$ et qu'à chaque trajet une fourmi multiplie par un facteur $r>1$ la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin qu'elle emprunte.

1. Déterminer la loi des variables X_1, X_2 et X_3.
2. Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n et un réel r, simule les déplacements de n fourmis suivant la règle énoncée et renvoie le nombre X_n de fois où le chemin A a été emprunté.
3. (a) Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et un réel r et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilités $[P(X_n=0), P(X_n=1), \ldots, P(X_n=n)]$ obtenues en faisant 1000 simulations de la variable X_n.
   (b) Représenter graphiquement la loi de la variable X lorsque $n=100$ et $r=2$. Commenter.
   (c) Exprimer en fonction de n et de r la probabilité $P(X_n=n)$.
   On ne tentera pas de simplifier l'expression obtenue.
4. On pose : $\forall n \geqslant 1, p_n(r) = \dfrac{r}{r+1} \cdot \dfrac{r^2}{1+r^2} \cdots \dfrac{r^n}{1+r^n}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, q_n(r) = \left(1-\dfrac{1}{r}\right)\left(1-\dfrac{1}{r^3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{r^{2n+1}}\right)$.
   Démontrer que pour tout $r>1$, les suites $(p_n(r))_{n\geqslant 1}$ et $(q_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   On notera $p(r)$ et $q(r)$ leurs limites respectives.
5. En remarquant que $\forall n \geqslant 1, p_n(r) = \dfrac{1}{1+r^{-1}} \cdot \dfrac{1}{1+r^{-2}} \cdots \dfrac{1}{1+r^{-n}}$, montrer que : $p(r) \geqslant \exp\left(-\dfrac{1}{r-1}\right)$.
   On pourra admettre sans le démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x$.
6. Démontrer que $\forall r>1,\ q(r) \leqslant \exp\left(-\dfrac{r}{r^2-1}\right)$
7. On admet que $\forall r>1,\ p(r)=q(r)$. Déduire des questions précédentes un encadrement de la limite de la probabilité $P(X_n=n)$ en fonction de r.

Conclusion : ce modèle vous semble-t-il approprié pour rendre compte du comportement des fourmis dans la réalité ?

– –

Exercice non préparé :

Sujet 13

Question de cours :

Si f est la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x)=\sqrt{1-x}$, déterminer l'expression de sa dérivée f'.

– –

Exercice préparé :

On souhaite estimer un paramètre $p \in]0,1[$. On note : $q=1-p$.
Soit un entier $n \geqslant 1$ fixé. On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé.
On note : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Justifier que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   (b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intervalle $\left[\overline{X}_n - \sqrt{\dfrac{5}{n}}, \overline{X}_n + \sqrt{\dfrac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 .

2. Écrire une fonction Python test (n, p, a, b) qui prend en arguments un entier n, une probabilité p, deux flottants a et b, simule une réalisation de $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}}$ et retourne 1 si $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}}$ appartient à [a,b] et 0 sinon. On cherche par la suite un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 d'amplitude plus petite.

3. On fixe un réel strictement positif t quelconque et ε un réel strictement positif quelconque.

   (a) Établir l'égalité : $P\left(\overline{X_n}-p \geqslant \varepsilon\right) = P\left(e^{nt\overline{X}_n} \geqslant e^{nt(p+\varepsilon)}\right)$.

   (b) En utilisant l'inégalité de Markov, établir l'inégalité suivante : $P\left(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{n\left(\ln\left(pe^t+q\right)-t(p+\varepsilon)\right)}$.

   (c) On admet l'inégalité : $\ln\left(pe^t+q\right) - tp \leqslant \dfrac{t^2}{8}$. Ainsi, on a l'inégalité suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ P\left(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{n\left(\frac{t^2}{8}-t\varepsilon\right)}.$$

   En déduire l'inégalité : $P\left(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.

4. On pose $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-X_k)$. Établir l'inégalité : $P\left(\overline{Y}_n - q \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.

5. Déduire des questions 3(c) et 4 l'inégalité :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

6. Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 ? L'amplitude de l'intervalle de confiance est-elle plus réduite que celle obtenue à la question 1(b) ?

– –

Exercice non préparé :

Sujet 14

Question de cours :

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

– –

Exercice préparé :

Soient $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0,1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1 .
   (b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.
   (c) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geqslant 2$.

2. On note F_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.

3. (a) Montrer que pour tout réel u de $[0,1]$, on a :

$$(1-u)^n \geqslant 1 - nu$$

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_n(x)) = 0$.

4. (a) Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^A (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x - A\,(1 - F_n(A)),$$

   (b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x$$

5. À l'aide du changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$E(Y_n) = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t,$$

   et en déduire finalement que :

$$E(Y_n) = S_n.$$

– –

Exercice non préparé :

Sujet 15

Question de cours :

Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.

— —

Exercice préparé :

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Si X est une variable aléatoire, on notera $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.
Soient $a \in]0,1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité.
2. On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f.
   Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. On considère la variable aléatoire Y donnée par :
   $$Y = \frac{X^2}{2a}.$$
   (a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   (b) On pose $U = 1 - e^{-Y}$ (de sorte que $Y = -\ln(1-U)$). Montrer que U suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
   (c) En déduire une fonction Python Y( ) qui simule la variable Y.
   (d) Écrire une fonction Python X(a) qui prend en entrée un réel $a \in]0,1]$ et qui simule X.
4. (a) Donner une densité, que l'on notera g, d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de variance a.
   (b) À l'aide d'un intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.
   (c) En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
   (d) En déduire que $V(X) = \dfrac{(4-\pi)a}{2}$.
5. On considère désormais que la paramètre $a \in]0,1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X.
   On note :
   $$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$
   (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a. *(Il suffit pour cela de montrer que $E(S_n) = a$)*
   (b) Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $V\left(X^2\right) = 4a^2$.
   (c) Montrer que $V(S_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n à partir de laquelle $]S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}[$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

— —

Exercice non préparé :

Sujet 16

Question de cours :

Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]\,0,+\infty\,[$ l'expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice préparé :

Une compagnie fait passer des entretiens d'embauche à n candidats. On suppose que la compétence de chaque candidat est quantifiée par une variable aléatoire X_i suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, d'autant plus élevée que le candidat est compétent. De plus, on suppose que les variables $(X_1,\ldots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes. À la fin de chaque entretien, la compagnie doit immédiatement donner sa décision : soit elle embauche le candidat, soit elle passe au suivant, sans possibilité de revenir sur ses pas.
La compagnie cherche à élaborer une stratégie qui lui permettrait de maximiser l'espérance de la compétence du candidat qu'elle choisira. Pour ce faire, elle décide de fixer un seuil $s \in [0,1]$. Si, parmi les $n-1$ premiers candidats, aucun ne dépasse le seuil, la compagnie embauchera le dernier candidat. Sinon, elle choisira le premier candidat qui dépasse le seuil.
Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on note A_k l'évènement : « pour tout $i \in [\![1,k-1]\!], X_i < s$, et $X_k \geqslant s$», et B l'évènement : « pour tout $k \in [\![1,n-1]\!], X_k < s$».
On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$, compétence du candidat retenu, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé,} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leqslant k \leqslant n-1). \end{cases}$$

1. (a) Écrire un programme Python qui prend en argument un réel $s \in [0,1]$, un entier naturel non nul n, et retourne une réalisation de $Z_{n,s}$.
   (b) En déduire un programme qui retourne une valeur approchée de la compétence moyenne du candidat recruté via ce protocole.
2. Calculer $E(Z_{n,0})$ et $E(Z_{n,1})$.
3. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $P(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) = s^{n-1}t$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.

4. Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, montrer que :
$$P(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) = \begin{cases} (t-s)s^{k-1} & \text{si } t \geqslant s, \\ 0 & \text{si } t < s. \end{cases}$$
5. En déduire la valeur de la probabilité $P(Z_{n,s} \leqslant t)$ en fonction de $t \in [0,1]$.
6. Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.
7. En déduire que : $E(Z_{n,s}) = \dfrac{1}{2}(1+s-s^n)$.
8. Déterminer le seuil s_n^* qui maximise la compétence moyenne du candidat embauché en fonction de n.
9. À l'aide de la fonction programmée en 1.(b), tracer sur un graphique l'évolution de la valeur de $E[Z_{n,s}]$ en fonction de s pour $n = 5, 10, 50$, et vérifier les conclusions de la question précédente dans ces cas.

Exercice non préparé :

Sujet 17

Question de cours :

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase :

$$\ll f \text{ et } g \text{ sont équivalentes au voisinage de } +\infty \gg ?$$

— —

Exercice préparé :

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x)$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x.

   (c) La fonction g est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1. :

$$F = \text{Vect}\,(f_0, f_1, f)$$

   Prouver que la famille (f_0, f_1, f) est une base de F.

3. *(Question ajoutée)* Ecrire une fonction Python qui pour trois réels a, b et c donnés en paramètre trace la courbe de la fonction $x \longmapsto af_0(x) + bf_1(x) + cf(x)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

4. *(Question ajoutée)* Ecrire une fonction Python qui pour une fonction h de F donnée en paramètre renvoie les coordonnées de h dans la base (f_0, f_1, f).

5. Pour toute fonction φ de F, on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.

   (a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.

   (b) Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0, \quad \Phi(f_1) = 2f_1 \quad$ et calculer $\Phi(f)$.

   (c) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base (f_0, f_1, f) de F.

   (d) L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f)

   (e) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

— —

Exercice non préparé :

Sujet 18

Question de cours :

Donner une primitive et la dérivée de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$ sur $]0;+\infty[$.

— —

Exercice préparé :

On considère les matrices carrées à coefficients réels de la forme :

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $M(a)$.

1. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un réel a et qui renvoie le rang de la matrice $M(a)$ donné par la fonction `numpy.linalg.matrix_rank`
2. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un réel a et qui renvoie les éléments propres de $M(a)$ donnés par la fonction `numpy.linalg.eig`
3. Déterminer le rang de la matrice $M(a)$ selon les valeurs de a.
4. Justifier que 0 et 1 sont des valeurs propres de f_a.
5. Déterminer une base du noyau de f_a selon les valeurs de a.
6. (a) Montrer que $e_1 + e_3$ est un vecteur propre de f_a.
   (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_a selon les valeurs de a.
   (c) f_a est-il diagonalisable ?
7. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$
   (a) On s'intéresse à l'ensemble F des matrices qui commutent avec A :
$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) On considère l'application définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels :
$$g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$Q \longmapsto (Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), Q(\lambda_3))$$
   Montrer que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) Après avoir justifié qu'il existe une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, montrer que :
$$M \in F \iff CD = DC \qquad \text{où} \quad C = P^{-1}MP.$$
   (d) Déterminer les matrices qui commutent avec D. En déduire que $M \in F$ si et seulement s'il existe c_1, c_2, c_3 des réels tels que $M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   (e) À l'aide de la question 5b, conclure que les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices M de la forme $Q(A)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (f) Dans le cas particulier où $A = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, établir qu'une base de F est (I_3, A, A^2).

— —

Exercice non préparé :

Sujet 19

Question de cours :

Caractérisation des variables aléatoires à densité avec leur fonction de répartition.

— —

Exercice préparé :

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geqslant 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \dots, d_n)$.
   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^\top D X = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$.
   (b) En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si, et seulement si, $X^\top D X > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.
   (c) Ecrire une fonction Python qui pour une liste `D` contenant $(d_1, \dots, d_n)$ et `X` une liste contenant $(x_1, \dots, x_n)$ données en paramètres renvoie $\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On considère les vecteurs $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que le vecteur U_1 est un vecteur propre de A.
   (b) Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3).
   (c) Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^\top$ et $P^\top P = I$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice inversible M telle que $A = MM^\top$.
   (e) Vérifier que $C = M^{-1}B(M^{-1})^\top$ est une matrice symétrique. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale(1) Q telles que $B = MQ\Delta(MQ)^\top$. On pose $R = MQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^\top$.
   (f) Calculer $RR^\top$.
3. Ecrire une fonction Python qui pour une matrice M quelconque donnée en paramètre renvoie la matrice $MM^\top$.
4. On conserve les hypothèses et les notations de la question 2.
   On suppose de plus que $X^\top AX > X^\top BX$ pour tout vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Donner une matrice diagonale S dépendant de la matrice Δ telle que $Y^\top SY > 0$ pour tout vecteur non nul Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que les coefficients diagonaux de Δ sont tous strictement inférieurs à 1 .

(1) *La notion de matrice orthogonale est hors du programme de BCPST :*
Une matrice carrée Q est orthogonale signifie que Q est inversible et $Q^{-1} = Q^\top$

— —

Exercice non préparé :

Sujet 20

Question de cours :

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase :

$$\ll f \text{ et } g \text{ sont équivalentes au voisinage de } +\infty \gg ?$$

– –

Exercice préparé :

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.
On tire successivement une boule dans l'urne puis :

- si on tire une boule blanche, on remet la boule blanche dans l'urne ainsi qu'une autre boule blanche
- si on tire une boule noire, on remet la boule noire dans l'urne et le jeu s'arrête.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On note N le nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.
On considère aussi une famille de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, toutes indépendantes de N, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.
Par exemple, si $N = 2$, alors $T = \max(X_1, X_2)$; si $N = 4$, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

1. (a) Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad P(N = k) = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

   (b) La variable N admet-elle une espérance ?

2. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$,

   montrer que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

   (b) Écrire une fonction Python T prenant en argument un réel strictement positif ℓ et qui simule la variable T avec ℓ pour valeur de λ.

   (c) Estimer à l'aide de Python l'espérance de T pour $\lambda = 1$.

3. Soit $x \in [0,1[$

   (a) Montrer que : $\quad$ pour tout $t \in [0,x]$, $\quad \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k + \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.

   (b) En déduire que : $\quad -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} + \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$

   (c) Par encadrement, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{x^k}{k(k-1)}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = \varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$

4. Soient $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $P_{(N=k)}(T \leqslant x)$ puis en déduire que $P(T \leqslant x) = \varphi(F(x))$ où F est la fonction de répartition de X_1.

5. On admet que T est une variable à densité. Montrer qu'une densité de T est donnée par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

6. Justifier que T admet une espérance puis calculer $E(T)$. Est-ce cohérent avec la conjecture effectuée à la question 2.(c) ?

– –

Exercice non préparé :

Sujet 21

Question de cours :

Définition de la distance d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

– –

Exercice préparé :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], f(x) = \dfrac{1}{3}\left(-e^{-x} + \ln\left(1+x^2\right)\right)$.

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, et déterminer f' et f''.
   Donner une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en $A = (a, f(a))$ où $a \in [0,1]$

   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], f'(x) \geqslant \dfrac{e^{-1}}{3}$ et $|f''(x)| \leqslant 1$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ de $]0,1[$ tel que $f(\ell) = 0$.

2. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$. On pose φ la fonction définie sur $[0,1]$ par
   $$\forall x \in [0,1], \varphi(x) = f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) - \frac{1}{2}(a-x)^2\gamma, \quad \text{où } \gamma \text{ est un réel tel que } \varphi(b) = 0.$$

   (a) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et donner φ'.

   (b) Justifier l'existence d'un réel c compris strictement entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$.

   (c) En déduire qu'il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que :
   $$f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f''(c)$$

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de réels définie par $u_0 \in]0,1[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
   On admet que si $u_0 \neq \ell$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$, où ℓ est le réel défini en question 1 (d).

   (a) Écrire une fonction suite en Python, prenant en entrée a et un entier n et renvoyant la liste des valeurs de $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ quand $u_0 = a$. Compiler ce programme pour les valeurs suivantes de a : $0.3, 0.5$ et 0.8 et pour $n = 12$. Que pouvez-vous conjecturer ?

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel z_n compris entre ℓ et u_n tel que :
   $$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n - \ell)^2}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(u_n)}$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.

   (d) Dans les questions suivantes, on suppose que $|u_0 - \ell| \leqslant \dfrac{2}{10}$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   Donner une valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

Sujet 22

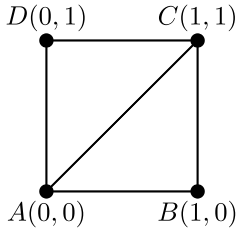
Question de cours :

Pour une application $f : E \to F$ bijective de E vers F, définition de la fonction réciproque f^{-1}.

– –

Exercice préparé :

On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-dessous délimitée par les points $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ et $D(0,1)$.



A l'instant $n = 0$, elle se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.
Par exemple, du point A, la particule peut aller en B, C ou D mais du point D, elle ne peut aller qu'en A ou C (et pas en B).
Pour tout entier naturel n, on note respectivement A_n, B_n, C_n et D_n les événements :

« A l'instant n, la particule se situe en A (resp. en B, en C, en D) ».

On note enfin pour tout entier naturel n : $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. Écrire une fonction Python `positionA(n)` permettant de simuler cette expérience et qui renvoie la fréquence de passage de la particule au point A jusqu'à l'étape n.
   Estimer ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.
3. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = b_n$, démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer b_n en fonction n.
   (b) En déduire l'expression de $a_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de n.
   (c) Montrer que la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n.
   (d) En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.
4. Soient maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n$ et Y_n des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n.
   (a) Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
   (b) X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$.
5. Pour tout entier natuel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$.
   (b) On admet que $M^4 - \dfrac{7}{9}M^2 - \dfrac{2}{9}M = 0$.

   En déduire que chaque valeur propre λ de M vérifie $\lambda^4 - \dfrac{7}{9}\lambda^2 - \dfrac{2}{9}\lambda = 0$
   (c) Justifier que M est diagonalisable puis la diagonaliser.
   (d) Proposer alors une démarche (sans détailler les calculs) pour retrouver le résultat de la question 3.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 23

Question de cours :

Définition des sous-espaces-propres d'un endomorphisme.

– –

Exercice préparé :

Un magasin possède une caisse, toutes les personnes qui sortent du magasin doivent passer par cette caisse y compris si le client n'achète pas d'article. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire réelle égale au nombre d'articles achetés par le k-ième client. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre μ.
On note N le nombre aléatoire de clients qui passent par la caisse au cours de la première heure, N suit une loi de Poisson de paramètre λ et est indépendante des X_k. On souhaite étudier le nombre X d'articles passant par cette caisse durant la première heure.

1. Exprimer X en fonction de N et des X_i.
2. Écrire une fonction Python X qui prend en entrée l pour λ et m pour μ et qui simule la variable aléatoire X. On pourra pour cela utiliser la fonction `poisson` du module `numpy.random`
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $P_{(N=0)}(X = n)$.
4. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $X_1 + \ldots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\mu$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} \mathrm{e}^{-(\lambda+k\mu)}$.
6. Montrer que $E(X) = \lambda\mu$. On admettra l'existence de $E(X)$ et on pourra procéder sans justification à une permutation de deux sommes infinies.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P(X = 0) = \exp\left(\lambda\left(\mathrm{e}^{-\mu} - 1\right)\right) \text{ et } P(X = n) = \frac{\mu^n \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} f_n\left(\lambda \mathrm{e}^{-\mu}\right)$$
où $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$. On pose aussi $f_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
8. Exprimer f_0 et f_1 à l'aide des fonctions usuelles.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_{n+1}(x) = x + \sum_{i=0}^{n} x \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f_i(x)$$
Indication : On pourra utiliser le changement de variable $l = k - 1$.
10. En déduire une expression de la fonction f_2.
11. Écrire une fonction f qui prend en entrée un entier n et un réel x et qui renvoie la valeur $f_n(x)$. On pourra utiliser la fonction `binom` du module `scipy.special`.
12. Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui prend en entrée deux réels λ et μ et un entier n et qui renvoie $\mathbb{P}(X = n)$. On pourra utiliser la fonction `factorial` du module `scipy.special`.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 24

Question de cours :

Donner la densité continue de la loi normale centrée réduite.

– –

Exercice préparé :

Rappel : Algorithme de dichotomie.
Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a,b]$ en un réel α. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :
  - ◇ si $f(a_k) f(c_k) < 0$ alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  - ◇ sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes deux vers α.

– –

On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation

$$(E_n) : \ln(x) + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par l'expression

$$f(x) = \ln(x) + x$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n.
   (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes x_n pour n allant de 1 à 10 , et les représenter graphiquement les points de coordonnées (n, x_n).
   (c) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on pourra comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$).*
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(x) < x$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$. En déduire un équivalent de x_n.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n)$.
4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$
   (a) Exprimer $u_n - 1$ en fonction de x_n et n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) En déduire que $1 - u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
   (c) En déduire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 25

Question de cours :

Donner deux conditions suffisantes et non nécéssaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Exercice préparé :

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.
Soit n un entier non nul fixé.
On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose X_i le nombre de lancers du i-ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Quelle est la loi de X_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$?
   Rappeler son espérance et sa variance.
2. Calculer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $P(X_i > j)$.
3. On note $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   Calculer $P(Y > j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
   En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.
4. Écrire une fonction Python `NbMin(L)` prenant en argument une liste `L`, et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.
5. En déduire une fonction Python `N(n, p)` qui, prenant en argument la valeur de `n` et de `p`, simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N.
6. Calculer $P(N = n)$.
7. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}.$$
8. En déduire l'espérance de N et la variance de N.
9. Vérifier la valeur de $E(N)$ à l'aide d'estimations construites grâce à de la fonction N de la question 5 .

Exercice non préparé :

Sujet 26

Question de cours :

Enoncer la formule des probabilités totales *(version dénombrable)*.

– –

Exercice préparé :

On pourra utiliser pour les programmes `Python` la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy`, qui permet de connaître le rang d'une matrice.

Exemple d'utilisation de cette fonction :

```
import numpy as np

A = np.array( [ [1,2,1] , [2,3,2] , [3,5,3] ] )

print( np.linalg.matrix_rank(A) )
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, c'est à dire : 2.

– –

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. (a) Ecrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.
   On pourra représenter les vecteurs par des listes.
   (b) Ecrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est un vecteur propre de A.

2. (a) Vérifier que les vecteurs $(1,-2,0)$, $(0,1,-1)$ et $(1,0,-1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.
   (b) f est-il diagonalisable ?

3. (a) Ecrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses) .
   (b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses) .

4. Soit N un entier naturel non nul, une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $[\![-N;N]\!]^3$.
   (a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre de A parmi ces N vecteurs ?
   (b) Quelle est la limite de $N \ln\left(1 - \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
   En déduire la limite de p_N quand N vers $+\infty$.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 27

Question de cours :
Définition d'un système complet d'événements.

— —

Exercice préparé :
On pourra utiliser pour les programmes `Python` la fonction `linalg.matrix_ rank()` du module `numpy`, qui permet de connaître le rang d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy as np
A = np.array( [ [1,2,1] , [2,3,2] , [3,5,3] ] )
print( np.linalg.matrix_rank(A) )
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$, c'est à dire : 2.

On pourra aussi utiliser la fonction `randint()` du module `random`.
pour a et b deux entiers `randint(a,b)` retourne un entier equiprobablement entre a et b (a et b étant inclus).

— —

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1. (a) Ecrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.
   On pourra représenter les vecteurs par des listes.
   (b) Ecrire une fonction Python `vecteurs_propres(u)` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'il est un vecteur propre de A.
2. (a) Vérifier que -1, 1 , 2 sont valeurs propres de A et préciser pour chacune un vecteur propre associé.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
   On note : $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^* = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.
   (a) Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'approximation de la probabilité $P\left([-\alpha < M_n^* < \alpha]\right)$ donnée par le théorème central limite.
   (b) En déduire que $\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au seuil de 95%.
   On pourra admettre que, $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$.
4. On note N_V le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -5 et 5 (bornes incluses) .
   (a) Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N_V :

```
def simul():
    u = [ randint(-5,5) for k in range(3) ]
    return vecteurs_propres(u)

n = 10000              #  Valeur de n à définir.
nb = 0
for k in range(n):
    if simul():
        nb += 1
print(round(nb/n*11**3))      #   round(x) : retourne l'entier le plus proche du flottant x.
```

   (b) Comment choisir n pour que l'on soit sûr à 95% de la valeur affichée ?
   (c) Commenter le résultat obtenu.

Sujet 28

Question de cours :

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$?

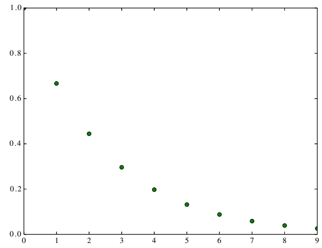
– –

Exercice préparé :

On rappelle que la fonction `plot` des modules `pylab` ou `matplotlib.pyplot` permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :

```
from matplotlib.pyplot import plot,show

x = [ n for n in range(20) ]
y = [ (2/3)**k for k in x  ]
plot(x,y,'o')
show()
```



On pourra aussi utiliser la fonction `randint()` du module `random`.

pour a et b deux entiers `randint(a,b)` retourne un entier equiprobablement entre a et b (a et b étant inclus).

– –

n désigne ici un entier naturel non nul.

On étudie le jeu suivant :
Un joueur lance n fois un dé équilibré à six faces.
S'il tombe au moins une fois sur la face 1, au cours des n lancers, il ne gagne rien et s'il n'a jamais eu de face 1, il gagne la somme des nombres obtenus.

On note G_n le gain obtenu à la fin de ce jeu.

On définit, pour $i \in [\![1; n]\!]$, les variables aléatoires suivantes :

- X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 0$ si le i ème lancer a donné une face 1 et le numéro sorti au i ème lancer dans le cas contraire.
- Y_i la variable aléatoire définie par $Y_i = 1$ si le i ème lancer n'a pas donné la face 1 et 0 dans le cas contraire.

1. Ecrire une fonction Python qui permet de simuler G_n.
2. Déterminer la loi de la variable $Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$.
3. Exprimer G_n en fonction des variables X_i et de la variable Y.
4. Estimer l'espérance de G_n à l'aide de simulations pour différents entiers n et tracer $E(G_n)$ en fonction de n pour n entre 2 et 20. *(on pourra se contenter de faire* 10 000 *simulations)*
5. Calculer pour chaque i, l'espérance $E(X_i)$, puis celle de G_n.
6. Estimer la variance de G_n à l'aide de simulations. *(on pourra se contenter de faire* 10 000 *simulations)*
7. Soient i et j deux entiers naturels distincts compris entre 1 et n.
   Exprimer X_iX_jY comme le produit de n variables mutuellement indépendantes.
   En déduire la covariance du couple (X_iY, X_jY).

– –

Exercice non préparé :

Sujet 29

Question de cours :

Enoncé du théorème de Moivre-Laplace.

– –

Exercice préparé :
p désigne un réel de l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

Une pièce amène "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

On effectue une suite de lancers indépendants.

On dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un "changement" ($k \geqslant 2$) s'il donne un résultat différent du $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer.

Pour chaque entier $n \geqslant 2$, X_n est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de changements obtenus au cours des n premiers lancers.

1. Donner la loi et l'espérance de X_2 et X_3.
2. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée p et n et qui permet de simuler la variable aléatoire X_n.
3. Pour chaque entier $n \geqslant 2$, on considère aussi pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$, Y_i la variable aléatoire égale à 1 si il y a un changement entre le $i$ème et le $(i+1)$ième lancer.
   (a) Déterminer la loi des variables aléatoires Y_i.
   (b) Montrer que les variables Y_i pour i allant de 1 à $n-1$, sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, $p = q$.
4. Si $p \neq q$, calculer $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n-1)$.
5. Rédiger une fonction informatique `esperance` permettant d'estimer l'espérance de X_n à la donnée de p et de n. *On ne demande pas de conjecturer une formule.*
6. Calculer l'espérance de X_n. Donner cette espérance pour $n = 11$ et $p = 0{,}4$ et comparer ce résultat avec ce que donne l'estimation de la question 5).
7. Si $p = q$, déterminer la loi de X_n.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 30

Question de cours :

Loi de X suivant une loi normale centrée réduite.

– –

Exercice préparé :
On s'intéresse dans cet exercice à la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^1 (1-t)^n \exp\left(\frac{-1}{t}\right) dt$$

1. Soit g définie sur $[0,1]$ par : $\quad g(0)=0 \quad$ et $\;$ pour tout $t \in]0,1]$, $\quad g(t) = \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $[0;1]$ et déterminer $g'(0)$.
   (b) Montrer que, pour chaque entier n, u_n est bien défini.

2. (a) Ecrire une fonction Python évaluant u_n par une méthode d'approximation d'intégrale.
   (b) Rédiger une fonction prenant en entrée n et p et retournant la valeur de $u_n \times n^p$.
   (c) A l'aide de la fonction précédente, émettre une conjecture sur la limite de $\left(u_n \times n^p\right)$ quand n tend vers $+\infty$, pour différentes valeurs de p (on pourra se restreindre à p entre 1 et 10).
   (Remarque : pour $p = 10$, il est nécessaire d'observer les termes de la suite autour de $n = 2000$) .
   Cette conjecture sera étudiée la question 5).

3. On considère une fonction f de classe C^∞ sur $[0,1]$ et on note :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(f) = \int_0^1 f(t)(1-t)^n\, dt$$
   (a) Justifier qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [0,1], \quad |f(t)| \leqslant M$.
   (b) Grâce à l'inégalité triangulaire, montrer que : $\quad I_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   (c) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f'(t)(1-t)^{n+1} dt$$
   (d) n étant fixé dans $\mathbb{N}$, montrer que pour chaque entier naturel k,
$$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1)\cdots(n+k+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k+1)} I_{n+k+1}(f^{(k+1)})$$
   (e) Montrer que pour chaque entier naturel k, il existe une suite $(\varepsilon_{k,n})_n$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_{k,n} = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1)\cdots(n+k+1)} + \frac{1}{n^{k+1}}\,\varepsilon_{k,n}$$

4. Déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 t\sin(t)(1-t)^n\, dt$.

5. On admet que la fonction g de la question 1) est de classe C^∞ sur $[0,1]$.

   Revenir sur la conjecture faite à la question 2)c).

– –

Exercice non préparé :

Sujet 31

Question de cours :

Rappeler la valeur de $P(X = k)$ si X suit une loi binomiale.

– –

Exercice préparé :
Une entreprise fabrique des vidéoprojecteurs. La durée de vie des lampes suit une loi exponentielle d'espérance 24 mois. Le service qualité cherche à prévoir le comportement d'un échantillon de 10 000 lampes fabriquées en 2016.

On note :

- D_i la durée de vie de la lampe numéro i.
- X_t le nombre de lampes toujours en fonction après t mois, t étant un réel de $[0; +\infty[$.
- T l'instant à partir duquel la proportion de lampes encore en fonction est inférieure à $\dfrac{3}{10}$.

On rappelle que l'espérance d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre a est égale à $\dfrac{1}{a}$.

1. On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ et a un réel strictement positif.
   Montrer que la variable $Z = -\dfrac{1}{a}\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre a.
   On en déduit que l'instruction Python `-1/a*log(random())` permet de simuler une variable suivant la loi exponentielle de paramètre a.
   Indication :
   la fonction `log` doit être importée par l'instruction `from math import log` et pour la fonction `random` par `from random import random`
2. (a) Ecrire une fonction Python prenant en entrée le nombre t et permettant de simuler la variable aléatoire X_t.
   (b) Ecrire une fonction Python permettant d'estimer l'espérance de X_t par des simulations numériques.
   (c) Evaluer empiriquement $P(T > t)$ pour différentes valeurs de t.
3. Déterminer en fonction du réel t, la probabilité de l'événement $[D_i > t]$.
4. Déterminer la loi de X_t et son espérance.
5. Evaluer t pour lequel $P(T > t) = 0{,}95$.
   On pourra utiliser l'approximation donnée par le théorème central limite ou utiliser des simulations numériques.

On pourra admettre que, si Φ *désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors* $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$.

– –

Exercice non préparé :

Sujet 32

Question de cours :

Enoncé du théorème de Cauchy-Schwarz.

— —

Exercice préparé :

On étudie la descendance d'une fleur dont le nombre de descendants suit la loi binomiale $B(2,p)$, avec $p \in]0,1[$ fixé. Les descendantes de la première fleur ont des descendantes de façon mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur.
Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la probabilité de l'événement

$$E_n : \text{« Il n'y a plus de descendance à la génération } n \text{ »} .$$

1. Calculer u_1.
2. Rédiger une fonction informatique qui simule la descendance de la fleur sur une génération (c'est-à-dire qu'elle renvoie des nombres entiers 0, 1, 2, dont la répartition suivra la loi $\mathscr{B}(2,p)$), puis sur n générations.
3. On note :
   A_0 : « à la première génération il n'y a aucune fleur »,
   A_1 : « à la première génération il y a une seule fleur » et
   A_2 : « à la première génération il y a exactement deux fleurs ».
   Pour n un entier naturel non nul, exprimer en fonction de u_n les probabilités conditionnelles suivantes :
   $$P_{A_0}(E_{n+1}) \qquad P_{A_1}(E_{n+1}) \qquad P_{A_2}(E_{n+1})$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+1} = ((1-p) + p\,u_n)^2$$
5. Ecrire une fonction Python prenant en entrer un entier n et un flottant p et qui renvoie u_n.
6. Rédiger une fonction qui renvoie la fréquence d'extinction de la descendance après 10 générations sur un grand nombre de simulations.

   On étudiera dans cette dernière question plusieurs valeurs de p et on comparera les résultats à ceux obtenus à la question précédente.

— —

Exercice non préparé :

Sujet 33

Question de cours :

Enoncé du théorème de Pythagore.

— —

Exercice préparé :

On étudie la descendance d'une fleur.
Soit $p \in]\,0\,;1[$, on note pour tout entier naturel non nul n, la probabilité u_n de l'événement

E_n : « Il n'y a plus de descendance à la génération n » .

On sait que $u_0 = 0$ et on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = ((1-p) + p\,u_n)^2$$

On ne demande pas de démontrer cette relation.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ((1-p) + p\,x)^2$

1. Représenter u_n en fonction de n pour différentes valeurs de p.
   (*On utilisera ici un des logiciels à votre disposition*)
2. Emettre des conjectures sur le comportement de (u_n). *(Monotonie, convergence, limite)*
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et sur le segment $[0,1]$.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel p pour que l'équation $f(x) = x$ admette une solution sur l'intervalle ouvert $]0;1[$.
5. Déterminer la nature de la suite (u_n) suivant les valeurs de p.
   (on pourra pour commencer par étudier les cas $p = \dfrac{1}{4}$ *et le cas* $p = \dfrac{3}{4}$*)*
6. Interpréter les résultats de la question précédente.
7. Ecrire une fonction python qui prend en entrée un réel p et qui retourne la limite de la suite (u_n).

— —

Exercice non préparé :

Sujet 34

Question de cours :
Donner la définition des fonctions partielles d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

— —

Exercice préparé :
On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S+T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) f_T(t-s)\mathrm{d}s$$

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ et λ un réel strictement positif.
   On note $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. Écrire un programme Python qui simule une loi exponentielle.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.
   On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   (a) À l'aide d'une récurrence, montrer que la fonction f_n définie ensuite est une densité de probabilité.
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
   (b) En utilisant la convolution et une récurrence, montrer que f_n est une densité de S_n pour tout $n \geqslant 1$.
4. On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note S_1, S_2, etc, les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0, N_t$ le nombre de bus passés à l'arrêt, entre l'instant 0 et l'instant t. Autrement dit : $\forall n \geqslant 0, [N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}]$.
   (a) Pour $n \geqslant 0$, exprimer (avec soin) l'événement $[N_t \geqslant n]$ à l'aide de S_n.
   (b) Justifier alors que : $\forall n \geqslant 0, P(N_t = n) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t)$.
   (c) En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
5. On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.

```
import math as m
import random as rd
def autobus():
    a, b, N = 0, 0, 10000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100:
            r = s
            s = s - 10*m.log(1-rd.random())
        u, v = s - 100, s-r
        a, b = a+u, b+v
    return a/N, b/N
```

   On se pose alors les deux questions suivantes :
   — Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
   — Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ?

   Pour y répondre, on réalise le programme Python ci-contre :
   (a) Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v dans le programme.
   (b) Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252 20.315494.
   Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

— —

Exercice non préparé :
1. Écrire une fonction d'argument une liste L qui teste si la liste L vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}$ suivante : $\mathcal{H}$: les éléments de la liste L sont des entiers qui sont compris au sens large entre 0 et $n-1$ avec n la longueur de la liste L.
2. Écrire une fonction d'argument une liste L vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}$ qui teste si la liste L vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}'$ suivante : $\mathcal{H}'$: la liste L contient exactement une fois chaque valeur entre 0 et $n-1$ où n la longueur de la liste L.

Sujet 35

Question de cours :
Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E.

– –

Exercice préparé :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\ \mathbb{N}^*}$ est adaptée à f si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

On admet que si une fonction non identiquement nulle f possède une suite adaptée, alors cette suite est unique. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que si f est une fonction dérivable admettant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à la fonction f'.
3. On admet dans la suite que l'on peut définir une suite de polynômes $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

L'objectif est alors de montrer que pour tout entier naturel p, B_p appartient à E.

(a) Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste de réels $L = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ et renvoie la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, \mathrm{d}x$.

(b) Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E.

(c) Déterminer, pour tout entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que B_{p-1} appartient à E et on cherche à montrer que B_p appartient aussi à E.

i. Montrer que si B_p appartient à E, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in N^*}$ est adaptée à B_p.

ii. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est constante.

iii. Calculer $\int_0^{1/n} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

iv. Conclure.

– –

Exercice non préparé :
Soit a et b deux entiers naturels avec $a < b$.

1. Écrire une fonction `verif`(L, a, b) qui a pour paramètres une liste L d'entiers naturels et 2 entiers a et b et qui renvoie `True` si tous les éléments de `L` sont dans l'intervalle $[\![a, b]\!]$ et `False` sinon.
2. Soit L une liste dont chaque élément est dans l'intervalle d'entiers $[\![a, b]\!]$. Écrire une fonction `denombre(L, a, b)` qui détermine le nombre d'apparitions de chacune des valeurs possibles (entre a et b) de la liste `L` et qui renvoie le résultat dans une liste dont le premier élément représentera le nombre de a dans `L` , le deuxième le nombre de $a + 1$ dans `L` etc.
Exemple : pour $a = 0$ et $b = 4$, `denombre`$([1, 3, 0, 4, 1, 3, 1], 0, 4)$ renverra $[1, 3, 0, 2, 1]$.

Sujet 36

Question de cours : Donner la définition d'une densité de probabilité.

— —

Exercice préparé :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme usuelle notée $\| \cdot \|$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit G la matrice de Gram de $(u_1, \ldots, u_p)$ par

$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

1. (a) Écrire une fonction Python ps prenant en argument deux vecteurs u et v sous formes de liste de même taille et renvoyant le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.
   (b) Écrire une fonction Python Gram prenant en argument une famille de vecteurs ($u_1, \ldots, u_p$) sous forme d'une liste de listes et renvoyant la matrice de Gram de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.
   (c) Tester votre fonction avec les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
2. Justifier que la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.
3. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram. On cherche à montrer que la famille est libre si et seulement si G est inversible.
   (a) On suppose que G est inversible.

   Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $GX = 0$,

   puis en déduire que $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.
   (b) On suppose que $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

   Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $GX = 0$.
   i. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!], \langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \rangle = 0$.
   ii. En déduire que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$.
   iii. Montrer que $X = 0$, puis que G est inversible.
4. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|v_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \|v_i - v_j\| = 1$$

   (a) Pour tous a et $b \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$.
   (b) En déduire la matrice de Gram de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$, que l'on notera G.
   (c) On pose $A = 2G$. Exprimer A^2 en fonction de n, A et I_n (la matrice identité de taille n).
   En déduire que A est inversible.
   (d) Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

— —

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction python, d'arguments d'entrée i et N, qui simule une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: le marcheur démarre sur l'entier i et à chaque pas, il avance de 1 ou recule de 1 avec probabilité 1/2. La marche s'arrête après le N-ième pas et la fonction renvoie l'entier sur lequel le marcheur s'est arrêté.

   Un plateau de jeu est constitué de $n+1$ cases numérotées de 0 à n avec $n > 1$, les cases 0 et n contenant des valeurs a et b, comme ci-dessous où $n = 10, a = 1$ et $b = 3$:

1										3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

   Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on considère le jeu J_i suivant : on place un pion dans la case de numéro i et tant que l'on n'est pas dans la case 0 ou dans la case n, on lance une pièce équilibrée : si elle tombe sur face, on se déplace vers la gauche ; sinon, on se déplace vers la droite. On admet que la partie se termine presque sûrement : le gain du joueur est la valeur (a ou b) contenue dans la case finale.
2. Écrire une fonction qui prend en paramètres les valeurs n, a, b et i, qui simule ce jeu et qui renvoie le gain.

Sujet 37

Question de cours :

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales sur un segment.

– –

Exercice préparé :
Soit n un entier naturel non-nul. On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3 . Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobablité et on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et de Y obtenues.
2. Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grande nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $E(XY), E(X)$ et $E(Y)$. Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?
3. Dans cette question, $n = 2$.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple $(\ X, Y\ )$ sous forme de tableau.
   (b) Donner la loi de X, puis celle de Y.
   (c) Calculer la covariance du couple (X, Y).
4. Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque.
   Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X, et donner la valeur de son espérance.
   (b) En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $E(Y)$.
   (c) Démontrer que :
   $$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in [\![0, n]\!], P\left(X = j \cap Y_i = 1\right) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}$$
   (d) Calculer alors $E\left(XY_i\right)$ pour $i \in \{2, 3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?
   (e) Calculer la covariance du couple (X, Y).

– –

Exercice non préparé :
On souhaite exploiter le suivi d'une randonnée en effectuant des mesures lors de differents points de passage : latitude, longitude, altitude et temps (date).
Ces données sont contenues dans une liste `coords`, où `coords[i]` désigne la liste des 4 mesures effectuées au point de passage numéro `i`. Ainsi `coords[i][2]` renvoie par exemple l'altitude relevée au point de passage numéro `i`.

1. Écrire une `fonctiontemps(coords)` qui renvoie la liste des temps relevés lors de la randonnée `coords`.
2. Sans utiliser la fonction max, écrire une fonction `plus_haut(coords)` qui renvoie la liste `[lat, long]` du point le plus haut lors de la randonnée `coords`.

Sujet 38

Question de cours :
Donner la définition du gradient d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

— —

Exercice préparé :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application D par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad D(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. (a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $D(1)$ puis $D\left(X^k\right)$ pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$.
   (c) Donner la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Déterminer le spectre de $D. D$ est-il diagonalisable ?
2. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*, H_k(X) = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $D(H_0)$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!], D(H_k) = kH_{k-1}$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de D dans la base $\mathcal{B}$.
3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré. Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, le polynôme $P = 5X^3 - 2X + 3$ est représenté par la liste $[3, -2, 0, 5, 0]$.
   (a) Programmer une fonction Python qui prend en argument une liste de longueur $n+1$ modélisant un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et un réel a, et qui renvoie alors la liste modélisant $(X - a)P$.
   (b) Programmer une fonction Python qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la liste modélisant le polynôme H_n.
4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Montrer que $H_2(Y)$ admet une espérance, en déduire que $H_1(Y)$ et $H_0(Y)$ admettent une espérance. Déterminer alors $E(H_0(Y)), E(H_1(Y))$ et $E(H_2(Y))$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2).
   (c) Retrouver la valeur de la variance de Y.
5. On note $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À tout élément $f \in \mathscr{C}$, on associe la fonction $g = \tilde{D}(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \tilde{D}(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

   (a) On dit qu'un réel λ est une valeur propre de $\tilde{D}$ s'il existe une fonction non nulle f de $\mathscr{C}$ telle que $\tilde{D}(f) = \lambda f$. En considérant les fonctions $h_a : x \longmapsto e^{ax}$ et $k_a : x \longmapsto \sin(\pi x)e^{ax}$ où a est un réel, déterminer les valeurs propres de $\tilde{D}$.
   (b) Si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, montrer que $g = \tilde{D}(F)$ est une densité de probabilité.
   (c) Expliciter g si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

— —

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction Python qui simule une série de N lancers d'une pièce équilibrée, et qui renvoie la liste des résultats de ces lancers ("Pile" est codé par 1, et "Face" par 0).
2. Écrire une fonction Python qui simule une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de la configuration "Pile, Pile, Face", et renvoie le nombre de lancers nécessaires à l'apparition de cette configuration. A l'aide de cette fonction, évaluer le temps moyen d'attente de cette configuration.

Sujet 39

Question de cours :
Enoncer le théorème du rang.

— —

Exercice préparé :
On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S+T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) f_T(t-s)\mathrm{d}s$$

On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $]0;1[$.

1. Justifier son existence, puis déterminer une densité f des variables aléatoires U^2 et V^2.
2. On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h.
3. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $P(Z \leq 1)$.
4. (a) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{x-t}}\dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$.
   (b) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-y}}\dfrac{1}{\sqrt{y}}dy$.
   (c) Montrer que, sur $]0;1]$, on a : $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$. *(On pourra utiliser le changement de variable $y = sin^2(u)$).*
   (d) Calculer $P(Z \leqslant 1)$ et interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.
5. On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\dfrac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer, en fonction de n et ε, une majoration de $P\left(\left|S_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.
   (b) En déduire, à partir de quelle valeur de n, il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.
   (c) Á l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

— —

Exercice non préparé :
On s'intéresse ici aux vignettes auto-collantes vendus par paquets qui permettent de remplir un album.

1. Ecrire une fonction `paquet()` sans argument renvoyant aux hasard 3 entiers entre 0 inclus et 100 exclu.
2. On considère un album de vignettes `A` modélisé par une liste de booléens.
   Par exemple : `[False, ..., False]` représente un album vide
   et `[True, ..., True]` représente un album plein.
   Ecrire une fonction `coller(paquet, album)` qui pour chaque numéro du `paquet` remplit la position correspondante dans l'`album`.
   Exemple : si `paquet = [3 , 2, 6]` on met `True` aux positions 2, 3 et 6.

Bonus :
Ecrire une fonction remplissant tout l'album au fur et à mesure et qui permet d'estimer le nombre de paquets moyen nécessaire pour remplir cet album.

Sujet 40

Question de cours :
Définition d'une famille libre finie d'un espace vectoriel E.

— —

Exercice préparé :

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que u_n est bien définie.
2. (a) Ecrire une fonction prenant en entrée un nombre x et renvoyant $f(x)$.
   (b) Ecrire une fonction permettant de calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles, pour tout a, b réels tels que $a \leqslant b$.
   (c) A l'aide de ces fonctions faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)dx = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t)dt$.
4. On note g la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.
   (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique prolongement de g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, noté $\tilde{g}$.
   (c) Montrer que $\tilde{g}$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t).\tilde{g}'(t)dt$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt = 0$.
6. (a) Montrer que pour tous réels a et b, $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
   (b) Montrer que pour tout entier n, pour tout réel t différent de 0 ,
   $$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$$
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t))dt = \frac{\pi}{2}$.
7. Quelle est la limite de u_n ?

— —

Exercice non préparé :

1. Ecrire une fonction permettant de tester si une liste `L` est composée uniquement d'entiers compris au sens large entre `0` et `n-1`, avec `n` la longueur de `L` (hypothèse $\mathscr{H}$).
2. Ecrire une fonction permettant de tester si une liste `L` vérifiant l'hypothèse $\mathscr{H}$ est une permutation de $[\![0, n-1]\!]$.

Sujet 41

Question de cours :
Donner la définition de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Exercice préparé :
Soit X une variable aléatoire de densité f :

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x \in \left[-\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad f(x) = 0 \ \text{ sinon}$$

1. Ecrire une fonction qui simule la réalisation de la variable X.
2. Ecrire une fonction qui pour x donné en argument renvoie $F_X(x)$ où F_X est la fonction de répartition de X.
3. Calculer si elles existent $E(X)$, $E(|X|)$ et $E(X^2)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, ..., X_n)$ une liste de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X.

$$\text{On note :} \quad M_n = \max(X_1, ..., X_n), \quad m_n = \min(X_1, ..., X_n) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

4. (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
   (b) Déterminer une densité de M_n et son espérance si elles existent.
   (c) Déterminer la fonction de répartition de m_n.
   (d) Les variables aléatoires m_n et M_n sont elles indépendantes ?
   (e) Déterminer $E(S_n)$ si elle existe.
5. (a) Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad E\left(e^{\lambda S_n}\right) = \left(\dfrac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda}\right)^n$
   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad P(S_n \geqslant t) \leqslant e^{-t+\frac{n}{2}}$

Rappel sur la convergence en loi :

> Soient Y une variable aléatoire réelle et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.
> On note F_Y la fonction de répartition de Y et D l'ensemble des réels où F_Y est continue.
> (Y_n) converge en loi vers Y signifie que : $\quad \forall x \in D, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant x) = F_Y(x)$

6. (a) Ecrire une fonction permettant de simuler la réalisation de la variable M_n, n étant passé en argument.
   (b) Montrer que M_n converge en loi vers une variable aléatoire certaine à préciser.
7. On note $Z_n = n\left(\dfrac{1}{2} - M_n\right)$.
   (a) Ecrire une fonction permettant de simuler la réalisation de la variable Z_n, n étant passé en argument.
   (b) Ecrire un programme traçant une approximation de la fonction de répartition de Z_n avec un longue série de simulations.
   (c) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi usuelle à préciser.

Exercice non préparé :

1. Ecrire une fonction qui prend en argument une liste non vide de nombres distincts et qui renvoie le quadruplet : • Minimum de la liste. • rang du minimum. • Maximum de la liste. • rang du maximum.
2. Ecrire une fonction qui prend en argument une liste de nombres distincts et qui renvoie le quadruplet :
   • Maximum de la liste. • rang du maximum. • Deuxième maximum de la liste. • rang du deuxième maximum.

Sujet 42

Question de cours :
Définition de deux matrices semblables.

– –

Exercice préparé :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2,
pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P) = 3XP' + (X^2-1)P''$.

1. Montrer que Φ définie un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Calculer pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\Phi(X^k)$
   (b) Donner une base de l'image de Φ.
   (c) Donner une base du noyau de Φ.
3. Montrer que Φ est diagonalisable. *(on pourra utiliser le résultat de la question 2.(a))*
4. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note : $S_N = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant N+1} \binom{N+1}{2k+1}$ et $T_N = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant N+1} \binom{N+1}{2k}$
   (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un entier naturel N et renvoyant la valeur de S_N . On pourra utiliser `comb(N, j)` de la bibliothèque `math` qui calcule $\binom{N}{j}$.
   (b) Déterminer S_4 et S_5.
   (c) Calculer $S_N + T_N$. Et montrer que $S_N - T_N = 0$
5. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ le polynôme :
$$P_N = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1-X^2)^k X^{N-2k}$$
   (a) Donner les polynômes P_0, P_1 et P_2.
   (b) Déterminer le monôme dominant de P_N.
   (c) Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Montrer que $\sin((N+1)t) = \sin(t)P_N(\cos(t))$. *On pourra développer* $(\cos(t) + i\sin(t))^{N+1}$
   (e) En dérivant deux fois l'égalité précédente montrer que :
$$(N^2+2N)P_N - 3XP_N' - (X^2-1)P_N'' = 0$$
   (f) Diagonaliser Φ. *(Autrement dit : Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ)*

– –

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction `est_mixte` prenant en argument une liste composée de 0 et/ou 1 qui renvoie `False` si la liste est composée uniquement de 0 ou uniquement de 1 et `True` sinon.
2. Écrire une fonction `plus_longue_suite` prenant en argument une liste composée de 0 et de 1 qui renvoie la plus longue suite de 1 de la liste.
   Exemple : si $L = [0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]$, la fonction renvoie 3.

Sujet 43

Question de cours :

Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

– –

Exercice préparé :

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.

Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.

On note r_n (resp. b_n) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au n-ième tirage

1. (a) Déterminez r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n
   (b) En déduire r_n et b_n en fonction de n
2. On note X le rang du premier tirage d'une boule bleue et Y le rang du premier tirage d'une boule rouge
   (a) Écrivez une fonction python `simul_XY()` qui simule X et Y
   (b) À l'aide de python déterminer une valeur approchée de l'espérance de X et de Y
   (c) Donner les lois de X et de Y.
   (d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On note Z_n le nombre de boules bleue tirées au cours des n tirages
   (a) Donner les lois de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4
   (b) Quelles sont les valeurs prises par Z_n en fonction de n ? *(On pourra faire des cas suivant la parité de n)*
   (c) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus petite valeur.
   (d) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus grande valeur.
   (e) Pour $k \in [\![0; n]\!]$, déterminer $P(Z_n = k)$.

– –

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction python somme(L,i,j) avec L une liste d'entiers et qui renvoie la somme des entiers de la liste L compris entre les indices i et j.
2. Écrire une fonction python prenant en argument L et k et qui renvoie la somme maximale entre k éléments consécutifs de la liste.

   Exemple : si `k = 2` et `L=[1, 3, 8, 4, 7]`.

   On cherche la somme maximale des 2 entiers consécutifs de la liste L :

   `L[0] + L[1] = 4`   `L[1] + L[2] = 11`   `L[2] + L[3] = 12`   `L[3] + L[4] = 11`

   Donc la fonction python doit renvoyer 12.

Sujet 44

Question de cours :
Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

— —

Exercice préparé :
On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *(on pourra utiliser le changement de variable $x = 2\sin(u)$)*

   On considère une variable aléatoire X de densité f.

2. (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, que X^n admet une espérance.

   (b) Que vaut $E(X^{2k+1})$ pour $k \in \mathbb{N}$?

   Dans la suite on étudie $U_k = E(X^{2k})$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. (a) Compléter le programme suivant permettant d'estimer les 10 premières valeurs de U_k.

```
import scipy.integrate as sc
for k in range (11):
    def g(x):
        return
    print(sc.quad(g, -2, 2))
```

   Indication : l'instruction `scipy.quad(g, -2, 2)` renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(t)\,dt$.

   (b) Rappeler le théorème des sommes de Riemann et en déduire un autre programme permettant de réaliser les estimations précédentes.

4. (a) Montrer que la fonction $g : x \longmapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $[0\,,1]$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$U_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2}U_k$$
   Indication : Calculer $4U_k - U_{k+1}$ en utilisant une intégration par parties.

   (c) Ecrire un programme Python qui permet de vérifier que les 100 premiers termes U_k sont des entiers naturels. Donner à l'aide de ce programme les 6 derniers chiffres de U_{100}

   (d) Exprimer U_k en fonction de k avec des factoriels.

   (e) En utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ montrer que :
   $$U_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}$$

— —

Exercice non préparé :

1. Ecrire une fonction Python renvoyant la valeur maximale d'une liste.
2. Ecrire une fonction `histo` qui prend en argument une liste d'entiers naturels et renvoie la liste donnant à la position `k` le nombre de fois où `k` apparait dans la liste `L`.
3. Ecrire une fonction triant une liste en utilisant la fonction `histo`.

Sujet 45

Question de cours :

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire f soit injective.

— —

Exercice préparé :

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.

Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.

On note r_n (resp. b_n) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au n-ième tirage

1. (a) Déterminez r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n
   (b) En déduire r_n et b_n en fonction de n

On note Z_n le nombre de boules bleues tirées au cours des n tirages

2. (a) Ecrire une fonction Python `simul_Z(n)` qui permet de simuler la réalisation de Z_n.
   (b) Trouver une valeur approchée de l'espérance de Z_n pour n allant de 2 à 10.
3. Donner les lois de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 et calculer leur espérance.
4. Quelles sont les valeurs prises par Z_n en fonction de n ? *(On pourra faire des cas suivant la parité de n)*
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \left[\!\left[0; \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor \right]\!\right]$:
   $$P(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2}P(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2}P(Z_n = k-1)$$
   (b) En déduire une relation donnant $E(Z_{n+2})$ en fonction de $E(Z_{n+1})$ et $E(Z_n)$,
   puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E(Z_n) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{n}{3}$
6. (a) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus petite valeur.
   (b) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus grande valeur.
   (c) Pour $k \in [\![0; n]\!]$, déterminer $P(Z_n = k)$.

— —

Exercice non préparé :

Sujet 46

Question de cours :
Pour q un réel vérifiant $|q| < 1$, donner les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$$

— —

Exercice préparé :
On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Ψ l'application définie sur F par :

$$\forall y \in F, \quad \Psi(y) = y'' + 2y'$$

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de F.
2. On s'intéresse au problème différentiel :

$$(E) : \begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = -te^{-t} & t \in [0,5] \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

   En posant $z(t) = y'(t)$, (E) peut s'écrire :

$$\text{sur}[0,5], \qquad \begin{cases} y'(t) = z(t) & y(0) = 0 \\ z'(t) = -2z(t) - te^{-t} & z(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement (E) avec la méthode d'Euler.
   (b) Tracer la solution de la question précédente et la fonction $t \longmapsto te^{-t}$ dans le même repère.
   (c) Quelle conjecture peut on faire sur les valeurs propres de Ψ ?
3. Déterminer les valeurs propres de Ψ.
4. On note $\mathscr{B}$ la famille $(\exp, \cos, \sin)$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de G.
   (b) Justifier qu'on peut définir un endomorphisme de G en posant $\forall f \in G,\ \varphi(f) = \Psi(f)$
   (c) Donner la matrice M de φ dans $\mathscr{B}$.
   (d) Justifier que φ n'est pas diagonalisable.
5. Reprendre la matrice M précédente et diagonaliser M dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

— —

Exercice non préparé :

1. Ecrire une fonction `compt1` qui prend en argument une liste et qui renvoie la longueur de la première sous liste croissante.
2. Ecrire une fonction `compt` prenant en argument une liste `L` et qui renvoie une liste contenant les longueurs de toutes les listes croissantes de `L`.
   Exemple : Avec `L = [1, 2, 0, 2, 4, 3, 5, 2]` la fonction renvoie : `[2, 3, 2, 1]`

Sujet 47

Question de cours :

Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

— —

Exercice préparé :

Pour tout x appartient à $\mathbb{R}^+$

$$f_0(x) = x \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)^2}{n+1}$$

1. Donner $f_1(x)$ et $f_2(x)$
2. Ecrire une fonction Python traçant la fonction f_{n+1} pour n allant de 1 à 10 et sur $[0, 3/2]$.
3. En raisonnant par une récurrence sur n, montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on suppose ici qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0+1}(x) \leqslant f_{n_0}(x)$
   (a) Montrer par récurrence que pour $n \geqslant n_0,\ \ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$
   (b) Montrer que la suite $(f_n(x))$ converge et donner sa limite.
5. Montrer que la suite $(f_n(1))_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 .
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(2) \geqslant n+2$.
7. On a $E_0 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$ et $E_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right\}$
   (a) Justifier que E_0 et E_∞ sont non vides.
   (b) Soit x appartient à E_0 et y tel que $0 \leqslant y \leqslant x$ montrer que y appartient à E_0.
   De même, si x appartient à E_∞ et $x \leqslant y$, montrer que y appartient à E_∞.
8. Soit δ un réel appartenant à $[1, 2]$.
   Montrer que pour x appartient à $[0, \delta]$
   $$\frac{f_n(x)}{f_n(\delta)} = \left(\frac{x}{\delta}\right)^{(2^n)}$$

On admet qu'il existe un réel $\delta \in [1, 2]$, tel que $(f_n(\delta)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

9. En déduire les ensembles E_0 et E_∞ en fonction de δ.
10. Déterminer la valeur de δ sous la forme d'un produit.

Sujet 48

Question de cours :

Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

– –

Exercice préparé :

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X.
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X.
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
   Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

6. (a) Écrire une fonction Python simulant une réalisation de la variable aléatoire T_n pour n donné en argument.
   (b) Estimer l'espérance de T_n pour $n \in \{1, 10, 100\}$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de T_n.
8. Montrer que la suite (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire T de densité :

$$g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On rappelle que pour montrer que (T_n) converge en loi vers T il suffit de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = P(T \leqslant x)$$

9. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Sujet 49

Question de cours :

Donner le thèorème central limite.

Exercice préparé :

On s'intéresse à une population de saumons et on note pour tout $n \in \mathbb{N}, y_n$ le nombre de saumons de l'année n.

Selon un modèle d'évolution de la population, on a l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = y_n \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{p}\right)}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance intrinsèque de la population ($r > 0$).

1. Montrer qu'en posant $b = \dfrac{r}{p}, \alpha = \mathrm{e}^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \alpha x_n \mathrm{e}^{-x_n}$. Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$?
   Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.
2. Montrer rapidement que (x_n) prend des valeurs strictement positives.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$selon la valeur de α.
5. (a) Écrire une fonction en Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200 . On fera apparaitre les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impair en rouge. On rajoutera donc l'option `color='blue'` ou `color='red'` pour choisir la couleur du graphe.
   (b) Tester votre programme dans le cas où $u_0 = 0.5$. Quel semble être le comportement de la suite pour $\alpha = 4$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.
6. On suppose que $\alpha \in]\mathrm{e}, \mathrm{e}^2[$.
   (a) On introduit la fonction g_α où $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout réel $x \in [1, +\infty[, \quad |f'_\alpha(x)| \leqslant M$.
   (c) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution dans $[0, 1[$ et μ_α celle dans $]1, +\infty[$.
   (d) On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   On procède par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.
   Montrer que pour tout entier naturel $n, x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$, puis que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.
   En déduire une contradiction et conclure.
   (e) On admet que $f_\alpha\left(\alpha \mathrm{e}^{-1}\right) > 1$. Montrer que pour tout $x \in [1, \mu_\alpha], f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.
   (f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour $n \geqslant n_0 + 1, |x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M\, |x_n - \ln(\alpha)|$.
   (g) En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

Sujet 50

Question de cours :

Exercice préparé :

On pourra admettre que, si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1.96) \simeq 0.975$

Une population d'insectes compte n individus.
Chaque insecte pond un nombre d'œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Chaque œuf a une probabilité d'éclore égale à $p \in]0,1[$. On nomme N la variable aléatoire égale au nombre d'œufs pondus par un insecte, X la variable aléatoire égale au nombre de ces œufs qui éclosent et Y le nombre d'œufs qui n'éclosent pas.

Pour toutes les simulations numériques, on supposera que $n = 10, p = 0.25$ et $\lambda = 40$.

1. **Simulation informatique**
   (a) En utilisant une approximation par une loi binomiale, rédiger une fonction Python `f1` qui prend en entrée la valeur de λ et retourne une simulation de la variable N.
   (b) En déduire une fonction Python `f2` qui prend en entrée la valeur de λ et p et simule les variables aléatoires X et Y pour un insecte donné.
2. **Approche mathématique**
   (a) Déterminer la loi des variables X et Y.
   (b) Calculer la covariance des variables X et Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) On nomme N_{10} le nombre d'œufs pondus par les 10 insectes et Z_{10} le nombre de ces œufs qui éclosent. Quelle est la loi de N_{10} ?
   (d) Déterminer l'espérance m de la variable aléatoire Z_{10} puis, en utilisant une approximation par une loi normale, déterminer un réel positif ε tel que :
   $$P\left(m - \varepsilon \leqslant Z_{10} \leqslant m + \varepsilon\right) \geqslant 0.95$$
   (e) Comment utiliser la fonction `f2` pour vérifier la réponse à la question précédente ?

Sujet 51

Question de cours :

– –

Exercice préparé :

Soit N un entier supérieur ou égal à 3 . Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne. Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N=10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2. On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque Python `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1 .
2. Soient i et j deux entiers de l'intervalle $\llbracket 1, N \rrbracket$. Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$P\left(\left(X_1=i\right) \cap\left(X_2=j\right)\right)=\left\{\begin{array}{cl}0 & \text { si } \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text { si } \quad 1 \leqslant i<j \leqslant N\end{array}\right.$$

3. (a) Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad P\left(X_1=k\right)=\frac{2(N-k)}{N(N-1)} \quad \text { et } \quad \forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket, \quad P\left(X_2=k\right)=\frac{2(k-1)}{N(N-1)} .$$

   (b) Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.
5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$ et on désigne par D l'événement : $\ll A$ ne prend pas la même valeur que $B \gg$.

   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{N-1}{N}$.

   (b) On définit les variables aléatoires $Y_1=\min (A, B)$ et $Y_2=\max (A, B)$.
   Calculer, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket$ la probabilité conditionnelle :

$$P_D\left(\left(Y_1=i\right) \cap\left(Y_2=j\right)\right)$$

   (c) Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N=10$:

```
from random import *
a=randint(1,10)
b=randint(1,10)
while a==b :
    b=randint(1,10)
print(min(a,b))
print(max (a,b))
```

Sujet 52

Question de cours :

Expliquer comment résoudre une équation différentielle de type $y' + a(t)y = f(t)$ où a et f sont des fonctions continues sur un intervalle I

– –

Exercice préparé :

Soient 2 pièces reliées A et B, avec un accès à l'extérieur uniquement depuis la pièce B. A l'instant $t = 0$, une guépe se trouvee dans la pièce A. Si la guépe est dans la pièce A, la proba qu'elle y reste est $\frac{2}{5}$, la probabilité qu'elle parte dans la pièce B est $\frac{3}{5}$. Si la guépe est dans la pièce B, la probabilité qu'elle y reste est $\frac{2}{5}$, la probabilité qu'elle parte dans la pièce A est $\frac{1}{5}$ et la probabilité qu'elle sorte vers l'extérieur est $\frac{2}{5}$.

On note les évènements suivants :
- A_n : "la guépe est dans la pièce A à l'instant $t = n$ "
- B_n : "la guépe est dans la piece B à l'instant $t = n$ "
- S_n : "la quêpe est sortie pour la première fois à l'instant $t = n$ " .

On note a_n, b_n et s_n leur probabilité.

1. (a) Calculer a_0, b_0, s_0, a_1, b_1 et s_1
   (b) En déduire S_2
2. (a) Ecrire une fonction `deplace` prenant en augument $i \in [\![0, 2]\!]$ correpondant à la pièce dans laquelle se trouve la quêpe à l'instant t ($A = 0, B = 1$, dehors $= 2$) et renvoyant la pièce dans laquelle se trouve la guêpe à l'instant $t + 1$.
   (b) Ecrire une fonction `sortie` renvoyant le temps nécessaire pour que la guêpe trouve la sortie et sorte à l'extérieur.
3. (a) Exprimera a_{n+1} et b_n en fonction de a_n et b_n
   (b) Soit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_n = M^n X_0$ avec $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
4. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer D, matrice diagonale et P matrice inversible tel que $A = PDP^{-1}$
   (b) Déterminer la limite de la suite (S_n).

Sujet 53

Question de cours :
Donner la définition d'une fonction de densité de probabilité.

Exercice préparé

1. (a) Soit f la fonction définie par
$$f : x \longmapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}.$$
Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

   (b) Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.

   Soit A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in [\![1, n]\!]$.

2. (a) Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n.

   (b) En déduire une valeur approchée des valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.

3. Pour $n \geqslant 2$, on pose
$$f_n : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+t}$$
et on considère l'équation $(\mathcal{E}_n)$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1.$$

   (a) Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution dans chacun des intervalles $]-1, +\infty[$ et $]-k, -(k-1)[$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

   (b) On admet (pour l'instant) que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_n)$. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

4. Pour $n \geqslant 2$, on appelle λ_n la solution de $(\mathcal{E}_n)$ comprise entre -2 et -1.

   (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $]-2, -1[$, $f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$, et en déduire la monotonie de la suite (λ_n).

   (b) Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ. Si l'on suppose que $\ell \in]-2, -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.

   (c) Pour $\lambda \in]-2, -1[$, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ.

   (d) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k} \leqslant 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$
et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (e) Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{1+\lambda_n}$ puis de $\lambda_n + 1$. On pourra utiliser un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n}$.

5. Montrer, à l'aide du système traduisant la recherche des valeurs propres/vecteurs propres, que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_n)$.

Exercice non préparé

1. On considère des listes non vides ne contenant qu'une ou deux valeurs différentes. Par exemple ['Marwa', 'Ambre', 'Marwa',
Écrire, en langage Python, une fonction nommée election1 (L) qui prend en entrée une liste L de cette forme et qui renvoie l'élément qui est majoritaire. La fonction doit renvoyer None en cas d'égalité.
Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer 'Ambre'.

2. On considère maintenant des listes non vides, mais pouvant contenir plus de deux valeurs différentes. Par exemple [' Olivia ', 'Gita', 'Mathys', 'Olivia ', 'Mathys'].
Écrire, en langage Python, une fonction nommée election2 (L) qui prend une liste ayant cette forme et qui renvoie la liste des personnes ayant obtenu le maximum de voix (la liste contient plusieurs personnes en cas d'égalité).
Sur la liste donnée en exemple :
la fonction doit renvoyer [' Olivia ', 'Mathys'] ou [' Mathys', 'Olivia '] car Olivia et Mathys sont ex aequo avec deux voix chacun.

Sujet 54

Question de cours
Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un segment.

Exercice préparé
Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geqslant 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \ldots, d_n)$.
   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^\top D X = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$.
   (b) En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^\top D X > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.
2. (a) Écrire une fonction en langage Python nommée f qui prend en entrée une matrice carrée M et qui renvoie $X^\top M X$ où X est un vecteur colonne dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (b) Écrire un script qui affiche le nombre de fois que l'inégalité $X^\top(A - 3I)X > 0$ est vérifiée après 100 exécutions de la fonction pour la matrice A ci-dessous (I désigne la matrice identité de même taille que A).
3. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$
   On considère les vecteurs
$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que le vecteur U_1 est un vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.
   (b) Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3).
   (c) Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^\top$ et $P^\top P = I$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice inversible L telle que $A = LL^\top$.
4. Soit B une matrice symétrique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que $C = L^{-1} B \left(L^{-1}\right)^\top$ est une matrice symétrique (où L est la matrice définie à la question 3(d)).
   En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale [1] $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B = LQ\Delta(LQ)^\top$.
   (b) En utilisant les matrices Q et Δ de la question 4(a), on pose $R = LQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^\top$. Calculer $RR^\top$.

Exercice non préparé

1. Écrire une fonction, en langage Python, nommée alea qui prend en argument un entier positif k et renvoie 1 avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
2. Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe selon les règles suivantes :
   — À l'instant $n = 0$, le mobile est au point d'abscisse 0.
   — Si à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le mobile est au point d'abscisse k, alors à l'instant $n + 1$ il est au point d'abscisse $k + 1$ avec probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ et au point d'abscisse 0 avec probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
   On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n.
   (a) Écrire une fonction, en langage Python, nommée simulX qui prend en entrée un entier naturel n non nul et qui simule n déplacements du mobile et renvoie la valeur de X_n.
   (b) Écrire une fonction, en langage Python, nommée attend qui ne prend pas d'argument en entrée et qui simule les déplacements du mobile jusqu'au premier retour au point d'abscisse 0 et renvoie le plus petit n strictement positif pour lequel $X_n = 0$.

1. Hors programme : Q est inversible et $Q^{-1} = Q^T$

Sujet 55

Question de cours
Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un segment.

Exercice préparé
On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in]0,1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit *positif* si la propriété est présente, *négatif* si elle ne l'est pas.

1. Dans cette question, on étudie le **protocole A**, qui consiste à mélanger le sang des n personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des n personnes. On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.
   (a) Déterminer $A_n(\Omega)$. A_n admet-elle une espérance ?
   (b) Déterminer la loi de A_n.
   (c) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste L de n booléens et renvoie la valeur de A_n, en considérant qu'un True en k^e position signifie que la k^e personne possède la propriété recherchée, un False qu'elle ne la possède pas.
   (d) Utiliser la fonction en langage Python de la question précédente pour estimer numériquement $\mathbb{E}(A_{10})$ avec $q = 0{,}9$.
   (e) Prouver que $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.
   (f) On considère un entier naturel k tel que $1 \leqslant k < n$. Calculer la probabilité que les k premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.
2. Dans cette question, on étudie le **protocole B**, qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des n personnes. On pourra noter B_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole B pour n personnes.
   (a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B ? On exprimera le résultat en fonction de n.
   (b) Étudier les variations et calculer la limite à droite, en 0, de $x \mapsto x^x$.
   (c) Justifier que, pour n assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).
3. Dans cette question, on étudie un procédé par regroupements : on mélange le sang des n premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les n personnes suivantes.
   Dès lors qu'un groupe de n personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les n personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc. On considère k un entier strictement positif.
   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.
   (b) En déduire la loi de G.

Sujet 56

Question de cours
Énoncer le lemme des coalitions.

Exercice préparé

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$(H) \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad (E) \quad y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}.$$
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
   On pourra chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$ sous la forme $y_0 : x \mapsto ce^{2x}$, où c est un réel à déterminer.

2. Pour tout réel x, on note $C(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(t)\,dt$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t}\sin(t)\,dt$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x,
$$C(x) = \frac{e^{2x}\cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x) \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{e^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x).$$
   (b) En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x}\cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto e^{2x}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction en langage Python, nommée intC, prenant en paramètres un réel x et un entier nb_pas, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(t)\,dt$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0\,;\,x]$ doit être découpé en nb_pas intervalles de même longueur.

   Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les quatre fonctions suivantes de E :
$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x}\cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x}\sin(x).$$
   On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.

5. On note u l'application définie sur F par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.
   (a) Montrer que u est linéaire.
   (b) Calculer l'image par u de f_1, f_2, f_3 et f_4.
   (c) En déduire que u est un endomorphisme de F, et déterminer la matrice représentative A de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

7. Résoudre l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)\,X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

Sujet 57

Question de cours

Donner la définition de $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$, où pour tout entier naturel n, A_n est un ensemble.

Exercice préparé

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x).$$

   (a) Représenter en Python sur un même graphe les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2, 2]$.

   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x.

   (d) La fonction g est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \text{Vect}(f_0, f_1, f).$$

   Prouver que la famille (f_0, f_1, f) est une base de F.

3. Pour toute fonction φ de F, on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.

   (a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.

   (b) Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.

   (c) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base (f_0, f_1, f) de F.

   (d) L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f).

   (e) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?