

Question de cours :

Exercice préparé :

1. `import random as rd``def poule(n, p):` `X = 0` `for k in range(n):` `if rd.random() < p:` `X += 1` `else:` `X += 2` `return X`2. S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$. Ainsi, $\mathbb{E}(S_n) = nq$ et $\mathbb{V}(S_n) = nqp$.3. Pour avoir le nombre d'œufs, on compte : il y a eu 2 œufs pondus pendant S_n périodes de temps et 1 œuf pondu pendant le $n - S_n$ autres périodes de temps. Ainsi $X_n = 2 \times S_n + 1 \times (n - S_n) = S_n + n$.4. On obtient : $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(S_n) + n = n(q + 1)$ et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(S_n) = nqp$.5. (a) `def Y(n,p) :` `t = 0` `nb_oeuf = 0` `while nb_oeuf < n :` `t += 1` `if random () < p :` `nb_oeuf += 1` `else :` `nb_oeuf += 2` `return t`(b) `def espY(n,p) :` `S = 0` `for k in range (1000) :` `S += Y(n,p)` `return S/1000``y = [espY(k,1/4) for k in range (100)]``plt.plot(y)``plt.show ()`On semble obtenir une droite. On peut donc conjecturer que $\mathbb{E}(Y_n)$ est une fonction affine de n .(c) Chaque jour la poule pond au moins un œuf donc le nombre de jours nécessaires pour atteindre ou dépasser n œufs est $\leq n$ et ainsi $\boxed{Y_n(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket}$ (d) Soient n un entier naturel et k un entier naturel non nul. La famille $([X_1 = 1], [X_1 = 2])$ forme un système complet d'événements, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales par rapport à cette famille :

$$\mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)}_{=p} \mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_{n+2} = k) + \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 2)}_{=q} \mathbb{P}_{[X_1=2]}(Y_{n+2} = k).$$

Pour le calcul de $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_{n+2} = k)$: pondre $n + 2$ œufs en k périodes sachant qu'on en a pondu 1 à la première période, cela revient à pondre $n + 1$ œufs sur les $k - 1$ périodes suivantes. Ainsi $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_{n+2} = k) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k - 1)$. De même $\mathbb{P}_{[X_1=2]}(Y_{n+2} = k) = \mathbb{P}(Y_n = k - 1)$, ce qui donne bien l'égalité demandée.

(e) Pour un souci de simplicité, on prendra les sommes à partir de 0 (même si la moitié des termes de la somme est nulle). On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+2}) &= \sum_{k=0}^{n+2} k \mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = p \sum_{k=1}^{n+2} k \mathbb{P}(Y_{n+1} = k-1) + q \sum_{k=1}^{n+2} k \mathbb{P}(Y_n = k-1) \\ &= p \sum_{j=0}^{n+1} (j+1) \mathbb{P}(Y_{n+1} = j) + q \sum_{j=0}^{n+1} (j+1) \mathbb{P}(Y_n = j) = pE(Y_{n+1}) + qE(Y_n) + p + q\end{aligned}$$

6. Par récurrence double. La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, alors

$$\mathbb{E}(Y_{n+2}) = p\mathbb{E}(Y_{n+1}) + q\mathbb{E}(Y_n) + 1 = \frac{p - p(-q)^{n+1} + q - q(-q)^n}{(1+q)^2} + \frac{q(n+1) + pn + 1}{1+q} = \frac{1 - (-q)^2(-q)^n}{(1+q)^2} + \frac{n+2}{1+q}$$

ce qui montre $\mathcal{P}(n+2)$.

7. Si $n = 32$ et $p = 3/4$, on obtient $\mathbb{E}(X_{32}) = 40$ et $\mathbb{V}(X_{32}) = 6$. Si on note Z le nombre d'œufs pondus par les 100 poules pendant ces 32 périodes. Z est une somme de 100 variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X_{32} , donc $\mathbb{E}(Z) = 4000$ et $\mathbb{V}(Z) = 600$. On a un nombre de poules assez important pour l'approcher par une loi normale. Si on note N le nombre d'œufs recherché, on a

$$\mathbb{P}(Z \leq N) = \mathbb{P}\left(\frac{Z - 4000}{600} \leq \frac{N - 4000}{600}\right) \simeq \Phi\left(\frac{N - 4000}{600}\right).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \leq N) \geq 0,98 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{N - 4000}{600}\right) \geq 0,98 \Leftrightarrow \frac{N - 4000}{600} \geq 2,06 \Leftrightarrow N \geq 5236$$

ce qui correspond à 873 boîtes de 6.

Exercice non préparé :

Correction du sujet 2

Question de cours :

Exercice préparé :

1. Supposons A diagonalisable. Alors A admet une ou deux valeurs propres. Si A n'avait qu'une seule valeur propre λ , il existerait $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P\lambda I_2 P^{-1} = \lambda I_2$, ce qui est impossible étant donné les coefficients de A . On en déduit que si la matrice A est diagonalisable alors elle admet deux valeurs propres distinctes. Réciproquement, cette condition est suffisante pour assurer la diagonalisabilité de A .

$$\text{rg}(A - \lambda I_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x - \lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ 2x - \lambda & y \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & y - (2x - \lambda)\lambda \end{pmatrix}$$

Le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si $y - (2x - \lambda)\lambda = 0$ ($\Leftrightarrow \lambda^2 - 2x\lambda + y = 0$). Ainsi A est diagonalisable si, et seulement si, l'équation du second degré précédente admet deux solutions distinctes, i.e. si, et seulement si son discriminant est strictement positif, i.e. $4x^2 - 4y > 0$, soit $x^2 - y > 0$.

2. (a)

```
import random as rd
s = 0
for i in range(10000):
    x = rd.random()
    y = rd.random()
    if x**2 - y > 0:
        s += 1
print(s/10000)
```

En l'exécutant on obtient : 0.3358 .

- (b) On rappelle que la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$ est $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Déterminons la fonction F_{X^2} de répartition de la variable aléatoire X^2 . Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car $X(\Omega) = [0, 1]$. Si $x \geq 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x})$ car $X(\Omega) = [0, 1]$. La

fonction de répartition de la variable X^2 est donc : $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$ La fonction de répartition

F_{X^2} est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points (0 et 1), donc X^2 est une variable à densité et $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ en est une densité. La variable aléatoire $-Y$ suit une loi uniforme sur $[-1, 0]$ (la vérification est immédiate). On en déduit que la fonction $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ est une densité de $-Y$.

- (c) Puisque X et Y sont indépendantes, alors X^2 et $-Y$ le sont aussi. Ainsi X^2 et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes à densité, donc leur somme est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est donnée par le produit de convolution des fonctions f et g .

$$\forall z \in \mathbb{R}, h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \mathbf{1}_{[-1,0]}(z-x)dx$$

$$\text{Or : } (S) \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq z-x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ z \leq x \leq z+1 \end{cases}, \text{ donc :}$$

$$- \text{ Si } -1 \leq z \leq 0, (S) \iff 0 \leq x \leq z+1 \text{ et } : h(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{z+1}.$$

$$- \text{ Si } 0 \leq z \leq 1, (S) \iff z \leq x \leq 1 \text{ et } : h(z) = \int_z^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1 - \sqrt{z}.$$

- sinon, pour toute autre valeur de z , (S) n'admet pas de solution et $h(z) = 0$.

3. Puisque $P(X^2 - Y > 0) = \int_0^{+\infty} h(z)dz = \int_0^1 (1 - \sqrt{z})dz = [x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}]_0^1 = \frac{1}{3}$, on en déduit, d'après la première question, la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice non préparé :

Correction du sujet 3

Question de cours :

Soient X une variable de densité f telle que X à valeurs dans $]a, b[$ et u une fonction continue sur $]a, b[$,

$u(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_a^b u(t)f(t) dt$ est absolument convergente.

Et alors : $E(u(X)) = \int_a^b u(t)f(t) dt$

Exercice préparé :

1.

$$\det(K_1 - \lambda I_2) = 0 \iff \lambda^2 = -1$$

$$\iff \lambda = \pm i$$

Les valeurs propres de K_1 dans \mathbb{C} sont i et $-i$: $\text{Sp}(K_1) = \{-i, i\}$. K_1 admettant deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} et K_1 étant carrée d'ordre 2, on peut dire que K_1 est diagonalisable sur \mathbb{C} .

En revanche, l'équation $\lambda^2 + 1 = 0$ d'inconnue λ n'admettant aucune solution réelle, K_1 n'admet aucune valeur propre dans \mathbb{R} : K_1 n'est donc pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

$$E_i(K_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-i}(K_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

2. def K(n):

```
Kn = np.zeros([n+1, n+1])
for i in range(n):
    Kn[i, i+1] = i+1
    Kn[i+1, i] = -n-1 + (i+1)
return Kn
```

3. for n in range(1, 11):

```
print("valeurs propres de K" + str(n) + ":")
print(la.eigvals(K(n)), "\n")
```

Les valeurs obtenues permettent de faire la conjecture suivante :

- si n est pair : $\text{Sp}(K_n) = \{-ni, (-n+2)i, \dots, -2i, 0, 2i, 4i, \dots, (n-2)i, ni\}$
- si n est impair : $\text{Sp}(K_n) = \{-ni, (-n+2)i, \dots, -3i, -i, i, 3i, \dots, (n-2)i, ni\}$

Dans les deux cas, le spectre de K_n peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Sp}(K_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

4. (a) Il suffit de diviser par $\cos^n(x) \neq 0$

$$\lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \dots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.$$

(b) Il suffit de montrer que la famille \mathcal{B}_n est libre.

En prolongeant le raisonnement précédent on obtient $P(\tan(x)) = 0$ où $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$

P a alors une infinité de racines donc il est nul d'où les coefficients sont nuls et ainsi \mathcal{B}_n est libre.

On en déduit $\dim(V_n) = n + 1$

(c) - La linéarité de φ_n résulte de la linéarité de la dérivation :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall (f, g) \in V_n^2 : (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

- Reste à prouver que pour tout $f \in V_n, \varphi_n(f) \in V_n$, pour cela il suffit de montrer que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \varphi_n(f_k) \in V_n$,

or $\varphi_n(f_0) = -nf_1 \in V_n, \varphi_n(f_k) = kf_{k-1} - (n-k)f_{k+1} \in V_n$ si $1 \leq k \leq n-1$ et $\varphi_n(f_n) = nf_{n-1} \in V_n$

donc φ_n est un endomorphisme de V_n .

D'après les calculs précédents,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & -n+1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice K_n . Ainsi, $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) = K_n}$

(d) Il suffit de remarquer que

$$\exp(i(n-2k)x) = \exp(i(n-k)x) \cdot \exp(-ikx)$$

(e) En utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} i^j \sin^j(x) \cos^{n-k-j}(x) \right) \left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-i)^l \sin^l(x) \cos^{k-l}(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k \binom{n-k}{j} \binom{k}{l} (-1)^l i^{j+l} \cos^{n-j-l}(x) \sin^{j+l}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k \binom{n-k}{j} \binom{k}{l} (-1)^l i^{j+l} f_{j+l}(x) \quad (\text{avec } 0 \leq k+l \leq n) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k appartient à V_n .

(f) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(g_k) = i(n-2k)g_k$ avec $g_k \neq 0$.

Cela prouve que les nombres complexes $i(n-2k)$, avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sont des valeurs propres de l'endomorphisme φ_n .

Ces $n+1$ valeurs propres étant deux à deux distinctes, comme $\dim(V_n) = n+1$, φ_n n'admet pas d'autres valeurs propres. Ainsi

$$\text{Spec}(\varphi_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Comme K_n est la matrice de φ_n dans la base \mathcal{B}_n , elle possède les mêmes valeurs propres. On a ainsi démontré la conjecture de la question 3 :

$$\text{Spec}(K_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

(g) La matrice K_n appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et a $n+1$ valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{K_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$

(h) La matrice K_n est inversible si et seulement si, 0 n'est pas valeur propre, donc

$$\boxed{K_n \text{ est inversible si et seulement si } n \text{ est impair.}}$$

(i) On suppose ici n pair. On note $p = \frac{n}{2}$

On a assez simplement $\ker(\varphi_n) = \text{vect}(1)$. (Les fonctions constantes)

Pour trouver le noyau de K_n cherchons les coordonnées de $g_p = 1$ dans \mathcal{B}_n

$$\begin{aligned} g_p(x) &= (\cos^2(x) + \sin^2(x))^p \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \sin^{2j}(x) \cos^{2p-2j}(x) \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} f_{2j}(x) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } g_p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} f_{2j} + \sum_{j=0}^{p-1} 0 f_{2j+1}.$$

On en déduit que les coordonnées de g_p dans la base \mathcal{B}_n sont :

$$\left(\binom{p}{0}, 0, \binom{p}{1}, 0, \binom{p}{2}, 0, \dots, \binom{p}{p-1}, 0, \binom{p}{p} \right)$$

$$\text{Ker}(K_n) = \text{Vect}(X_k) \text{ où } X_k = \left(1, 0, p, 0, \binom{p}{2}, 0, \dots, 0, \binom{p}{2}, 0, p, 0, 1\right)^T.$$

Exercice non préparé :

```
import random as rd

def gene(n):
    c = "ACGT"
    ch = ""
    for k in range(n):
        ch += rd.choice(c)
    return ch

def nbAC(g):
    compteur = 0
    for k in range(len(g) - 1):
        if g[k:k+2] == "AC?":
            compteur += 1
    return compteur
```

Correction du sujet 4

Question de cours :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

Exercice préparé :

1. Classique. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

2. Pour $n = 2$,

k	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, $E(X) = \frac{3}{2}$ pour $n = 3$,

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$

, $E(X) = \frac{19}{9}$

3. import random as rd

```
def liste(n):
    return [ rd.randint(1, n) for k in range(n) ]
```

```
def simul_X(n):
    return len(set(liste(n)))
```

```
def esperance_X(n):
    N = 10000
    c = 0
    for k in range(N):
        c += simul_X(n)
    return c/N
```

4. $P(X = 1) = \frac{n}{n^n}$ $P(X = n) = \frac{n!}{n^n}$ $P(X = 2) = \frac{\binom{n}{2}(2^n - 2)}{n^n}$ $P(X = n-1) = \frac{n \times (n-1) \times \binom{n}{2} \times (n-2)!}{n^n}$

5. (a) $X_i \hookrightarrow B(p)$ avec $p = P(A_i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ et $E(X_i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

(b) On remarque que : $X = \sum_{k=1}^n X_k$ ce qui donne avec la linéarité de $E(\cdot)$

$$E(X) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right) \quad \text{et ainsi} \quad E(X) \sim \frac{e-1}{e}n$$

6. (a) $X_i X_j \hookrightarrow B(p)$ avec $p = P(A_i \cap A_j)$

$$P(A_i \cap A_j) = 1 - P(\bar{A}_i \cap A_j) - P(A_i \cap \bar{A}_j) - P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j)$$

$$P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j) = \frac{(n-2)^n}{n^n}, \quad P(\bar{A}_i \cap A_j) = P(A_i \cap \bar{A}_j) = \frac{(n-1)^n - (n-2)^n}{n}$$

$$X_i X_j \hookrightarrow B(p) \quad \text{avec} \quad p = \frac{n^n - 2(n-1)^n + (n-2)^n}{n^n}$$

(b)

$$V(X) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j))$$

$$= n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right) + n(n-1) \left(\frac{n^n - 2(n-1)^n + (n-2)^n}{n^n} - \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)^2\right)$$

Exercice non préparé :

Des réponses parmi d'autres.

```
1. def verif(L, k):
    n, j= len(L), 0
    b = True
    while(b and j<n):
        if (L[j]<0 or L[j]>k):
            b = False
            j += 1
    return (j==n)

2. def premierplusfrequent(L, k):
    n, r = len(L), -1
    m = 0
    for i in range(n):
        c = 0
        for j in range(n):
            if L[j]==L[i]:
                c += 1
        if c > m:
            r, m = i, c
    return L[r], m
```

Correction du sujet 5

Question de cours :

Si deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

Exercice préparé :

1. (a) Il suffit d'échelonner $A - \lambda I_3$ pour trouver le spectre de A , ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres étant 2.
- (b) On montre facilement la liberté, et comme elle est composée de trois vecteurs, la famille \mathcal{B} est bien une base de \mathbb{R}^3 . On a alors $\varphi(a_1) = 3a_1$, $\varphi(a_2) = a_1 + 3a_2$ et $\varphi(a_3) = a_3$, d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Par formule de changements de base, on obtient donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve l'inverse avec Python :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre et homogène, et on a donc directement la solution

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = e^{3t}.$$

- (b) On note d'abord que $X'(t) = AX(t)$, et donc

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) = MY(t).$$

La première ligne du système donne donc bien le bon résultat.

- (c) On note que $u(t) = \frac{1}{2}(f(t) + g(t))$, et donc $u(0) = 1$. On trouve alors pour tout t : $u(t) = e^{3t}(t + 1)$.
- (d) On a pour tout t :

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = PY(t) = \begin{pmatrix} u(t) + w(t) \\ u(t) - w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

De même qu'en 2c, on trouve $w'(t) = w(t)$, avec $w(0) = \frac{1}{2}(f(0) - g(0)) = 0$. Ainsi, on a $w = 0$, puis $f(t) = g(t) = u(t)$.

Exercice non préparé :

```
from math import *
import random as rd
```

```
def somme(f, a, b, n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S += f(a + k*(b-a)/n)
    return S
```

```
def integrale(f, a, b):
    n = 1000
```

```

return somme(f, a, b, n)*(b-a)/n

def f(x):
    return exp(-x*x)

def g(x):
    if x < 1:
        return f(x/(1-x))/(1-x)**2
    return 0

print(integrale(g,0,1))
print(sqrt(pi)/2)

```

A début ce sont des questions classiques sur la méthode des rectangles.

La dernière question permet d'ouvrir sur beaucoup de questions :

- Sommes de Riemann
- Fonctions prolongeable par continuité,
- Changement de variable, démonstration de la formule :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} f\left(\frac{t}{1-t}\right) dt.$$

Correction du sujet 6

Question de cours :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$

Dire que f est dérivable en a signifie que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite réel en a .

(On peut avoir des questions sur ce qu'est I : intervalle non trivial, réunion d'intervalles, ensemble quelconque ...)
(ce qui compte c'est que f soit définie sur un voisinage de a)
(certains préfèrent parler de limite finie que de limite réelle)

Exercice préparé :

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g , alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une densité $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. (a) Question ultra-classique, quasiment du cours :

$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ et

$Y = -\frac{1}{\mu} \ln(V)$ suit la loi exponentielle de paramètre μ

- (b)

```
from math import *
import random as rd
```

```
def f(lbd, mu):
    X = - log(rd.random())/lbd
    Y = - log(rd.random())/mu
    return min(X, Y)
```

- (c) Z est à valeurs dans $]0; +\infty[$ et pour $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= 1 - P(\min(X, Y) > x) \\ &= 1 - P((X > x) \cap (Y > x)) \\ &= 1 - P(X > x) P(Y > x) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \times e^{-\mu x} \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent des lois exponentielles.} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est la fonction :

$$F_Z : \begin{cases} \forall x < 0 & F_Z(x) = 0 \\ \forall x \in [0; +\infty[, & F_Z(x) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)x} \end{cases}$$

On remarque que $Z = \min(X, Y)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

- (d) Y est à valeurs dans \mathbb{R}^+ donc $-Y$ est à valeurs dans \mathbb{R}^- et pour $x \in \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned} F_{(-Y)}(x) &= P(-Y \leq x) \\ &= P(Y \geq -x) \\ &= 1 - F_Y(-x) \\ &= e^{\mu x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } F_{(-Y)}(x) = \begin{cases} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

$F_{(-Y)}$ est C^0 sur \mathbb{R} tout entier et C^1 sur \mathbb{R} sauf en 0 donc Z est à densité avec :

$$g : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) \mu e^{\mu t}$$

- (e) X et $-Y$ sont indépendantes, X a pour densité $f : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t}$ et $-Y$ a pour densité $g : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) \mu e^{\mu t}$

donc $X - Y$ est à densité, et une de ses densité est donnée par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) \mu e^{\mu(x-t)} dt$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mu e^{\mu x} e^{-(\mu+\lambda)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\ &= \lambda \mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\ &= \lambda \mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} \mathbb{1}_{[x, +\infty[}(t) dt && \text{En effet : } x-t \leq 0 \iff x \leq t \\ &= \begin{cases} \lambda \mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} dt & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda \mu e^{\mu x} \int_x^{+\infty} e^{-(\mu+\lambda)t} dt & \text{si } 0 < x \end{cases} \end{aligned}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda x} & \text{si } 0 < x \end{cases} \text{ est une densité de } X - Y$$

- (f)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq Y) &= \mathbb{P}(X - Y \leq 0) \\ &= \int_{-\infty}^0 h(x) dx \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \lim_{r \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\mu} e^{\mu x} \right]_r^0 \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} e^{\mu r} \right) \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

car $\mu > 0$, d'où

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

2. (a) On utilise l'approche fréquentielle par moyenne empirique, ce qui se justifie par la loi faible des grands nombres.

```
N = 10**5 # nombre de réalisations
M_X2creux, M_X3creux = 0, 0 # moyennes empiriques associées aux évènements
for k in range(N):
    X1, X3 = -m.log(rd.random()), -m.log(rd.random())
    X2, X4 = -m.log(rd.random())/2, -m.log(rd.random())/2
    if X2 <= X1 and X2 <= X3: # X2 est un creux
        M_X2creux += 1
    if X3 <= X2 and X3 <= X4: # X3 est un creux
        M_X3creux += 1
```

```
print('Probabilité que X2 soit un creux :', M_X2creux/N)
print('Probabilité que X3 soit un creux :', M_X3creux/N)
```

On obtient, en exécutant ce script,

Probabilité que X_2 soit un creux : 0.50077

Probabilité que X_3 soit un creux : 0.20037

- (b) L'évènement « X_2 est un creux » est l'évènement $(X_2 \leq X_1, X_2 \leq X_3) = (X_2 \leq \min(X_1, X_3))$. D'après la question 1(c), $\min(X_1, X_3)$ suit la loi exponentielle de paramètre $1 + 1 = 2$ (X_1 et X_3 sont bien indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 1). D'après le lemme des coalitions, puisque X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, X_2 et $\min(X_1, X_3)$ sont indépendantes. La question 1(f) montre alors que

$$\mathbb{P}(X_2 \leq \min(X_1, X_3)) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, « X_2 est un creux » a pour probabilité $\frac{1}{2} = 0,5$. Le même raisonnement montre que « X_3 est un creux » a pour probabilité $\frac{1}{5} = 0,2$.

3. (a) Si X_2 et X_3 sont tous les deux des creux, en particulier $X_2 \leq X_3$ et $X_3 \leq X_2$ d'où $X_2 = X_3$. Autrement dit, on a l'inclusion

$$(\text{« } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont des creux »}) \subset (X_2 = X_3)$$

d'où

$$0 \leq \mathbb{P}(\text{« } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont des creux »}) \leq \mathbb{P}(X_2 = X_3).$$

Or, $\mathbb{P}(X_2 = X_3) = \mathbb{P}(X_2 - X_3 = 0) = 0$ car $X_2 - X_3$ est à densité d'après la question 1(e) (X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi exponentielle). On en déduit donc par encadrement que la probabilité que X_2 et X_3 soient des creux est nulle.

- (b) L'évènement « X_4 est un creux » ne dépend que des variables aléatoires X_3, X_4 et X_5 . L'évènement « X_8 est un creux » ne dépend que des variables aléatoires X_7, X_8 et X_9 . Or, les variables aléatoires X_3, X_4, X_5, X_7, X_8 et X_9 sont mutuellement indépendantes. Le lemme des coalitions assure alors que les évènements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont indépendants.
- (c) Par le même argument qu'à la question précédente, les évènements « X_{4i} est un creux » pour $i \in \{1, \dots, 10\}$ sont mutuellement indépendants et par le même calcul qu'à la question 2(b), chaque évènement « X_{4i} est un creux » pour $i \in \{1, \dots, 10\}$ a la même probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi : la loi du nombre de creux parmi X_4, \dots, X_{40} suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$.

Exercice non préparé :

1. `def eval(P, a):`

```
    res = 0
    for k in range(len(P)):
        res += P[k]*a**k
    return res
```

2. `def deriv(P):`

```
    if len(P) == 1: # si P est constant
        return [0]
    Pprime = []
    for k in range(1, len(P)):
        Pprime.append(k*P[k])
    return Pprim
```

3.

$$\begin{aligned} f(P) &= 2XP - P' \\ &= -a_1 + (2a_0 - 2a_2)X + (2a_1 - 3a_3)X^2 + \dots + (2a_{n-2} + na_n)X^{n-1} + 2a_{n-1}X^n + 2a_nX^{n+1} \end{aligned}$$

`def f(P):`

```
    n = len(P) - 1
    if n == 0:
        return [0, 2*P[0]]
    res = [-P[1]] # le terme constant est -a1
    for k in range(1, n):
        res.append(2*P[k-1] - (k+1)*P[k+1])
    res.extend([2*P[n-1], 2*P[n]])
    return res
```

Correction du sujet 7

Question de cours :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , λ un scalaire et u un vecteur de E .

Dire que λ est une valeur propre de f signifie qu'il existe un vecteur v non nul de E tel que : $f(v) = \lambda v$

Dire que u est un vecteur propre de f signifie qu'il existe un scalaire μ tel que : $f(u) = \mu u$

Exercice préparé :

- Y_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 1/3)$.
- Soit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. On suppose que l'événement $[Y_n = k]$ est réalisé : l'urne U_n contient alors k boules blanches et $3 - k$ boules rouges. On effectue 3 tirages avec remise dans cette urne. La probabilité de tirer une blanche à chaque tirage est $p = k/3$ donc Y_{n+1} sachant $[Y_n = k]$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3, k/3)$. Ainsi pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = \binom{3}{j} \left(\frac{k}{3}\right)^j \left(\frac{3-k}{3}\right)^{3-j}.$$

- import random as rd

```
def tirages(n):
    L = [1]
    nb_bl = 1      # nombre de blanche
    Y0 = 1
    for k in range(1,n+1):
        p = nb_bl / 3      #proba de tirer une blanche au tirage k
        nb_bl = 0# initialisation de Yk
        for i in range(3):
            if rd.random () < p:
                nb_bl += 1
        L.append(nb_bl)# on ajoute Yk dans L
    return L
```

- (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$; $\sum_{j=0}^3 j P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = \sum_{j=0}^3 j \binom{3}{j} \left(\frac{k}{3}\right)^j \left(\frac{3-k}{3}\right)^{3-j}$: c'est l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(3, k/3)$. D'après le cours, cette espérance vaut $3 \times \frac{k}{3} = k$. Ainsi on a bien

$$\sum_{j=0}^3 j P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = k.$$

- (b) On a : $\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \sum_{j=0}^3 j P(Y_{n+1} = j)$. On considère alors le système complet d'événements $([Y_n = k])_{k \in \{0, 1, 2, 3\}}$. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient que pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$P(Y_{n+1} = j) = \sum_{k=0}^3 P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) P(Y_n = k).$$

Donc en remplaçant dans $\mathbf{E}[Y_{n+1}]$, il vient $\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \sum_{j=0}^3 j \left(\sum_{k=0}^3 P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) P(Y_n = k) \right)$.

En inversant les Σ , on obtient : $\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{j=0}^3 j P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) \right) P(Y_n = k)$. En utilisant le résultat du 4.(a), on a donc $\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \sum_{k=0}^3 k P(Y_n = k)$. On reconnaît alors l'espérance de Y_n . Ainsi on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}[Y_{n+1}] = \mathbf{E}[Y_n].$$

- (c) La suite $(\mathbf{E}[Y_n])$ est une suite constante et comme $\mathbf{E}[Y_0] = 1$, on conclut que

$$\mathbf{E}[Y_n] = 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5.

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} + c_{n+1} &= \sum_{k=1}^2 \left(\frac{k^2(3-k)}{9} + \frac{k(3-k)^2}{9} \right) P(Y_n = k) \\
 &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^2 (k^2(3-k) + k(3-k)^2) P(Y_n = k) \\
 &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^2 k(3-k)[k + (3-k)] P(Y_n = k) \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^2 k(3-k) P(Y_n = k) \\
 &= \frac{1}{3} (2P(Y_n = 1) + 2P(Y_n = 2))
 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{3}(b_n + c_n).$$

6. La relation précédente donne $(b_n + c_n)$ converge vers 0.

Comme ce sont des suites à valeurs positives donc

$$\boxed{(b_n) \text{ et } (c_n) \text{ convergent vers } 0}$$

7. Si au rang n il n'y a plus de boule blanche, alors il n'y en aura plus au rang $n + 1$,

autrement dit $(Y_n = 0) \subset (Y_{n+1} = 0)$ ce qui entraîne $a_n \leq a_{n+1}$ et ainsi $\boxed{(a_n) \text{ est croissante}}$.

Si au rang n il y a 3 boules blanches, alors il y en aura encore 3 au rang $n + 1$,

autrement dit $(Y_n = 3) \subset (Y_{n+1} = 3)$ ce qui entraîne $d_n \leq d_{n+1}$ et ainsi $\boxed{(d_n) \text{ est croissante}}$.

(a_n) et (d_n) sont croissantes et majorées par 1 donc $\boxed{\text{elles convergent}}$

8. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(Y_n) = 1$, donc $b_n + 2c_n + 3d_n = 1$, en passant à la limite on a $3 \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1$

donc $\boxed{(d_n) \text{ converge vers } 1/3}$ et ainsi $\boxed{(a_n) \text{ converge } 2/3}$

Interprétation.

Après un grands nombre de tirages, il est quasi-certain que l'urne sera unicolore avec une probabilité de $2/3$ qu'elle contienne 3 boules rouges et une probabilité de $1/3$ qu'elle contienne 3 boules blanches.

9. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$.

L'événement $[T > n]$ signifie que l'urne U_n contient au moins une blanche et au moins une rouge.

Donc $[T > n] = [Y_n = 1] \cup [Y_n = 2]$.

Ces deux événements étant incompatibles, on a : $P(T > n) = P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) = b_n + c_n$. D'après

$$6., \quad b_n + c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(T > n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(b) Loi de T :

- $T(\Omega) = \mathbf{N}^*$ car il faut au minimum un tirage pour qu'il ne reste qu'une seule couleur.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé; $[T > n - 1] = [T = n] \cup [T > n]$ (événements incompatibles) donc $P(T > n - 1) = P(T = n) + P(T > n)$.

$$\text{Ainsi } P(T = n) = P(T > n - 1) - P(T > n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{2}{3}\right).$$

$$P(T = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}.$$

On observe que T suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

D'après le cours on a $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{1/3}$ et ainsi $\mathbf{E}(T) = 3$.

Exercice non préparé :

```
1. def somme_cumul(L):  
    M = []  
    s = 0  
    for elt in L:  
        s += elt  
        M.append(s)  
    return M
```

2. (a) Si $\text{dureeA} = [3, 2, 5, 1, 1, 1]$ et $\text{dureeF} = [4, 2, 2, 4, 4, 2]$, le calcul des durées cumulées de chacune de ces deux listes donne :

- $[3, 5, 10, 11, 12, 13]$ pour le joueur A

- $[4, 6, 8, 12, 16, 18]$ pour le joueur F .

En position k , on obtient l'instant où le joueur a terminé la résolution du problème k .

En comparant les termes en position k de ces deux listes, on sait à quel joueur doit être attribué le problème k .

$\text{repartition}([3, 2, 5, 1, 1, 1], [4, 2, 2, 4, 4, 2])$ renvoie le couple $([0, 1, 3, 4, 5], [2])$ car le seul problème pour lequel F termine sa résolution avant A est le problème 2 (en effet $8 < 10$).

```
(b) def repartition(dureeA ,dureeF):  
    attrA, attrF = [], []  
    duree_cumula = somme_cumul(dureeA)  
    duree_cumulF = somme_cumul(dureeF)  
    n =len(dureeA)  
    for k in range(n):  
        if duree_cumula[k] < duree_cumulF[k]:# A résout en premier le pb k  
            attrA.append(k)  
        elif duree_cumulF[k] < duree_cumula[k]: # F résout en premier le pb k  
            attrF.append(k)  
    return attrA, attrF
```

Correction du sujet 8

Question de cours :

Enoncer l'inégalité de Markov.

Exercice préparé :

```

1. def simulX(n):
    a = randint(0, 3)
    L = a*[1] + (3-a)*[0]
    shuffle(L)
    for i in range(n):
        k = randint(0,2)
        L[k] = 1 - L[k]
    return sum(L)

```

$$2. U_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La formule des probabilités totales donne : (sce : $((X_n = i))_{0 \leq i \leq 3}$)

$$U_{n+1} = \left(P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i) \right)_{(i,j)} U_n$$

- $P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = 0) = 0$ pour $j = 0, 2, 3$
- Sachant que : $[X_n = 1]$. (il y a un et un seul numéro dans A)

la probabilité d'obtenir $[X_{n+1} = 0]$ est égale à celle d'obtenir ce numéro : donc $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}$

On obtient de même toutes les probabilités conditionnelles.

donc pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$

3. (a) - φ est linéaire.

$$\begin{aligned} \forall(Q, P) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall(P, Q) \in E^2, \\ \varphi(\alpha P + pQ) = \dots \\ = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q) \end{aligned}$$

- De plus

$$\begin{cases} \varphi(1) = X \\ \varphi(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X^2 \\ \varphi(X^2) = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^3 \\ \varphi(X^3) = X^2 \end{cases} \quad (*)$$

done $\varphi(\text{vect}(1, X, X^2, X^3)) \subset E$

$$\varphi(E) \subset E.$$

Donc φ est un endomorphisme de E

De plus avec (*) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(\varphi) &= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= M. \end{aligned}$$

(b)

$$\text{b) } P_0(X) = \frac{1}{8}(X+1)^3 \quad P_1(X) = \frac{1}{8}(X^2-1)(X+1) \quad P_2(X) = \frac{1}{8}(X^2-1)(X-1) \quad P_3(X) = \frac{1}{8}(X-1)^3$$

$$\text{coord}(P_k) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M \text{ coord}(P_k) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \dots$$

$$\text{donc } \varphi(P_0(X)) = P_0(X), \quad \varphi(P_1(X)) = \frac{1}{3}P_1(X) \quad \dots$$

$$\text{on obtient bien : } \boxed{\text{pour } k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k.}$$

(c) P_0, P_1, P_2, P_3 sont vecteurs propres de φ associés à $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ et -1 .

φ a 4 valeurs propres distinctes et $\dim(E) = 4$ donc φ est diagonalisable.

4. (a) $\text{cond}_B(Q) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (= U_0)$ (question 2)

(b) On remarque que $Q = P_0 + P_2$ ce qui entraîne $\varphi^n(Q) = 1^n \cdot P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot P_2$

(c) $U_n = M^n U_0$ donc

$$\begin{aligned} M^n V_0 &= \text{coord}_B \left(P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } U_n \rightarrow \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 1/2)$

```
5. n = 1000
N = 1000
T = [0, 0, 0, 0]
for k in range(N):
    T[simulX(n)] += 1
print([t/N for t in T])
print([1/8, 3/8, 3/8, 1/8])
```

Exercice non préparé :

Correction du sujet 9

Question de cours :

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Donner son tableau de variation.

Exercice préparé :

1. $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j}$, $j^3 = 1$ et $j^4 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$,

2. (a)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & r^2 \\ s^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (rs)^2 \quad \text{donc } M \text{ a deux valeurs propres distinctes } rs \text{ et } -rs \text{ (car } rs \neq 0) \\ = (\lambda - rs)(\lambda + rs)$$

on en déduit que M est diagonalisable et $\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres de M .

(b) • Si $r = 0$ et $s = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc M est diagonalisable.

• Si $r = 0$ et $s \neq 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{sp}(M) = \{0\}$ s'il était diagonalisable alors elle serait nulle et ainsi M n'est pas diagonalisable.

• Idem pour $r \neq 0$ et $s = 0$.

3. def decalage(L):

```
n = len(L)
S = []
for k in range(1,n):
    S.append(L[k])
S.append(L[0])
return S
```

def matrice(a1, a2, a3):

```
A = []
L = [a1, a2, a3]
for i in range(3):
    A.append(L)
    L = decalage(L)
return A
```

4. Si a_1, a_2, a_3 sont réels, la matrice A est réelle et symétrique donc elle est diagonalisable.

5. $AU = (a_1 + a_2 + a_3)U$ donc U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $(a_1 + a_2 + a_3)$.

6. (a) On a

$$AX_1 = \begin{pmatrix} a_1 + ja_2 + j^2a_3 \\ a_2 + ja_3 + j^2a_1 \\ a_3 + ja_1 + j^2a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AX_2 = \begin{pmatrix} a_1 + j^2a_2 + ja_3 \\ a_2 + j^2a_3 + ja_1 \\ a_3 + j^2a_1 + ja_2 \end{pmatrix}.$$

On note alors que $AX_1 = (a_1 + ja_2 + j^2a_3)X_2$ et $AX_2 = (a_1 + j^2a_2 + ja_3)X_1$. On peut donc prendre pour s une racine complexe de $X^2 - (a_1 + ja_2 + j^2a_3)$ et pour r une racine complexe de $X^2 - (a_1 + j^2a_2 + ja_3)$, qui existent bien par le théorème de d'Alembert-Gauss.

(b) On a donc $AX_1 = s^2X_2$ et $AX_2 = r^2X_1$. Soit alors φ l'endomorphisme de $(\mathbb{R}^3)^2$ défini par

$$\varphi(X_1) = s^2X_2 \quad \text{et} \quad \varphi(X_2) = r^2X_1;$$

la matrice de φ dans la base X_1, X_2 est donc M .

On a alors, par la question 2, $\varphi(rX_1 + sX_2) = rs(rX_1 + sX_2)$, et $\varphi(-rX_1 + sX_2) = -rs(-rX_1 + sX_2)$.

Finalement,

$$A(rX_1 + sX_2) = rs^2X_2 + sr^2X_1 = rs(rX_1 + sX_2) \quad \text{et} \quad A(-rX_1 + sX_2) = -rs^2X_2 + sr^2X_1 = -rs(-rX_1 + sX_2).$$

Plusieurs cas se présentent alors :

- si $(r, s) \neq (0, 0)$, alors $rX_1 + sX_2$ et $-rX_1 + sX_2$ sont non nuls, la famille (X_1, X_2) étant libre. On a alors deux vecteurs propres de A associés aux valeurs propres rs et $-rs$.

- si $(r, s) = (0, 0)$, alors X_1 et X_2 sont vecteurs propres associés à la valeur propre 0 .

Finalement, avec la question 5, on obtient

$$\text{Sp}(A) = \{a_1 + a_2 + a_3, rs, -rs\}.$$

7. (a) On a ici $a_1 = 1, a_2 = j$ et $a_3 = j^2$. Donc $s^2 = 1 + j^2 + j = 0$, et $r^2 = 1 + 1 + 1 = 3$. A n'a donc qu'une seule valeur propre, 0 . Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. A n'est donc pas diagonalisable.
- (b) On a ici $a_1 = j, a_2 = 1$ et $a_3 = 0$. Donc $s^2 = j + j + 0 = 2j$ et $r^2 = j + j^2 = -1$. On peut donc prendre $s = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $r = i$. On a alors

$$\text{Sp}(A) = \left\{1 + j, \sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{3}}, -\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{3}}\right\}.$$

La matrice A a trois valeurs propres distinctes, et donc est diagonalisable.

Exercice non préparé :

Exercice préparé :

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.

$$\text{rg}(A) = 2 \text{ donc } 0 \in S_p(A) \text{ et } \dim(E_0(A)) = 1$$

$$\text{rg}(A - I_3) = \dots = 1 \text{ donc } 1 \in S_p(A) \text{ et } \dim(E_1(A)) = 2$$

$$\text{or } \sum_{\lambda \in \text{sp}(M)} \dim(E_\lambda)(M) \leq 3 \text{ donc } \boxed{\text{sp}(A) = \{0, 1\}}$$

Détail du calcul des rangs :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}(6A) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

et on utilisant ces calculs on montre $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(A)$

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - I_3) &= \text{rg}(6A - 6I_3) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et on utilisant ces calculs on montre $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(A)$

2. $\text{rg}(A) = 2$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible}}$.

3. `def proj(M) :`

```

N = [[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]
for i in range(3):
    for j in range(3):
        for k in range(3):
            N[i][j] += M[i][k]*M[k][j]
        if N[i][j] != M[i][j]:
            return False
    return True

```

```
A = [[5/6, -2/6, 1/6], [-2/6, 2/6, 2/6], [1/6, 2/6, 5/6]]
```

```
print(proj(A))
```

```
# Cela affiche False alors que A^2 = A
```

Ce problème vient de la représentation des nombres à virgule en Python qui n'est pas exacte.

On peut imaginer une solution comme :

```
def proj(M):
    N = [[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            for k in range(3):
                N[i][j] += M[i][k]*M[k][j]
            if abs(N[i][j] - M[i][j]) > 1E-8:
                return False
    return True
```

4. on a $A^2 = A$ donc $f \circ f = f$

Raisonnons par double inclusion :

- Soit $x \in E_1$, on a alors $f(x) = x$ donc $x \in \text{Im}(f)$ et ainsi $E_1 \subset \text{Im}(f)$
- Soit $x = f(y) \in \text{Im}(f)$, on a alors $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ donc $\text{Im}(f) \subset E_1$

$$\text{Im } f = E_1$$

Remarque les autres méthodes ici sont très calculatoires.

5. def ps(u, v):

```
c = 0
for k in range(3):
    c += u[k]*v[k]
return c
```

6. (a) $E_1 = \text{Vect}(\underbrace{(-1, 1, 1)}_{u_1}, \underbrace{(1, 2, 5)}_{u_2})$ $E_0 = \text{Vect}(\underbrace{(1, 2, -1)}_{v_1})$

$v_1 \perp u_1$ et $v_1 \perp u_2$ donc $v_1 \perp E_1$ et ainsi $E_0 \perp E_1$, autrement dit : $\forall u \in E_0, \forall v \in E_1, \langle u, v \rangle = 0$.

(b) $\text{Im}(f) = E_1$ donc $f(x) \in E_1$

$f \circ f = f$ donc $f(x) - x \in E_0$ et ainsi : $\forall y \in E_1, f(x) - x$ orthogonal à y .

7. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \right)$ est une base orthonormée de E_1 .

Pour $t = (1, 2, 1)$ on a : $f(t) = \frac{1}{3}(1, 2, 5)$ donc $t - f(t) = \frac{1}{3}(2, 4, -2)$ et ainsi $d(t, E_1) = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Remarque : On sait que la distance de u à F est $\|u - p_F(u)\|$.

Correction du sujet 11

Question de cours :

il suffit que F_X soit continue sur \mathbb{R} en entier et de classe C^1 sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de point.
 Pour déterminer une densité on dérive F_X là où elle est dérivable. (on complète comme on veut)

Exercice préparé :

$$1. \quad (a) \quad f'_n(x) = n \frac{(x^n - 1/n)}{x}.$$

Pour les limites : pas de difficulté en 0 et en $+\infty$, une Crois.Compar. donne $f_n(x) \sim x^n$

x	0	u_n	$n^{-\frac{1}{n}}$	v_n	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	0	+	
f_n	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$
			$f_n(-n^{-\frac{1}{n}}) < 0$		

(b)

$$\begin{aligned} f_n\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ln(n) - n \\ &= \frac{1}{n}(\ln(n) + 1) - n \\ &\leq \frac{1}{n}(n - 1 + 1) - n \\ &\leq 1 - n \\ &< 0 \quad \text{car } n \geq 2 \end{aligned}$$

Avec le tableau de variations et le théorème de la bijection on en déduit :

Pour $n \geq 2$, il existe un unique réel $u_n \in]0, n^{-\frac{1}{n}}[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

2. (a)

$$\begin{aligned} f_n\left((2n)^{1/n}\right) &= 2n - \frac{1}{n} \ln(2n) - n \\ &\geq n - \frac{1}{n}(2n - 1) \\ &\geq n - 2 + \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{car } n \geq 2. \end{aligned}$$

donc $f_n((2n)^{1/n}) \geq f(v_n)$

or $v_n \in]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$, $(2n)^{\frac{1}{n}} \in]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$ donc $\forall n \geq 2$, $v_n \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$.

(b) `from matplotlib.pyplot import *`
`from math import *`

```
def f(n,x):
    return x**n - log(x) - n
```

```
def v(n):
    a = n**(-1/n)
    b = (2*n)**(1/n)
    while b-a > 0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(n,m) > 0:
            b = m
    else:
```

```

    a = m
    return (a+b)/2
figure('vn')
x = [ k for k in range(2, 30) ]
y = [ v(k) for k in range(2, 30) ]
plot(x,y,'x')
show()

```

Conjecture : (u_n) semble converger vers 1.

(c)

$$n^{-1/n} \leq v_n \leq (2n)^{1/n} \text{ donc } -\frac{\ln n}{n} \leq \ln(v_n) \leq \frac{\ln(2n)}{n}$$

On en déduit que : $(\ln(v_n))$ converge vers 0 puis que (v_n) converge vers 1

(d)

$$v_n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n) + n$$

donc avec l'indication, $n \ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

de plus $v_n \rightarrow 1$ donc $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n - 1$ donc $v_n - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$

3. (a) def u(n):

```

a = 0.0001
b = n**(-1/n)
while b-a > 0.001:
    m = (a+b)/2
    if f(n,m) > 0:
        b = m
    else:
        a = m
return (a+b)/2

```

```

figure('un')
x = [ k for k in range(2, 30) ]
y = [ u(k) for k in range(2, 30) ]
plot(x,y,'x')
show()

```

(b) $u_{n+1}^{n+1} = \ln(u_{n+1}) - (n+1) = 0$ et $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - \ln(u_{n+1}) - n$ donc

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + 1 \\ &= u_{n+1}^n (1 - u_{n+1}) + 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ puis que $u_{n+1} < u_n$ (u_n) est décroissante.

(c) $0 \leq u_n \leq n^{-\frac{1}{n}}$ donc $0 \leq u_n^n \leq \frac{1}{n}$ donc (gendarmes) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$.

$u_n^n - \ln(u_n) - n = 0$ donc $\ln(u_n e^n) = u_n^n \rightarrow 0$ donc $u_n \sim e^{-n}$

Exercice non préparé :

Question de cours :

Si f continue sur $[a, b]$ et si f dérivable que $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Exercice préparé :

1. Il est clair que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Pour X_2 , on a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On a alors

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P_{X_1=0}(X_2 = 0)P(X_1 = 0) + P_{X_1=1}(X_2 = 0)P(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{r}{r+1} \\ P(X_2 = 1) &= P_{X_1=0}(X_2 = 1)P(X_1 = 0) + P_{X_1=1}(X_2 = 1)P(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{r+1} \\ &= \frac{1}{r+1} \\ P(X_2 = 2) &= P_{X_1=0}(X_2 = 2)P(X_1 = 0) + P_{X_1=1}(X_2 = 2)P(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{r}{r+1} \end{aligned}$$

X_3 peut lui valoir 0, 1, 2 ou 3 et

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P_{X_2=0}(X_3 = 0)P(X_2 = 0) + P_{X_2=1}(X_3 = 0)P(X_2 = 1) + P_{X_2=2}(X_3 = 0)P(X_2 = 2) \\ &= \frac{r}{2(r+1)} \frac{r^2}{1+r^2} \\ P(X_3 = 1) &= P_{X_2=0}(X_3 = 1)P(X_2 = 0) + P_{X_2=1}(X_3 = 1)P(X_2 = 1) + P_{X_2=2}(X_3 = 1)P(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2(r+1)} \frac{1}{1+r^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r+1} \\ P(X_3 = 2) &= P_{X_2=0}(X_3 = 2)P(X_2 = 0) + P_{X_2=1}(X_3 = 2)P(X_2 = 1) + P_{X_2=2}(X_3 = 2)P(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} \frac{r}{r+1} \frac{1}{1+r^2} \\ P(X_3 = 3) &= P_{X_2=0}(X_3 = 3)P(X_2 = 0) + P_{X_2=1}(X_3 = 3)P(X_2 = 1) + P_{X_2=2}(X_3 = 3)P(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{r}{r+1} \frac{r^2}{1+r^2} \end{aligned}$$

2. On propose la fonction suivante :

```
import random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX(n,r):
    alpha = 1
    beta = 1
    X = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < alpha/(alpha+beta):
            X += 1
            alpha *= r
        else:
            beta *=r
    return X
```

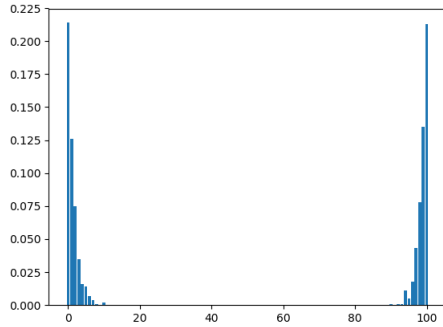
3. (a) On itère le procédé :

```
def loiX(n,r):
    N=1000
    loi = [0 for _ in range(n+1)]
    for _ in range(N):
        loi[simulX(n,r)] += 1/N
    return loi
```

(b) On peut utiliser :

```
plt.bar(range(0,100+1),loiX(100,2))
plt.show()
```

On obtient alors le diagramme suivant :



4. On note que pour tout n , $P(X_{n+1} = n + 1) = \frac{r^n}{1+r^n}P(X_n = n)$, et on en déduit par une simple récurrence que pour tout n

$$P(X_n = n) = \prod_{i=1}^n \frac{r^{i-1}}{1+r^{i-1}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{r^i}{1+r^i}.$$

5. On note que pour tout n , $p_n(r) > 0$ et alors

$$\frac{p_{n+1}(r)}{p_n(r)} = \frac{r^{n+1}}{1+r^{n+1}} < 1.$$

La suite $(p_n(r))$ est donc strictement décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge. De même, comme $r > 1$, on a pour tout n $q_n(r) > 0$, et

$$\frac{q_{n+1}(r)}{q_n(r)} = 1 - \frac{1}{r^{2n+3}} < 1.$$

La suite $(q_n(r))$ est donc strictement décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.

6. Pour la première égalité proposée, il suffit de noter que pour tout k ,

$$\frac{r^k}{1+r^k} = \frac{r^k}{r^k(r^{-k}+1)} = \frac{1}{1+r^{-k}}.$$

Remarque : on a une erreur d'énoncé ; le dernier terme du produit devrait être $\frac{1}{1+r^{-n}}$.

On a donc, avec l'inégalité admise : $1+r^{-k} \leq e^{r^{-k}}$, puis

$$\frac{1}{1+r^{-k}} \geq e^{-r^{-k}}.$$

On en déduit, tous les termes étant strictement positifs :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, p_n(r) &\geq e^{-r^{-1}} e^{-r^{-2}} \dots e^{-r^{-n}} \\ &\geq \exp\left(-\sum_{k=1}^n r^{-k}\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{1}{r} \frac{1-r^{-n}}{1-r^{-1}}\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{1-r^{-n}}{r-1}\right) \end{aligned}$$

Les deux suites convergent, et donc en passant à la limite, on obtient bien

$$p(r) \geq \exp\left(-\frac{1}{r-1}\right).$$

7. En utilisant l'inégalité admise à la question précédente, on a alors pour tout k

$$1 - \frac{1}{r^{2k+1}} \leq e^{-\frac{1}{r^{2k+1}}},$$

et donc pour tout k ,

$$\begin{aligned} q_n(r) &\leq \exp\left(-\sum_{k=0}^n \frac{1}{r^{2k+1}}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(r^2)^k}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{r} \frac{1 - \frac{1}{r^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{r^2}}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{r - \frac{1}{r^{2n+1}}}{r^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

Comme précédemment, les deux suites convergent, et en passant à la limite, on obtient bien le résultat annoncé.

8. On note qu'on a pour tout n

$$P(X_n = n) = \frac{1}{2} p_{n-1}(r),$$

et donc la suite $(P(X_n = n))$ converge bien, vers $\frac{1}{2}p(r)$.

On peut donc encadrer cette limite :

$$\forall r > 1, \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{1-r}\right) \leq \frac{1}{2} p(r) \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{r}{1-r^2}\right).$$

Exercice non préparé :

Correction du sujet 13

Question de cours :

Pour x dans $]0, 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$,

Exercice préparé :

1. (a) $4p^2 - 4p + 1 = (2p + 1)^2 \geq 0$ donc $4p(p - 1) \geq -1$ et ainsi on a bien : $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$
- (b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\forall t > 0 \quad P(|\bar{X}_n - p| < t) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{t^2}$$

en prenant $t = \sqrt{\frac{5}{n}}$ on obtient :

$$P\left(p \in \left[X_n - \sqrt{\frac{5}{n}}; X_n + \frac{\sqrt{5}}{n}\right]\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{5}$$

a fortiori

$$P\left(p \in \left[X_n - \sqrt{\frac{5}{n}}; X_n + \frac{\sqrt{5}}{n}\right]\right) \geq \underbrace{1 - \frac{1}{20}}_{0,95}$$

2. `import random as rd`
`from math import *`

```
def test(n, p, a, b):
    c = 0
    for k in range(n):
        c += int(rd.random() < p)
    return int(a <= c/n <= b)
```

3. (a) $(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) = (n\bar{X}_n \geq nt(p + \varepsilon))$
 $= (e^{nt\bar{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)})$
- (b) L'inégalité de Markov donne :

$$P\left(e^{nt\bar{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)}\right) \leq \frac{E\left(e^{nt\bar{X}_n}\right)}{e^{nt(p+\varepsilon)}}$$

$$\begin{aligned} E\left(e^{nt\bar{X}_n}\right) &= \sum_{k=0}^n e^{tk} P(n\bar{X}_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (e^t p + q)^n \\ &= \exp(n \ln(e^t p + q)) \end{aligned}$$

On en déduit enfin l'inégalité suivante : $P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t + q) - t(p+\varepsilon))}$

(c) On a l'inégalité suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n\left(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon\right)}.$$

Une étude de fonction permet de montrer que le minimum de la fonction $t \mapsto e^{n\left(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon\right)}$ est obtenu en $t = 4\varepsilon$ et vaut -2ε .

D'où l'inégalité : $P(\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$.

4. En posant $Y_k = 1 - X_k$ on peut appliquer tous les résultats précédents en remplaçant p par q et ainsi

$$P(\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

5.

$$\begin{aligned} (|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) &= (\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \cup (\bar{X}_n - p \leq -\varepsilon) \\ &= (\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \cup (1 - \bar{Y}_n - p \leq -\varepsilon) \\ &= (\bar{X}_n - p \geq \varepsilon) \cup (\bar{Y}_n - q \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

6.

$$\begin{aligned} 2e^{-2n\varepsilon^2} = 0,05 &\Leftrightarrow \exp(-2n\varepsilon^2) = 0,025 \\ &\Leftrightarrow -2n\varepsilon^2 = \ln(0,025) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{-\frac{1}{2n} \ln(0,025)} \end{aligned}$$

$\sqrt{-\frac{\ln(0,025)}{2}} \approx 1,35$ et $\sqrt{5} \approx 2,24$ donc on a ici un intervalle de confiance de plus petite amplitude.

Exercice non préparé :

Question de cours :

Une application linéaire soit injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

Exercice préparé :

1. (a) Calculons la fonction de répartition de $Z = -\ln(U)$.
Soit donc $t \in \mathbb{R}$. Si $t < 0$, il est clair que $P(Z \leq t) = 0$. Sinon, on a

$$\begin{aligned} P(Z \leq t) &= P(-\ln(U) \leq t) \\ &= P(U \geq e^{-t}) \\ &= 1 - P(U < e^{-t}) \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, et donc $-\ln(U)$ suit bien cette loi.

- (b) `import math as m`
`import random as rd`

```
def y(n):
    liste = [-m.log(rd.random()) for k in range(n)]
    return max(liste)
```

- (c) `def s(n):`
 `f = 0`
 `for k in range(1,n+1):`
 `f += 1/k`
 `return f`

```
def conj(n):
    N = 10000
    moyenne = 0
    for _ in range(N):
        moyenne += y(n)/N
    return moyenne/s(n)
```

```
print([conj(k) for k in range(1,100)])
```

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note que le maximum des X_i est inférieur à t si et seulement si tous les X_i sont inférieurs à t . On a donc, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(Y_n \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \leq x\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \text{ par indépendance} \\ &= (1 - e^{-x})^n \end{aligned}$$

Les X_i ne prenant que des valeurs positives, il est clair que $F_n(x) = 0$ si x est strictement négatif.

La fonction F_n est bien \mathcal{C}^1 , sauf éventuellement en 0, et est bien continue sur \mathbb{R} (en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-x})^n = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0$).

En dérivant cette fonction, on obtient donc une densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si non} \end{cases} .$$

3. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\varphi(n) : \forall u \in [0, 1], (1 - u)^n \geq 1 - nu$.

— $\varphi(1)$ est triviale.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\varphi(n)$, et montrons $\varphi(n + 1)$. On a alors

$$\begin{aligned} (1 - u)^{n+1} &= (1 - u)(1 - u)^n \\ &\geq (1 - u)(1 - nu) \text{ par } \varphi(n) \\ &= 1 - (n + 1)u + nu^2 \\ &\geq 1 - (n + 1)u \end{aligned}$$

On a bien $\varphi(n + 1)$.

Par récurrence, on a donc bien $\forall u \in [0, 1], (1 - u)^n \geq 1 - nu$.

(b) La fonction $1 - F_n$ est continue en 0, et on étudie donc l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Soit $x \geq 0$. Alors $e^{-x} \in [0, 1]$, et donc

$$1 - F_n(x) \leq 1 - (1 - ne^{-x}) = ne^{-x}.$$

Les fonctions $1 - F_n$ et $x \mapsto ne^{-x}$ étant positives, et cette dernière étant intégrable, $\int_0^\infty (1 - F_n(x))dx$ converge.

De plus, on a de la même façon pour tout $x \geq 0$

$$0 \leq x(1 - F_n(x)) \leq nxe^{-x} \rightarrow 0,$$

et par encadrement des limites, $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

4. (a) Soit $A > 0$. Soient u et v les fonctions définies sur $]0, A]$ par $u(x) = x$ et $v(x) = 1 - F_n(x)$. u et v sont de classe \mathcal{C}_1 sur $]0, A]$, et donc par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^A x f_n(x) dx &= - \int_0^A u(x) v'(x) dx \\ &= - [u(x)v(x)]_0^A + \int_0^A u'(x)v(x) dx \\ &= -A(1 - F_n(A)) + \int_0^A (1 - F_n(x)) dx \end{aligned}$$

(b) On a vu en 3b que le membre de droite de l'égalité précédente convergeait quand $A \rightarrow \infty$, vers $\int_0^\infty (1 - F_n(x)) dx$. L'intégrale $\int_0^\infty x f_n(x) dx$ converge, et donc Y_n admet bien une espérance, qui est celle demandée.

5. La fonction $\varphi : t \in]0, 1[\mapsto -\ln(1 - t)$ est bien de classe \mathcal{C}^1 , et donc par changement de variables :

$$E(Y_n) = \int_0^1 (1 - F_n(-\ln(1 - t))) \frac{dt}{1 - t} = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt.$$

On reconnaît alors une somme géométrique :

$$\forall t \neq 1, \frac{1 - t^n}{1 - t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k,$$

et donc par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Exercice non préparé :

Correction du sujet 15

Question de cours :

Une famille \mathcal{F} de vecteurs de E est génératrice de E signifie que : $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice préparé :

1. $f \geq 0$ et f est continue sur \mathbb{R} et $\int_0^x f(t) dt = \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2a}\right) \right]_0^x = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

f est une densité

2. $F_X : x \mapsto \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

3. (a) Y est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(X^2 \leq 2ax) \\ &= P(X \leq \sqrt{2ax}) \\ &= F_X(\sqrt{2ax}) \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Y suit la loi exponentielle de paramètre 1

(b) Y est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* donc $U = 1 - e^{-Y}$ est à valeurs dans $]0, 1[$, et pour $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} P(U \leq x) &= P(1 - e^{-Y} \leq x) \\ &= P(Y \leq -\ln(1-x)) \\ &= 1 - e^{\ln(1-x)} \\ &= x \end{aligned}$$

U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$

(c) `import random as rd`
`from math import *`

`def Y():`
`return -log(1-rd.random())`

(d) `def X(a):`
`return sqrt(2*a*Y())`

4. (a) $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(t)dt &= \int_0^x \frac{t^2}{a} \exp\left(\frac{-t^2}{2a}\right) dt \\ &= \left[t \times \left(-\exp\left(-\frac{t^2}{2a}\right)\right) \right]_0^x - \int_0^x -\exp\left(\frac{-t^2}{2a}\right) dt \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-t^2}{2a}\right) dt = \sqrt{2\pi a} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}$$

(c) $E(Y) = 1$ et $X^2 = 2aY$ donc $E(X^2) = 2a$

$$(d) V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a - \frac{\pi a}{2} = \frac{(4 - \pi)a}{2}.$$

$$5. (a) E(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n E(X_k^2) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n 2a = a, \text{ donc } \boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

(b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{a} \exp\left(\frac{-t^2}{2a}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{4u^2}{a} e^{-\frac{u}{a}} du$$

$$u = \frac{t^2}{2}$$

$$du = t dt$$

donc $E(X^4) = 8a^2$ (on passe par la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$) :

donc X^2 admet une variance et $V(X^2) = 4a^2$.

(c)

$$V(S_n) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k^2)$$

$$= \frac{1}{4n^2} \times n \times 4a^2$$

$$= \frac{a^2}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$P\left(|S_n - E(S_n)| < \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{V(S_n)}{\frac{1}{100}}$$

$$P\left(a \in \left]S_n - \frac{1}{10}; S_n + \frac{1}{10}\right[\right) \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\geq \frac{n-100}{n}$$

$$\frac{n-100}{n} = \frac{95}{100} \Leftrightarrow 100n - 10000 = 95n$$

$$\Leftrightarrow 5n = 10000$$

$$\Leftrightarrow n = 2000$$

Exercice non préparé :

Question de cours :

Si $\alpha = 1$ \ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Si $\alpha \neq 1$ $x \mapsto \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice préparé :

1. On propose le code :

```
import random as rd

def embauche(n,s):
    i = 0
    x = 0
    while i < n and x < s:
        i += 1
        x = rd.random()
    return x

def competence(n,s):
    N = 1000
    comp = 0
    for _ in range(N):
        comp += embauche(n,s)
    return comp/N
```

2. Si le seuil est fixé à 0, alors le premier candidat sera presque sûrement embauché. Ainsi,

$$E(Z_{n,0}) = E(X_1) = \frac{1}{2}.$$

Si le seuil est fixé à 1, alors presque sûrement aucun candidat n'aura la compétence nécessaire, et donc le dernier candidat sera embauché. Ainsi

$$E(Z_{n,1}) = E(X_n) = \frac{1}{2}.$$

3. On a par indépendance des candidats

$$\begin{aligned} P(B \cap [Z_{n,s} \leq t]) &= P([X_1 < s] \cap [X_2 < s] \cap \dots \cap [X_{n-1} < s] \cap [X_n \leq t]) \\ &= s^{n-1}t \end{aligned}$$

4. On a par indépendance des candidats

$$\begin{aligned} P(A_k \cap [Z_{n,s} \leq t]) &= P([X_1 < s] \cap [X_2 < s] \cap \dots \cap [X_{k-1} < s] \cap [s \leq X_k \leq t]) \\ &= \begin{cases} s^{k-1}(t-s) & \text{si } t < s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

5. On peut appliquer la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{A_1, \dots, A_{n-1}, B\}$.

Si $t \geq s$:

$$\begin{aligned} P(Z_{n,s} \leq t) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k \cap [Z_{n,s} \leq t]) + P(B \cap [Z_{n,s} \leq t]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s^{k-1}(t-s) + s^{n-1}t \\ &= (t-s) \frac{1-s^{n-1}}{1-s} + ts^{n-1} \end{aligned}$$

Si $t < s$, la même formule donne

$$P(Z_{n,s} \leq t) = ts^{n-1}.$$

6. Ainsi, la fonction de répartition de $Z_{n,s}$ est continue (on vérifie facilement la continuité en s , 0 et 1), de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en s , 0 et 1.

Ainsi, $Z_{n,s}$ est une variable à densité, de densité

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1-s^n}{1-s} & \text{si } s \leq t \leq 1 \\ s^{n-1} & \text{si } 0 \leq t < s \end{cases},$$

la densité étant nulle partout ailleurs.

7. On peut donc calculer l'espérance de $Z_{n,s}$, la densité étant continue par morceaux sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} E(Z_{n,s}) &= \int_0^s tf(t)dt + \int_s^1 tf(t)dt \\ &= s^{n-1} \frac{1}{2} s^2 + \frac{1-s^n}{1-s} \frac{1}{2} (1-s^2) \\ &= \frac{1}{2} s^{n+1} + \frac{1}{2} (1-s^n)(1+s) \\ &= \frac{1}{2} (1-s^n + s) \end{aligned}$$

8. Soit $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall s \in]0, 1[, \varphi(s) = \frac{1}{2} (1 - s^n + s).$$

Alors φ est dérivable, et pour tout $s \in]0, 1[$,

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2} (1 - ns^{n-1}).$$

La fonction φ est donc croissante sur $]0, (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}]$ et décroissante sur $[(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}, 1[$.

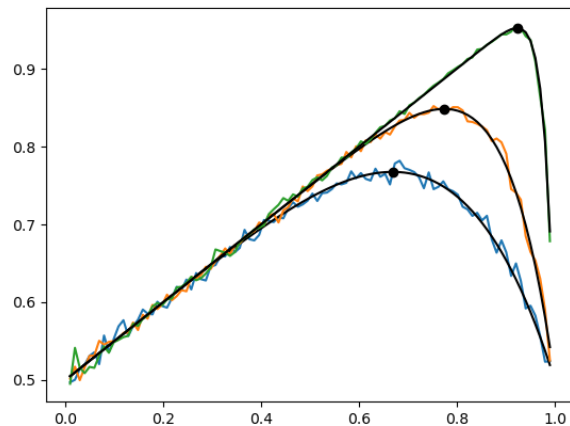
Elle admet donc un maximum en $s_n^* = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$, qui vaut

$$\varphi(s_n^*) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \right).$$

9. On propose le script suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

for n in [5,10,50]:
    N=100
    s = np.linspace(0,1,N+2)
    s = s[1:-1]
    y= []
    for val in s:
        y.append(competence(n,val))
    plt.plot(s,y)
    y = .5*(1+s-s**n)
    plt.plot(s,y,'k')
    xs = (1/n)**(1/(n-1))
    ys = .5*(1+xs-xs**n)
    plt.plot([xs],[ys],'ko')
plt.show()
```



Correction du sujet 17

Question de cours :

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas, « f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ » si la fonction quotient f/g tend vers 1 en $+\infty$.

Exercice préparé :

1. (a) La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0 = f(0)$ donc f continue sur \mathbb{R} .
- (b) La fonction g est C^1 sur \mathbb{R}^* (produit de fonctions C^1) et, pour tout $x \neq 0$: $g'(x) = 2x \ln |x| + x$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$, g est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2f(x) + x$
 Comme f est continue sur \mathbb{R} , g' aussi et g est bien de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- (c) $\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{2f(x) + x}{x} = 1 + 2 \ln |x|$ qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 .
 La fonction g' n'étant pas dérivable en 0 , g n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \mu f(x) = 0$
 En prenant successivement $x = 0, 1, 2$ on montre que $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) = (0, 0, 0)$
 Par conséquent, la famille (f_0, f_1, f) est libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel F .

3. # Version sans numpy

```
def f(x):
    if x == 0:
        return 0
    return x*log(abs(x))
```

```
def F(a,b,c):
    x = [ -1 + 2*k/100 for k in range(101) ]
    y = [ a + b*t + f(t) for t in x ]
    plt.plot(x,y, 'b')
    plt.show()
```

Version numpy

```
def f(x):
    return x*np.log(np.abs(x)) # ici difficile de mettre le cas x = 0
```

```
def F(a,b,c):
    x = np.linspace(-1, 1, 100)
    y = a + b*x + f(x)
    plt.plot(x,y, 'r')
    plt.show()
```

4. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a + bx + cf(x)$
 $x = 0$ donne $a = h(0)$, $x = 1 \rightarrow b = h(1) - a$ et $x = 2 \rightarrow c = (h(2) - a - 2b)/f(2)$

```
def f(x):
    # Ici cela ne fonctionne pas avec les fonctions numpy
    if x == 0:
        return 0
    return x*log(abs(x))
```

```
def Question4(h):
    a = h(0)
    b = h(1)-a
    c = (h(2)-a-2*b)/f(2)
    return [a,b,c]
```

5. (a) Soit $\varphi \in F$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu f$. Ainsi, pour tout réel x , $x\varphi(x) = \lambda_0 x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu x f(x) = x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu g(x)$.
 Puisque g est dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto x\varphi(x)$ est bien dérivable sur \mathbb{R} .

Soient $(\varphi_1, \varphi_2) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, on a bien :

$$\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \lambda\Phi(\varphi_1)(x) + \Phi(\varphi_2)(x).$$

Ainsi $\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)$ et Φ est bien linéaire.

(b)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f_0)(x) = 1 = f_0(x) \text{ donc } \Phi(f_0) = f_0, \quad \Phi(f_1)(x) = 2x = 2f_1(x) \text{ donc } \Phi(f_1) = 2f_1 \\ \Phi(f)(x) = g'(x) = x + 2f(x) = f_1(x) + 2f(x) \text{ donc } \Phi(f) = f_1 + 2f \end{aligned}$$

(c) On a démontré que Φ est linéaire et, puisque $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f)$ appartiennent à F , par linéarité, pour tout élément φ de F , $\Phi(\varphi)$ appartient également à F donc Φ est bien un endomorphisme de F et

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3))$$

(d) La matrice M est de rang 3 (*matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont non nuls*) donc M est inversible et Φ est bijective. Par le calcul, on obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(e) M étant triangulaire, on peut lire ses valeurs propres sur sa diagonale donc $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$. Par le calcul, on détermine les sous-espaces propres de M , on obtient :

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 2 donc, d'après la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, M n'est pas diagonalisable. Par conséquent, Φ non plus.

Exercice non préparé :

Question de cours :

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^3} \text{ sur }]0; +\infty[\text{ admet pour dérivée } t \mapsto \frac{-3}{t^4} \text{ et pour primitive } t \mapsto \frac{-1}{2t^2}$$

Exercice préparé :

```
1. import numpy as np
   rg = np.linalg.matrix_rank
   vp = np.linalg.eig

   def rang_M(a):
       M = [[a,0,a],[0,1,0],[a,0,a]]
       return rg(M)
```

```
2. def elts_propres_M(a):
       M = [[a,0,a],[0,1,0],[a,0,a]]
       return vp(M)
```

```
print(elts_propres_M(0))

(array([0., 1., 0.]), array([[1., 0., 0.],
                             [0., 1., 0.],
                             [0., 0., 1.])))
```

3. La première et la troisième colonne de $M(a)$ sont égales, et non nulles si et seulement si $a \neq 0$. La deuxième colonne de $M(a)$ est linéairement indépendante des deux autres colonnes. Ainsi :

$$\text{rang}(M(a)) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

4. On a vu que $\text{rang}(M(a)) \neq 3$. Ainsi 0 est une valeur propre de f_a .
De plus $f_a(e_2) = e_2$, donc 1 est aussi une valeur propre de f_a .

5. - Cas 1 : $a = 0$.

$$\text{Alors } M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc : } \text{Ker}(f_0) = \text{Vect}(e_1, e_3).$$

Donc, si $a = 0$, une base du noyau de f_0 est la famille (e_1, e_3) .

- Cas 2 : $a \neq 0$.

$$\text{Alors : } (x, y, z) \in \text{Ker}(f_a) \Leftrightarrow M(a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + az = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Puisque } a \neq 0, \text{ ce système équivaut à : } \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Donc, si $a \neq 0$, une base du noyau de f_a est la famille $(e_1 - e_3)$.

6. (a) On calcule :

$$M(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : $f_a(e_1 + e_3) = 2a(e_1 + e_3)$.

Ainsi $e_1 + e_3$ est un vecteur propre de f_a , associé à la valeur propre $2a$.

Trois cas apparaissent :

- Cas 1 : $a \notin \{0, \frac{1}{2}\}$. De plus $\text{Sp}(f_a) = \{0, 1, 2a\}$ et les sous-espaces propres de f_a sont des droites vectorielles :

$$E_0 = \text{Vect}(e_1 - e_3) \quad ; \quad E_1 = \text{Vect}(e_2) \quad ; \quad E_{2a} = \text{Vect}(e_1 + e_3).$$

- Cas 2 : $a = \frac{1}{2}$.
 - . $Sp(f_a) = \{0, 1\}$; . $dim(E_1) = 2$ et $E_1 = Vect(e_2, e_1 + e_3)$; . $dim(E_0) = 1$ et $E_0 = Vect(e_1 - e_3)$
- Cas 3 : $a = 0$.
 - . $Sp(f_a) = \{0, 1\}$; . $dim(E_0) = 2$ et $E_0 = Vect(e_1 - e_3, e_1 + e_3)$; . $dim(E_1) = 1$ et $E_1 = Vect(e_2)$;

(b) En conclusion, dans tous les cas, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3 donc f_a est diagonalisable.

7. (a)

- . La matrice nulle, notée 0, commute avec A , puisque $0.A = 0 = A.0$. Ainsi $0 \in F$.
- . Considérons deux scalaires α_1 et α_2 , deux éléments de F notés B_1 et B_2 .

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) &= \alpha_1 AB_1 + \alpha_2 AB_2 \\ &= \alpha_1 B_1 A + \alpha_2 B_2 A \quad \text{car } B_1 \in F \text{ et } B_2 \in F \\ &= (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A. \end{aligned}$$

Ainsi $(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.

En conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b)

On vérifie facilement que g est linéaire : si a_1 et a_2 sont deux réels, si Q_1 et Q_2 sont deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, alors :

$$\begin{aligned} g(a_1 Q_1 + a_2 Q_2) &= \left((a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(\lambda_1), (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(\lambda_2), (a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(\lambda_3) \right) \\ &= a_1 \left(Q_1(\lambda_1), Q_1(\lambda_2), Q_1(\lambda_3) \right) + a_2 \left(Q_2(\lambda_1), Q_2(\lambda_2), Q_2(\lambda_3) \right) \\ &= a_1 g(Q_1) + a_2 g(Q_2). \end{aligned}$$

Ainsi g est une application linéaire.

Il reste maintenant à prouver que g est une application bijective.

Supposons qu'un élément Q de $\mathbb{R}_2[X]$ appartienne au noyau de g .

Alors $g(Q) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $(Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), Q(\lambda_3)) = (0, 0, 0)$. Ainsi Q admet au moins trois racines, qui sont supposées distinctes. Or Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, donc Q est nécessairement le polynôme nul.

On vient de prouver que $Ker(g) = \{0\}$. Donc g est injective.

avec le théorème du rang on en déduit g surjective.

Finalement, g est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3

(c) La matrice A est d'ordre 3 et possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable et $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:

il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $C = P^{-1}MP$, ce qui se réécrit $M = PCP^{-1}$, puis on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow (PDP^{-1})(PCP^{-1}) = (PCP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &\Leftrightarrow P(DC)P^{-1} = P(CD)P^{-1} \\ &\Leftrightarrow DC = CD \end{aligned}$$

On notera que toutes les équivalences sont valables puisque P et P^{-1} sont des matrices inversibles.

(d) Considérons $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$ (on évite la notation c_i qui est utilisée dans la suite de l'énoncé) et calculons :

$$CD = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \lambda_1 & a_2 \lambda_2 & a_3 \lambda_3 \\ b_1 \lambda_1 & b_2 \lambda_2 & b_3 \lambda_3 \\ d_1 \lambda_1 & d_2 \lambda_2 & d_3 \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs :

$$DC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1 & a_2\lambda_1 & a_3\lambda_1 \\ b_1\lambda_2 & b_2\lambda_2 & b_3\lambda_2 \\ d_1\lambda_3 & d_2\lambda_3 & d_3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

On raisonne alors par équivalence : $CD = DC$ équivaut à un système linéaire de 9 équations très simples.

On ne va pas toutes les écrire, mais parmi celles-ci il y a trois équations correspondant aux termes diagonaux qui ne donnent aucune information : par exemple, $a_1\lambda_1 = a_1\lambda_1$. Les six autres équations, correspondant aux termes non diagonaux, sont plus intéressantes. Par exemple $a_2\lambda_2 = a_2\lambda_1$. Ceci équivaut à : $a_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$, c'est à dire $a_2 = 0$ puisqu'on a supposé $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

En raisonnant ainsi, on obtient que $CD = DC$ si, et seulement si, $a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = d_1 = d_2 = 0$.

Pour le dire simplement : C commute avec D si et seulement si C est diagonale.

Faisons le bilan des deux dernières questions :

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP) \text{ est diagonale} \\ &\Leftrightarrow \exists(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3, P^{-1}MP = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3, M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

(e)

On va raisonner par double inclusion, en notant $G = \{Q(A), Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$.

Remarquons avant de commencer que $G = Vect(I_3, A, A^2)$.

• Tout d'abord, I_3 commute avec A , A commute avec A et A^2 commute avec A . Donc I_3, A et A^2 appartiennent à F . Or F est stable par combinaison linéaire, donc $G = Vect(I_3, A, A^2) \subset F$.

• Pour l'inclusion réciproque, supposons que $M \in F$.

D'après la question (5d), il existe trois réels c_1, c_2, c_3 tels que $M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

D'après la question (5b), puisque g est une application bijective, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $g(Q) = (c_1, c_2, c_3)$, autrement dit tel que $Q(\lambda_1) = c_1, Q(\lambda_2) = c_2, Q(\lambda_3) = c_3$. Ainsi

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & Q(\lambda_3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= PQ \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\ &= Q \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \right) = Q(A). \end{aligned}$$

On a bien démontré l'inclusion réciproque.

(f) Ici $a = 1$ donc $M(1)$ a trois valeurs propres distinctes, donc le résultat de (5e) peut être appliqué : $F = Vect(I_3, A, A^2)$ donc (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de F .

Il ne reste qu'à montrer la liberté de la famille (I_3, A, A^2) pour conclure.

On a :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soient γ_1, γ_2 et γ_3 trois scalaires tels que $\gamma_1 I_3 + \gamma_2 A + \gamma_3 A^2 = 0$. On a alors :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \quad ; \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \quad ; \quad \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0.$$

Conclusion : (I_3, A, A^2) est une base de F .

Correction du sujet 19

Question de cours :

Une variable aléatoire est à densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X vérifie :

F_X est continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points

Exercice préparé :

$$1. \quad (a) \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, [X^T D]_{1,j} = \sum_{k=1}^n [X^T]_{1,k} [D]_{k,j} = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{[D]_{k,j}}_{=0 \text{ si } k \neq j} = d_j x_j$$

$$\text{Puis } \boxed{[X^T D X]_{1,1}} = \sum_{i=1}^n [X^T D]_{1,i} [X]_{i,1} = \sum_{i=1}^n d_i x_i x_i = \boxed{\sum_{i=1}^n d_i x_i^2}.$$

(b) `import numpy as np`

```
def question_1_b(X, D):
    n = len(X)
    s = 0
    for i in range(n):
        s += D[i]*X[i]**2
    return s
```

(c) Supposons que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs. Alors pour tout vecteur colonne X non nul,

$$X^T D X = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_i}_{>0} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} > 0$$

car $\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_i \neq 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout vecteur colonne X non nul, $X^T D X > 0$. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On pose X_k le k ième vecteur de la base canonique. Alors

$$X_k^T D X_k > 0 \iff \sum_{i=1}^n d_i [X_k]_i^2 > 0 \iff d_k > 0.$$

Ainsi, on a bien l'équivalence.

2. (a) $AU_1 = 4U_1$ donc $\boxed{U_1 \text{ est un vecteur propre de } A}$ associé à la valeur propre 4.

(b) $AU_2 = U_2$ et $AU_3 = U_3$. U_2 et U_3 sont donc des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1. De plus, on obtient aussi que $U_2 \cdot U_3 = 0$, $\|U_2\| = 1$ et $\|U_3\| = 1$ donc (U_2, U_3) est une famille orthonormée.

Cela induit que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension au moins 2. Comme la matrice A est de taille 3 et que le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est de dimension au moins 1, on obtient que

- * le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2,
- * le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est de dimension 1.

donc $\boxed{(U_2, U_3)}$ est une base orthonormée du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

(c) On pose $\boxed{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{\sqrt{3}}U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ et $\boxed{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée de vecteurs propres de A $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}U_1, U_2, U_3\right)$ ce qui garantit d'une part que $\boxed{P^T P = I_3}$ et d'autre part que

$$\boxed{A} = P \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1} = \boxed{PD^2P^{-1}}.$$

(d) La matrice D étant diagonale, elle est symétrique donc $D = D^T$. De plus, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls ce qui garantit que D est inversible. Par ailleurs, comme $P^T P = I_3$ on sait que $P^{-1} = P^T$. On a enfin

$$A = PD^2P^{-1} = (PD) \times (DP^{-1}) = (PD) \times (D^T P^T) = (PD) \times (PD)^T.$$

Posons $M = PD$. \boxed{M} est inversible car est le produit de deux matrices inversibles et on a bien $\boxed{A = MM^T}$.

(e) Soit $C = M^{-1}B(M^{-1})^T$. Calculons

$$C^T = (M^{-1}B(M^{-1})^T)^T = ((M^{-1})^T)^T B^T (M^{-1})^T = M^{-1}B(M^{-1})^T = C$$

car B est une matrice symétrique. On obtient bien que \boxed{C} est symétrique. On sait alors que C est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres donc : il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale Q telles que $C = Q\Delta Q^T$.

Par ailleurs

$$C = M^{-1}B(M^{-1})^T \iff C = M^{-1}B(M^T)^{-1} \iff B = MCM^T.$$

On obtient finalement que

$$\boxed{B} = M \underbrace{Q\Delta Q^T}_{=C} M^T = \boxed{MQ\Delta(MQ)^T} = R\Delta R^T$$

en posant $R = MQ$.

(f) Calculons

$$\boxed{RR^T} = MQ(MQ)^T = MQQ^T M^T = MI_3 M^T = MM^T = \boxed{A}$$

car d'une part $QQ^T = I_3$ puisque Q est une matrice orthogonale et d'autre part $A = MM^T$ d'après la question 2.(d).

3. def question_3(M):

```
MT= np.transpose(M)
return np.dot(M, MT)
```

4. (a) Soit X un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a que

$$\begin{aligned} X^T A X > X^T B X &\iff X^T A X - X^T B X > 0 \iff X^T (A - B) X > 0 \\ &\iff X^T (R R^T - R \Delta R^T) X > 0 \\ &\iff X^T R (I_3 - \Delta) R^T X > 0 \\ &\iff (R^T X)^T (I_3 - \Delta) R^T X > 0 \\ &\iff Y^T (I_3 - \Delta) Y > 0 \end{aligned}$$

en posant $Y = R^T X$. R étant inversible (car est le produit de deux matrices inversibles), on obtient bien en posant $\boxed{S = I_3 - \Delta}$ que $\boxed{Y^T S Y > 0}$ pour tout vecteur non nul Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) S est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $(1 - \delta_1, 1 - \delta_2, 1 - \delta_3)$, en notant $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ les coefficients diagonaux de la matrice Δ . Étant donné que $Y^T S Y > 0$ pour tout vecteur non nul Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la question 1.(b) garantit que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad 1 - \delta_i > 0 \quad \text{i.e. } \delta_i < 1.$$

$\boxed{\text{Les coefficients diagonaux de } \Delta \text{ sont donc tous strictement inférieurs à } 1.}$

Correction du sujet 20

Question de cours :

Si $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désignent deux matrices carrées d'ordre n alors $C = AB$ est carrée d'ordre n et pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}$.

Exercice préparé :

1. (a) $N(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(N = k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-3}}(B_{k-2}) \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}}(N_{k-1}).$$

D'où

$$P(N = k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-2}{k-1} \times \frac{1}{k} = \frac{(k-2)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

- (b) La variable N admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 2} kP(N = k)$ converge absolument. Ici

$$kP(N = k) = \frac{1}{k-1} \geq 0.$$

La série $\sum_{k \geq 2} kP(N = k)$ diverge puisque la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Conclusion : la variable N n'a pas d'espérance.

2. (a) $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ et pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq x\right) \\ &= P(\ln(1 - U) \geq -\lambda x) \quad \text{car } -\lambda < 0 \\ &= P(1 - U \geq e^{-\lambda x}) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) \\ &= F_U(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \text{ suit la loi } \mathcal{E}(\lambda).$$

- (b) Fonctions Python :

```
def nombre_boules():
```

```
    """simule l'expérience et retourne le nombre de
    boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience"""
```

```
    N = 2
```

```
    while rd.random() > 1/N:
```

```
        # proba de tirer la noire
```

```
        N += 1
```

```
        # une blanche de plus
```

```
    p = 1/N
```

```
    return N
```

```
def T(lbda):
```

```
    """simule la variable T"""
```

```
    N = nombre_boules()
```

```
    maxi = -m.log(1-rd.random())/lbda
```

```
    # X1(-->loi expo E(lbda))
```

```
    for k in range(N-1):
```

```
        X = -m.log(1-rd.random())/lbda
```

```
        if X > maxi:
```

```
            maxi = X
```

```
    return maxi
```

```
    # renvoie le maximum de X1, ..., XN
```

(c) Estimation de l'espérance de T pour $\lambda = 1$:

```

lbd = 1
n = 10000
c = 0
for k in range(n):
    c += T(lbd)
print(c/n)

```

Le programme affiche 2.0203844676172804 ce qui laisse penser que $E(T)$ est proche de 2.

3. (a) $t \leq x < 1$ donc $\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ et ainsi pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

(b) En intégrant cette égalité sur $[0, x]$ et par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k dt + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt.$$

on obtient :

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt.$$

(c) Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto t^{n+1}$ sont croissantes sur $[0, 1[$. On peut donc écrire que

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \\ 0 \leq t^{n+1} \leq x^{n+1} \end{cases} \text{ pour tout réel } t \in [0, x].$$

En multipliant membre à membre (les réels étant tous positifs), il s'ensuit que

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec $x \geq 0$), on en déduit que

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{x^{n+1}}{1-x} dt.$$

Or $\int_0^x \frac{x^{n+1}}{1-x} dt = \frac{x^{n+2}}{1-x}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+2} = 0$ car $x \in [0, 1[$.

On en déduit, par encadrement, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = 0.$$

D'après 3.(b) : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = 0$, on conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

(d) Étant donné un entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)}$ se décompose sous la forme : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
donc

$$\sum_{k=2}^N \frac{x^k}{k(k-1)} = x \sum_{k=2}^N \frac{x^{k-1}}{k-1} - \left(\sum_{k=1}^N \frac{x^k}{k} - x \right)$$

on en déduit que la série converge et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = \varphi(x) = x + (1-x) \ln(1-x)$$

4. T est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et pour $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 P_{(N=k)}(T \leq x) &= P_{(N=k)}\left(\bigcap_{i=1}^k (X_i \leq x)\right) \\
 &= \prod_{i=1}^k P_{(N=k)}(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance mutuelle des } X_i \\
 &= \prod_{i=1}^k P(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i \text{ avec } N \\
 &= \prod_{i=1}^k F(x) \quad \text{car les } X_i \text{ suivent la même loi que } X_1 \\
 &= (1 - e^{-\lambda x})^k \quad \text{car } X_1 \text{ suit la loi } \mathcal{E}(\lambda)
 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P_{(N=k)}(T \leq x) = (F(x))^k = (1 - e^{-\lambda x})^k}$,

En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
 P(T \leq x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P_{(N=k)}(T \leq x) \times P(N = k) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(F(x))^k}{k(k-1)} = \varphi(F(x))
 \end{aligned}$$

5. On admet que T est une variable à densité.

Par composition F_T est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et pour tout réel x non nul : $F'_T(x) = F'(x)\varphi'(F(x))$.

- Si $x < 0$: $F'_T(x) = 0$.
- Si $x > 0$: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ donc $\ln(1 - F(x)) = -\lambda x$ et $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
On obtient ainsi : $F'_T(x) = \lambda e^{-\lambda x} \times \lambda x = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$.

Conclusion : une densité de T est donnée par la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

6.

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx \\
 &= \lambda \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\
 &= \lambda E(X_1^2) \text{ avec } X_1 \text{ qui suit la loi } \mathcal{E}(\lambda)
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Koenig-Huygens et un résultat de cours sur la loi exponentielle :

$$E(X_1^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Finalement : $E(T) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}$.

Pour $\lambda = 1$ on a : $E(T) = 2$: ce qui est cohérent avec la conjecture effectuée à la question 2.(c).

Exercice non préparé :

Correction du sujet 21

Question de cours :

Définition de la distance d'un vecteur x de \mathbb{R}^n à un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n .

Exercice préparé :

1. (a) Pour $x \in [0, 1]$: $f'(x) = \frac{1}{3} \left(e^{-x} + \frac{2x}{1+x^2} \right)$, puis $f''(x) = \frac{1}{3} \left(-e^{-x} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right)$.

Tangente : $y = \frac{1}{3} \left(e^{-a} + \frac{2a}{1+a^2} \right) (x-a) + \frac{1}{3} (-e^{-a} + \ln(1+a^2))$.

(b) Soit $x \in [0, 1]$: comme $\frac{2x}{1+x^2} \geq 0$, $f'(x) \geq \frac{e^{-x}}{3} \geq \frac{e^{-1}}{3}$ (par décroissance de $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, 1]$).

Par inégalité triangulaire puis majoration,

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{3} \left(|-e^{-x}| + \left| \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right| \right) \leq \frac{1}{3} (1+2) \quad \text{donc} \quad |f''(x)| \leq 1$$

(c) f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur cet intervalle ($f'(x) \geq \frac{e^{-1}}{3} > 0$).

Elle établit donc une bijection de $[0, 1]$ dans $[f(0), f(1)] = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}(-e^{-1} + \ln(2))]$.

Comme $e^{-1} < \frac{1}{2} < \ln(2)$, alors $0 \in]f(0), f(1)[$: 0 admet donc un unique antécédent, nommé ℓ .

2. (a) D'après la question 1. (a), f' est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Par produit et somme de telles fonctions, φ est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$: $\varphi'(x) = -(a-x)f''(x) + (a-x)\gamma$.

(b) - Si $a < b$, φ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (puisque $]a, b[\subset]0, 1[$) qui vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

- Si $a > b$, on procède de même sur le segment $[b, a]$.

En conséquence, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$.

(c) D'après les deux questions précédentes, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que $0 = -(a-c)f''(c) + (a-c)\gamma$, soit $\gamma = f''(c)$ (vu que $a-c \neq 0$).

En évaluant φ en b , il existe bien un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f''(c).$$

```
3. (a) from math import *
def f(x):
    return 1/3*(-exp(-x)+ log(1+x**2))

def fprime(x):
    return 1/3*(exp(-x)+ 2*x/(1+x**2))

def suite(n,a):
    U=[a]
    for k in range(n):
        U.append(U[k]-f(U[k])/fprime(U[k]))
    return U

for a in [0.3,0.5,0.8]:
    print(suite(12,a))
```

Dans les trois cas proposés, les termes de la suite (u_n) sont dans $]0, 1[$ et la suite semble converger (très rapidement) vers 0.76822... (décimales communes dès u_3 , quelle que soit la valeur de a proposée).

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer la question 2. (c) à $a = \ell$ et $b = u_n$, sachant que $\ell \neq u_n$ en supposant la conjecture de la question précédente admise : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ (je pense que le sujet oublie d'admettre que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$, assez difficile ici).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les hypothèses de la question 2 sont alors vérifiées, donc il existe un réel z_n compris entre ℓ et u_n tel que :

$$f(u_n) = f(\ell) - (\ell - u_n)f'(\ell) + \frac{1}{2}(\ell - u_n)^2 f''(z_n), \text{ donc } f(u_n) = (u_n - \ell)f'(\ell) - \frac{1}{2}(u_n - \ell)^2 f''(z_n).$$

En injectant cette expression dans l'égalité $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, on obtient bien

$$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n - \ell)^2 f''(z_n)}{2 f'(u_n)}.$$

(c) Montrons par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| \leq \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.

Initialisation ($n = 0$) : $\left(\frac{3e}{2}\right)^{2^0 - 1} |u_0 - \ell|^{2^0} = |u_0 - \ell|$, donc l'inégalité large est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= \frac{(u_n - \ell)^2 |f''(z_n)|}{2 |f'(u_n)|} \quad (\text{question 3.(b)}) \\ &\leq \frac{(u_n - \ell)^2}{2} \times \frac{3}{e^{-1}} \quad (\text{question 1.(b)}) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3e}{2}\right)^{(2^n - 1) \times 2} |u_0 - \ell|^{2^n \times 2} \times \frac{3}{e^{-1}} \quad (\text{HR}) \\ &= \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^{n+1} - 2} |u_0 - \ell|^{2^{n+1}} \times \frac{3e}{2} \\ &= \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^{n+1} - 1} |u_0 - \ell|^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3e \times |u_0 - \ell|}{2}\right)^{2^n - 1} \times |u_0 - \ell| \leq \frac{1}{5} \times \left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n - 1}$.

Comme $\frac{3e}{10} \in]0, 1[$ ($e < 3$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} \times \left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n - 1} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

On cherche successivement $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < 10^{-2}$ puis tel que $|u_n - \ell| < 10^{-5}$.

D'après l'inégalité précédente, il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{5} \times \left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n - 1} < 10^{-2}$ (1)

puis tel que $\frac{1}{5} \times \left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n - 1} < 10^{-5}$ (2).

Résolvons l'inéquation (1) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \times \left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n - 1} < 10^{-2} &\iff (2^n - 1) \ln\left(\frac{3e}{10}\right) < \ln(5) - 2 \ln(10) \quad (\ln \text{ croît strict. sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff 2^n - 1 > \frac{2 \ln(2) + \ln(5)}{\ln(10) - \ln(3) - 1} \quad \left(\ln\left(\frac{3e}{10}\right) < 0\right) \\ &\iff n > \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{2 \ln(2) + \ln(5)}{\ln(10) - \ln(3) - 1} + 1\right) \quad (\ln \text{ croît strict. sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

Par le calcul, l'entier $n_0 = \lfloor \frac{1}{\ln(2)} \left(\frac{2 \ln(2) + \ln(5)}{\ln(10) - \ln(3) - 1} + 1\right) \rfloor + 1 = 23$ convient (en pratique, c'est bien plus rapide en appliquant la méthode de Newton à la suite (u_n) avec ℓ approchée par dichotomie).

On procède de même pour l'inéquation (2) et l'entier

$$n_1 = \lfloor \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{5 \ln(2) + 4 \ln(5)}{\ln(10) - \ln(3) - 1} + 1\right) \rfloor + 1 = 72 \text{ convient.}$$

Question de cours :

Soit une application $f : E \rightarrow F$ bijective de E vers F .

La fonction réciproque est l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui à tout élément y de F associe son unique antécédent x par f dans E . Ainsi, pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y.$$

Exercice préparé :

1. Estimation de a_n :

```
import random as rd

def deplacement(x,y):
    """ décrit le déplacement de la particule en partant du point (x,y);
        renvoie le point de destination"""
    u = rd.random()
    if x == y: # point A ou C
        if u < 1/3:
            return (1 - x,y) # déplacement horizontal
        elif u < 2/3:
            return (x,1 - y) # déplacement vertical
        else:
            return (1 - x,1 - y) # déplacement en diagonale
    else:
        if u < 1/2:
            return (1 - x, y) # déplacement horizontal
        else:
            return (x, 1 - y) # déplacement vertical

def positionA(n):
    """simule N = 10000 fois l'expérience et renvoie la fréquence de passage
        de la particule au point A à l'instant n"""
    c = 0
    N = 10000
    for k in range(N): # N simulations de n déplacements
        (x,y) = (0,0) # départ en A
        for i in range(n):
            (x,y) = deplacement(x,y)
            if (x,y) == (0,0): # la particule est en A à l'intant n
                c += 1
    return c/N

for n in [10,30,100,1000]:
    print(positionA(n))
```

Le programme affiche 0.3032, 0.3015, 0.3009, 0.2967.

Ce qui laisse penser que a_n est proche de 0,3 lorsque n est grand.

2. A_n, B_n, C_n et D_n formant un système complet, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n)$$

Étant donné les conditions de déplacements de la particule, on a :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0, P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{D_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \text{ et } P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

Donc $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n$. On trouve de même : $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n$,

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n} \quad \text{et} \quad \boxed{d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n}.$$

3. (a) Comme $b_0 = d_0 = 0$ et $b_{n+1} = d_{n+1}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = b_n$.

$$\text{Ainsi on a : } \begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}c_n & (L_1) \\ c_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}a_n & (L_2) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n) & (L_3) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{3}(a_{n+1} + c_{n+1}) \quad \text{d'après } L_3 \\ &= \frac{1}{3} \left(2b_n + \frac{1}{3}(a_n + c_n) \right) \quad \text{d'après } L_1 + L_2 \\ &= \frac{1}{3} (2b_n + b_{n+1}) \quad \text{d'après } L_3 \end{aligned}$$

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$\boxed{b_{n+2} - \frac{1}{3}b_{n+1} - \frac{2}{3}b_n = 0}.$$

L'équation caractéristique associée est : $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$. Ses racines sont 1 et $-\frac{2}{3}$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{b_n = \frac{1}{5} \left(1 - \left(\frac{-2}{3} \right)^n \right)}.$$

(b) On a vu que $a_{n+1} + c_{n+1} = 3b_{n+2}$. Autrement dit, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\boxed{a_n + c_n = \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{-2}{3} \right)^{n+1} \right) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{-2}{3} \right)^n}.$$

Ce qui est encore vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 + c_0 = 1$.

(c) On a $a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{-1}{3}(a_n - c_n)$: la suite $(a_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{-1}{3}$.

$$\text{Il en résulte que } a_n - c_n = \left(\frac{-1}{3} \right)^n (a_0 - c_0) \text{ soit } \boxed{a_n - c_n = \left(\frac{-1}{3} \right)^n}.$$

$$(d) \quad \boxed{\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{-2}{3} \right)^n + \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right) \\ c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{-2}{3} \right)^n - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right) \\ b_n = d_n = \frac{1}{5} \left(1 - \left(\frac{-2}{3} \right)^n \right) \end{cases}}$$

4. (a) $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$: les variables X_n et Y_n sont des variables de Bernoulli.

$X_n = 1$ signifie que l'abscisse de la particule à l'instant n est égale à 1, autrement dit la particule est positionnée en B ou C à l'instant n .

Donc $(X_n = 1) = B_n \cup C_n$ et $P(X_n = 1) = P(B_n) + P(C_n)$ puisque les deux événements B_n et C_n sont incompatibles.

Ainsi $P(X_n = 1) = b_n + c_n = \frac{1}{5} \left(1 - \left(\frac{-2}{3} \right)^n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{-2}{3} \right)^n - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right)$ ce qui donne :

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right)}$$

X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right)$.

De même $(Y_n = 1) = D_n \cup C_n$ et $P(Y_n = 1) = d_n + c_n = b_n + c_n$: Y_n a même loi que X_n .

$$\boxed{P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$;

- Cas $n = 0$: $X_0 = Y_0 = 0$ donc $P((X_0 = 0) \cap (Y_0 = 0)) = 1 = P(X_0 = 0) \times P(Y_0 = 0)$.

X_0 et Y_0 sont indépendantes.

- Cas $n \geq 1$: nous allons montrer que X_n et Y_n ne sont pas indépendantes en montrant que $P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) \neq P(X_n = 1) \times P(Y_n = 1)$.

Comme X_n et Y_n sont des variables de Bernoulli, cela revient à montrer que leur covariance est non nulle.

En effet, $X_n Y_n$ est également une variable de Bernoulli (car $(X_n Y_n)(\Omega) = \{0, 1\}$) donc

$$E(X_n Y_n) = P(X_n Y_n = 1) = P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)).$$

D'autre part, $E(X_n) \times E(Y_n) = P(X_n = 1) \times P(Y_n = 1)$.

Montrer que $P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) \neq P(X_n = 1) \times P(Y_n = 1)$ revient à montrer que $E(X_n Y_n) \neq E(X_n) \times E(Y_n)$ i.e. $\text{Cov}(X_n, Y_n) \neq 0$.

On anticipe donc sur la question suivante en calculant $\text{Cov}(X_n, Y_n)$.

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = E(X_n Y_n) - E(X_n)E(Y_n).$$

$$E(X_n) = E(Y_n) = p_n = b_n + c_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right).$$

Par ailleurs, $E(X_n Y_n) = P(X_n Y_n = 1) = P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) = P(C_n) = c_n$.

Donc $\text{Cov}(X_n, Y_n) = c_n - (b_n + c_n)^2$; on obtient après simplification

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \left(\frac{-2}{3} \right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right)^n.$$

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = 0 \iff \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \left(\frac{-2}{3} \right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right)^n = 0$$

$$\iff 9^n + 4 \times \frac{(-2)^n}{3^n} \times 9^n - 5 = 0 \quad (\text{on a multiplié par } 20 \times 9^n)$$

$$\iff 5 = 9^n + 4 \times (-2)^n \times 3^n$$

Impossible car 5 n'est pas divisible par 3. En conclusion : $\text{Cov}(X_n, Y_n) \neq 0$.

X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

(c) Calcul de la covariance : voir question précédente

5. Pour tout entier naturel n , on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

- (a) D'après 2., pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
- $$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases} \quad \text{ainsi } U_{n+1} = M U_n \text{ avec}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$. Soit λ une valeur propre de M . Alors il existe une matrice colonne X non nulle telle que $MX = \lambda X$.

Il est alors simple de vérifier que l'on a : $M^2 X = \lambda^2 X$, $M^3 X = \lambda^3 X$ et $M^4 X = \lambda^4 X$.

On a donc : $\left(M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M \right) X = \lambda^4 X - \frac{7}{9}\lambda^2 X - \frac{2}{9}\lambda X = \left(\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda \right) X$.

On a aussi $\left(M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M \right) X = 0X = 0$ donc $\left(\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda \right) X = 0$ et comme $X \neq 0$, on en

déduit que λ vérifie $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.

(c) En factorisant par $x(x-1)$ on obtient : $x^4 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{2}{9}x = x(x-1) \left(x^2 + x + \frac{2}{9}\right)$.

On en déduit $x^4 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{2}{9}x = 0 \iff x \in \left\{0, 1, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$.

Ainsi les seules valeurs propres possibles de M sont : $0, 1, \frac{-1}{3}$ et $\frac{-2}{3}$.

• Cas $\lambda = 0$:

$$MX = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y + 2z + 3t = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = 0 \\ t = -y \end{cases}$$

Le système admet d'autres solutions que la solution nulle donc 0 est valeur propre de M et le sous-

espace propre associé est $E_0(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

• Cas $\lambda = 1$:

$$MX = X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = t \end{cases} \iff \begin{cases} -6x + 3y + 2z + 3t = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - 6z + 3t = 0 \\ x + z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

Le système admet d'autres solutions que la solution nulle donc 1 est valeur propre de M et le sous-

espace propre associé est $E_1(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

• Cas $\lambda = \frac{-1}{3}$: de même on vérifie que $MX = \frac{-1}{3}X \iff \begin{cases} z = -x \\ y = t = 0 \end{cases}$.

Donc $-\frac{1}{3}$ est valeur propre de M et $E_{-1/3}(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

• Cas $\lambda = \frac{-2}{3}$: de même on vérifie que $MX = \frac{-2}{3}X \iff \begin{cases} x = z = -t \\ y = t \end{cases}$.

Donc $-\frac{2}{3}$ est valeur propre de M et $E_{-2/3}(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Conclusion : $\text{sp}(M) = \left\{0, 1, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$.

M est diagonalisable car elle admet quatre valeurs propres distinctes.

$$M = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(d) $U_{n+1} = MU_n$ pour tout entier naturel n .

On en déduit par récurrence que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel n .

Or $M = PDP^{-1}$ donc $M^n = PD^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2/3)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

De plus, comme $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ alors $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il suffit alors de calculer la première colonne de $PD^n P^{-1}$ pour déterminer U_n .

Correction du sujet 23

Question de cours :

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel E et λ une valeur propre de f .

On appelle espace-propre de f associé à λ l'ensemble :

$$E_\lambda(f) = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$$

Exercice préparé :

$$1. X = \sum_{k=1}^N X_k$$

2. `import numpy.random as rd`

```
def simul_X(l, m):
    N = rd.poisson(l)
    X = 0
    for k in range(N):
        X += rd.poisson(m)
    return X
```

3. Si $(N = 0)$ est réalisé alors il n'y a aucun client et ainsi :

$$P_{(N=0)}(X = 0) = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour } k \geq 1, \quad P_{(N=0)}(X = k) = 0$$

4. (vu à l'écrit en 2023)

- Pour $k = 1$, ok
- si $X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu)$ alors $(X_1 + \dots + X_k) + X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu + \mu)$

Ici on utilise de lemme de coalition et la stabilité des lois de Poisson.

Proposer de redémontrer la stabilité des lois de Poisson ?

5. Soit $n \geq 1$, (on applique la formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) \times P_{N=k}(X = n) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \times \frac{(k\mu)^n}{n!} e^{-k\mu} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k! n!} e^{-\lambda - k\mu} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n P(x = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n \lambda (k\mu)^n}{k! n!} e^{-\lambda - k\mu} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda - k\mu}}{k!} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(k\mu)^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda - k\mu}}{k!} \times (k\mu) e^{k\mu} \\ &= \mu \lambda \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \mu \lambda. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 0) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} e^{-n\mu} \\
 &= e^{-\lambda} \times \exp(\lambda e^{-\mu}) \\
 &= \exp(\lambda(e^{-\mu} - 1)).
 \end{aligned}$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 P(X = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} e^{-(\lambda+k\mu)} \\
 &= \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n (\lambda e^{-\mu})^k}{k!} \\
 &= \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} \times f_n(\lambda e^{-\mu}).
 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
 f_0 : x &\mapsto e^x - 1 && \text{(Série exponentielle.)} \\
 f_1 : x &\mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{x^k}{k!} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = xe^x
 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k)^{n+1} \frac{x^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^{n+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\
 &= x \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^n \frac{x^k}{k!} \\
 &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{k^i x^k}{k!} \\
 &= x \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^i x^k}{k!} \\
 &= x + x \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f_i(x)
 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= x + x \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} f_i(x) \\
 &= x + x(f_0(x) + 1 \times f_1(x)) \\
 &= x + x((e^x - 1) + xe^x) \\
 f_2(x) &= xe^x + x^2 e^x
 \end{aligned} \tag{1}$$

11. def f(n, x):

```

if n == 0:
    return exp(x)-1
s = 1
for i in range(n):
    s += sc.binom(n-1,i)*f(i, x)
return x * s

```

12. def P_X(l, m, n):

```

if n == 0:
    return exp(1*(exp(-m)-1))
return m**n*exp(-1)/sc.factorial(n)*f(n,1*exp(-m))

```

Exercice non préparé :

Correction du sujet 24

Question de cours :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si M est symétrique alors il existe P et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P \text{ est inversible, } P^{-1} = P^T, D \text{ diagonale et } M = PDP^{-1}$$

Exercice préparé :

1. (a) $f'(x) = \frac{x+1}{x}$

x	0	x_n	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f			

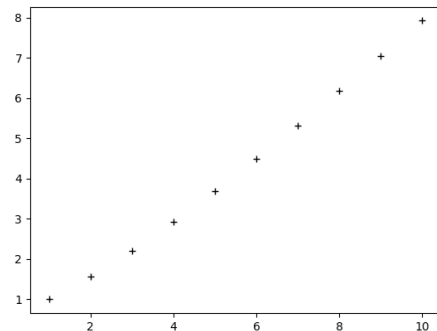
Théorème de la bijection : l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n .

(b) `from math import *`
`import matplotlib.pyplot as plt`

```
def f(x):
    return log(x)+x
```

```
def calcul_x(n):
    a = n/2 # ici j'utilise un résultat d'une question
    b = n # suivante.
    while b-a > 0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(m) < n: # ici je sais que f est croissante.
            a=m
        else:
            b=m
    return (a+b)/2
```

```
x = [ k for k in range(1, 11) ]
y = [ calcul_x(n) for n in x ]
plt.plot(x,y,'+k')
plt.show()
```



(c) $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$ et f est strictement croissante donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq x_{n+1}$

2. (a) L'étude de la fonction $h : x \mapsto \ln(x) - x$ permet d'établir que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) < x$

On peut aussi utiliser la concavité de la fonction \ln .

(b)

$$\begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \\ f(n) = \ln(n) + n \geq n \end{cases}$$

d'où $f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) \leq f(n)$

or f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq x_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

3. (a)

$$\frac{n}{2} \leq x_n \leq n \Rightarrow \frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$$

or $\ln(x_n) + x_n = n$ donc $\frac{\ln(x_n)}{n} + \frac{x_n}{n} = 1$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1 \quad \text{autrement dit} \quad x_n \sim n$$

(b) $\ln(x_n) + x_n = n$ et $\ln(x_{n+1}) + x_{n+1} = n + 1$ donc $x_{n+1} - x_n = 1 + \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$

or $x_n \sim n$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 1}$

4. (a)

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n}{\ln(n)} - 1$$

$$= \frac{n - x_n - \ln n}{\ln(n)}$$

$$= \frac{x_n + \ln(x_n) - x_n - \ln(n)}{\ln(n)}$$

$$= \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \times \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{car } x_n \sim n$$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$$

(b)

$$1 - u_n = \ln\left(\frac{n}{x_n}\right) \times \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\sim \left(\frac{n}{x_n} - 1\right) \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\sim u_n \times \frac{1}{x_n}$$

$$\sim 1 \times \frac{1}{n}$$

(c) $1 - u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n - 1 = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{n - x_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$n - x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice non préparé :

Question de cours :

Si une matrice est diagonale alors elle est diagonalisable.

Si M est réelle et symétrique alors elle est diagonalisable.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes alors elle est diagonalisable.

Exercice préparé :

1. On cherche le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

On a alors $E(X_i) = \frac{1}{p}$ et $V(X_i) = \frac{q}{p^2}$.

2. On a donc pour tous i et j

$$\begin{aligned} P(X_i > j) &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} P(X_i = k) \\ &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= p \sum_{k=j}^{+\infty} q^k \\ &= q^j \end{aligned}$$

3. Soit k un entier. On a alors

$$\begin{aligned} P(Y > j) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > j]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i > j) \quad \text{par indépendance} \\ &= q^{jn} \end{aligned}$$

Ainsi, Y a la même fonction de répartition qu'une loi géométrique de paramètre q^n , et donc suit cette loi.

4. On peut utiliser la fonction

```
def NbMin(L):
    m = L[0]
    nb = 0
    for elem in L:
        if elem < m:
            m = elem
            nb = 1
        elif elem == m:
            nb = nb+1
    return nb
```

5. On en déduit le code

```
import random as rd

def geom(p):
    i = 0
    while True:
        if rd.random() < p:
            return i
        else:
            i = i+1

def N(n,p):
    joueurs = [geom(p) for _ in range(n)]
    return NbMin(joueurs)
```

6. Pour avoir $N = n$, il faut et il suffit que tous les joueurs aient le même résultat. Donc

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n P(X_i = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^n q^{n(k-1)} \\ &= \frac{p^n}{1 - q^n} \end{aligned}$$

7. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors

$$P(N = k) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{\ell=1}^{+\infty} P\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = \ell] \cap \bigcap_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_j > \ell]\right).$$

Fixons alors $I \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{+\infty} P\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = \ell] \cap \bigcap_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_j > \ell]\right) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\prod_{i \in I} P(X_i = \ell) \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} P(X_j > \ell) \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} p^k q^{k(\ell-1)} q^{(n-k)\ell} \\ &= \frac{p^k}{q^k} \frac{q^n}{1 - q^n} \\ &= \frac{p^k q^{n-k}}{1 - q^n} \end{aligned}$$

Comme $\text{Card}(\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)) = \binom{n}{k}$, on retrouve bien le résultat voulu.

8. On a alors

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{k=1}^n k P(N = k) \\ &= \frac{1}{1 - q^n} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{np}{1 - q^n} \end{aligned}$$

en utilisant l'espérance d'une loi binomiale.

De la façon, en utilisant le moment d'ordre 2 d'une loi binomiale, on trouve $E(N^2) = \frac{npq + n^2 p^2}{1 - q^n}$, puis par la formule de Huygens,

$$V(N) = \frac{npq + n^2 p^2}{1 - q^n} - \left(\frac{np}{1 - q^n}\right)^2.$$

9. La fonction suivante permet de comparer l'espérance de N avec des valeurs trouvées par estimation :

```
def EN(n,p,R=10000):
    eTh = (n*p)/(1-(1-p)**n)
    c = 0
    for _ in range(R):
        c = c+N(n,p)/R
    print("Theorique :",eTh)
    print("Estimation :",c)
```

En testant avec différentes valeurs de n et p , les valeurs semblent toujours proches.

Exercice non préparé :

Question de cours :

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements et B un événement du même espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements alors la série $\sum P(A_n \cap B)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$$

Exercice préparé :

1. (a) Fonction testant si deux vecteurs sont proportionnels.

```
def colineaires(u,v):
    M = np.array( [ u , v ] )
    return np.linalg.matrix_rank(M) != 2 :
```

Remarque : même si ici nous allons travailler qu'avec des entiers, il semble que cette fonction permet de traiter les vecteurs avec des coefficients décimaux.

Remarque pour ceux qui se pose des questions :

Ecrire une fonction qui teste si deux vecteurs de \mathbb{C}^n sont colinéaires :

```
def recherche_pivot(u):
    k = 0
    for i in range(1, len(u)):
        if abs(u[i]) > abs(u[k]):
            k = i
    return k
```

```
def colineaire(u, v):
    if all([ x==0 for x in u]):
        return True
    k = recherche_pivot(u)
    for i in range(len(u)):
        if u[k]*v[i]-u[i]*v[k] != 0:
            return False
    return True
```

```
print(colineaire([1,0,2],[1,2,3])) # False
```

```
print(colineaire([1,0,2],[2,0,4])) # True
```

```
print(colineaire([1,0,3],[0.1,0,0.3])) # False # Problème de représentation
# des flottants.
```

```
eps = 1E-5
```

```
def colineaire(u, v):
    if all([ x==0 for x in u]):
        return True
    k = recherche_pivot(u)
    for i in range(len(u)):
        if abs(u[k]*v[i]-u[i]*v[k]) > eps: # On utilise un seuil en dessous
            return False # duquel le nombre est considéré comme nul
    return True
```

```
print(colineaire([1,0,2],[1,2,3])) # False
```

```
print(colineaire([1,0,2],[2,0,4])) # True
```

```
print(colineaire([1,0,3],[0.1,0,0.3])) # True
```

(b) Fonction testant si u est un vecteur propre de A .

```
def vecteur_propre(u):
    v = [-4*u[0]-3*u[1]-3*u[2],
         2*u[1],
         6*u[0]+3*u[1]+5*u[2]]
    return colineaires(u,v) and u != [0,0,0] :
```

2. (a) $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

donc $(1, -2, 0), (0, 1, -1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et $(1, 0, -1)$ est un vecteur propre de f associée à la valeur propre -1 .

(b) les deux vecteurs propres de E_{-2} à la question précédente sont non colinéaires $\dim(E_2) \geq 2$ et $\dim(E_{-1}) \geq 1$; et comme nous sommes dans \mathbb{R}^3 , $\dim(E_2) + \dim(E_{-1}) \leq 3$, il vient $\dim(E_2) + \dim(E_{-1}) = 3$ et enfin f est diagonalisable.

3. (a) On parcourt tous les vecteurs dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 et on teste.

```
nb = 0
for x in range(-10,11):
    for y in range(-10,11):
        for z in range(-10,11):
            u = [ x , y , z ]
            if vecteur_propre(u):
                nb += 1
print(nb)
```

Ce programme affiche 240.

(b) Dans E_{-1} il y a exactement $2N$ vecteurs propres $(-N, 0, N) \dots (N, 0, -N)$. Dans E_2 ce sont les vecteurs (x, y, z) s'écrivant $a(1, -2, 0) + b(0, 1, -1)$ et vérifiant x, y et z dans $[-N; N]$. Cela revient à déterminer les couples d'entiers (a, b) vérifiant : $(a, b) \neq (0, 0)$

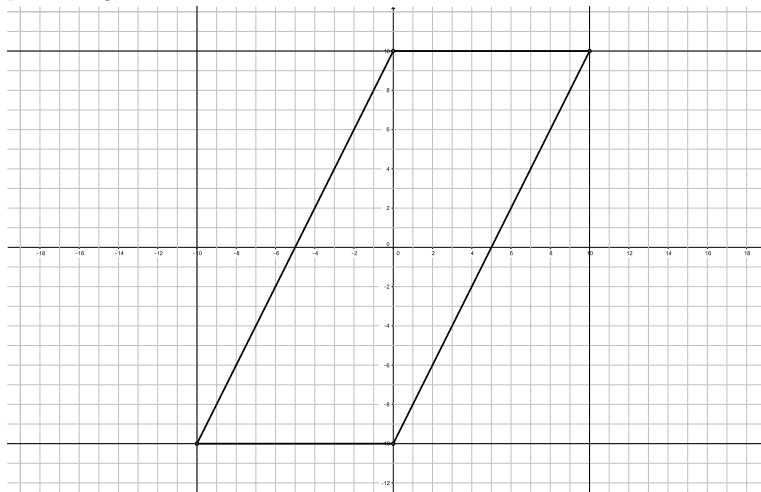
$$-N \leq a \leq N, -N \leq b \leq N \text{ et } 2a - N \leq b \leq 2a + N. \quad (*)$$

On en dénombre : $2N + 2 \times ((2N - 1) + (2N - 3) + \dots + 1) = 2N(N + 1)$

On peut illustrer ce calcul par la figure ci-dessous :

On cherche le nombre de points du quadrillage qui se trouvent dans le parallélogramme (cela vient des contraintes ())*

On fixe l'abscisse a dans $[-N; N]$ et ensuite on compte verticalement le nombre de points dans le parallélogramme.



On trouve un total de $2N(N + 2)$.

Remarque : on retrouve bien 240 avec $N = 10$.

4. (a) La probabilité qu'un vecteur pris au hasard soit propre est égale à : $\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}$.

La probabilité qu'aucun des N vecteurs soit propre vaut : $\left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)^N$

on obtient : $p_N = 1 - \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)^N$.

$$(b) \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)^N = \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)\right) \quad \text{or} \quad \ln\left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) \sim -\frac{1}{4N}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N = 1 - e^{-1/4} \approx 0,22$$

Question de cours :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements du même espace probabilisé.

Dire que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements signifie que :

$$\textcircled{1} \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

1. (a) Fonction testant si deux vecteurs sont proportionnels.

```
def colineaires(u,v):
    M = np.array( [ u , v ] )
    return np.linalg.matrix_rank(M) != 2
```

Remarque : même si ici nous allons travailler qu'avec des entiers, il semble que cette fonction permet de traiter les vecteurs avec des coefficients décimaux.

- (b) Fonction testant si u est un vecteur propre de A .

```
def vecteur_propre(u):
    v = [3*u[0]+u[1]+u[2], u[0]+u[2], -3*u[0]-u[2]]
    return colineaires(u,v) and u != [0,0,0] :
```

2. (a) Les matrices $A + I$, $A - I$ et $A - 2I$ sont de rang 2 donc -1 , 1 et 2 sont des valeurs propres de A . on trouve (par exemple) les vecteurs propres :

$$(0, -1, 1) \text{ pour } -1, \quad (-2, 1, 3) \text{ pour } 1 \text{ et } (-1, 0, 1) \text{ pour } 2.$$

- (b) Trois valeurs propres distinctes, Matrice 3,3 donc la matrice A est diagonalisable.

3. (a) Le th. central limite donne pour $\alpha > 0$, $\mathbb{P}([- \alpha < M_n^* < \alpha]) \approx \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1$.

- (b) En prenant $\alpha = 1,96$, on obtient : $\mathbb{P}([-1,96 < M_n^* < 1,96]) \approx 0,95$

$$\text{on en déduit : } \mathbb{P} \left(\left[-1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < M_n - p < 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \right) \approx 0,95$$

$$\text{en remarquant que : } 1,96 \sqrt{p(1-p)} < 1, \text{ il vient : } \mathbb{P} \left(\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} < p < M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95$$

4. (a) Ce programme réalise des simulations de l'expérience suivante : On prend un vecteur au hasard dans $[-5; 5]^3$ (uniformément) et on estime la probabilité d'obtenir un vecteur propre de A , cela nous permet d'obtenir une valeur approchée de la proportion $\frac{N_V}{11^3}$.

- (b) Ici on se ramène à la question 3) en définissant X_i comme le résultat de chaque appel à la fonction `simul()`.

$$\text{En prenant pour intervalle de confiance au seuil de 95\% : } \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\text{Donc } \frac{N_V}{11^3} \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ (au risque de 95\%) ou encore } N_V \in \left[11^3 \cdot M_n - \frac{11^3}{\sqrt{n}} ; 11^3 \cdot M_n + \frac{11^3}{\sqrt{n}} \right]$$

Le programme de la question précédente donne l'entier le plus proche de $11^3 \cdot M_n$.

Pour être sûr (au seuil de 95%) de la valeur affichée il suffit de déterminer N pour avoir $\frac{11^3}{\sqrt{N}} < 1/2$

Cela donne : $N > 4 * 11^6$ ($\approx 7\,086\,244$).

- (c) C'est très peu efficace, il est tellement plus simple de parcourir tous les vecteurs de $[-5; 5]^3$:

```
nb = 0
for x in range(-5,6):
    for y in range(-5,6):
        for z in range(-5,6):
            u = [ x , y , z ]
            if vecteur_propre(u):
                nb += 1
print(nb)
```

On trouve alors la valeur exacte : 22

On peut affiner l'étude statistique avec le programme suivant :

```
N = 1000
nb = 0
for k in range(N):
    if simul():
        nb += 1
f = nb/N

while f*(1-f) > N / (2*11**3*1.96)**2 :
    N += 1
    if simul():
        nb += 1
    f = nb/N

x = f*11**3
print(round(x))
```

Ce programme affiche 22 (avec une proba de 95%).

On peut remarquer qu'à la fin de ce programme $N \approx 450\,000$, cela reste toujours beaucoup plus que 11^3 .

On peut aussi faire remarquer qu'un raisonnement permet de trouver ce résultat à partir des vecteurs propres trouvés à la question 2)a).

Correction du sujet 28

Question de cours :

Les solutions sont les fonctions f vérifiant : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \mapsto k \exp\left(-\int^t a(s) ds\right)$

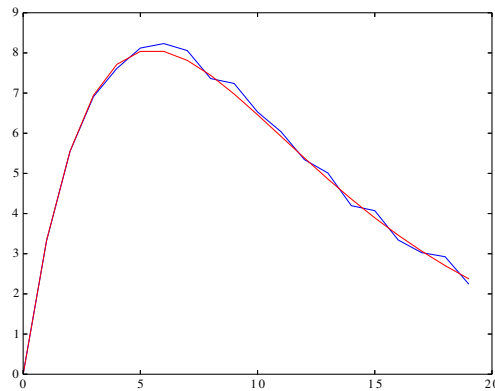
```
1. def simulG(n):
    G = 0
    for k in range(n):
        a = randint(1,6)
        if a == 1:
            return 0
        else:
            G += a
    return G
```

2. Y est une variable de Bernoulli, et $[Y = 1] : " \text{On n'a jamais eu de 1} " ;$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{5^n}{6^n}\right)$

3. On a : $G_n = \sum_{k=1}^n X_k$ si $\prod_{k=1}^n Y_k \neq 0$, et $G_n = 0$ sinon. donc $G_n = \left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \left(\prod_{k=1}^n Y_k\right) = \left(\sum_{k=1}^n X_k\right) Y$

```
4. def esperance(n):
    N = 10000
    nb = 0
    for k in range(N):
        nb += simulX(n)
    return nb/N
```

```
x = [0]
y = [0]
for n in range(2,21):
    x += [n]
    y += [esperance(n)]
plot(x,y)
x = [0]
y = [0]
for n in range(2,21):
    x += [n]
    y += [4*n*(5/6)**n]
plot(x,y,'r') # Pour vérifier la cohérence avec le résultat de la question suivante.
```



5. Pour chaque i la loi de X_i est :

x	0	2	3	4	5	6	
$P([X_i = x])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

et : $E(X_i) = \frac{10}{3}$

Plusieurs calculs possibles :

La loi de YX_i :

x	0	2	3	4	5	6
$P([YX_i = x])$	$1 - \frac{5^n}{6^n}$	$\frac{5^{n-1}}{6^n}$	$\frac{5^{n-1}}{6^n}$	$\frac{5^{n-1}}{6^n}$	$\frac{5^{n-1}}{6^n}$	$\frac{5^{n-1}}{6^n}$

et $E(YX_i) = 4 \times \frac{5^n}{6^n}$

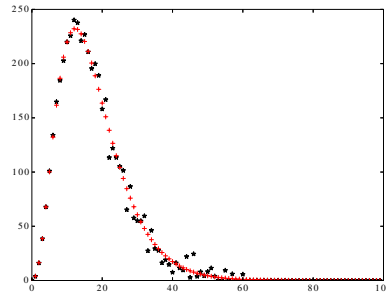
Autre façon de faire :

$YX_i = Y_1 Y_2 \dots Y_{i-1} \underbrace{(X_i Y_i)}_{=X_i} Y_{i+1} \dots Y_n$ (n variables sont n mut. indépendantes) et $E(YX_i) = \frac{10}{3} \frac{5^{n-1}}{6^{n-1}} = 4 \times \frac{5^n}{6^n}$

Et comme $G = \sum_{i=1}^n YX_i$ on obtient : $E(G) = 4n \frac{5^n}{6^n}$.

6. On estime la variance par la variance empirique.

```
def variance(n):  
    N = 10000  
    nb1 = 0  
    nb2 = 0  
    for k in range(N):  
        a = simulX(n)  
        nb1 += a**2  
        nb2 += a  
    return nb1/N - (nb2/N)**2
```



7. Sachant que $Y_k X_k = X_k$ on a : $X_i X_j Y = Y_1 \cdots X_i \cdots X_j \cdots Y_n$,

$$\text{et ainsi : } E(X_i X_j Y) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = 16 \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{cov}(X_i Y, X_j Y) = 16 \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

Exercice non préparé :

Question de cours :

Soit (Z_n) une suite de variable aléatoire :

Si $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une variable suivant la loi centrée réduite.

Exercice préparé :

Les lancers sont indépendants, pour étudier X_n on observe les n premiers lancers.

Un résultat des n premiers lancers peut s'écrire par exemple : "PFPPF...FPPF" avec une probabilité de $p^{N_1}q^{N_2}$ où N_1 : nombre de piles et N_2 : nombre de faces. On utilisera aussi : F_k : "Le k ième lancer a donné face". Les événements F_k sont mutuellement indépendants et $P(F_k) = q$.

1. $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$,

$[X_2 = 0]$ est égal à $\{PP, FF\}$ donc $P([X_2 = 0]) = p^2 + q^2 = 1 - 2pq$ et $P([X_2 = 1]) = 2pq$

$$E(X_2) = 2pq$$

$X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $[X_3 = 0]$ est égal à $\{PPP, FFF\}$ donc $P([X_3 = 0]) = p^3 + q^3$

$[X_3 = 1]$ est égal à $\{PFF, PPF, FPP, FFP\}$ donc $P([X_3 = 1]) = 2p^2q + 2pq^2 = 2pq$

et $[X_3 = 2]$ est égal à $\{PFP, FPF\}$ donc $P([X_3 = 2]) = p^2q + pq^2 = pq$

$$E(X_3) = 2pq + 2 \times pq = 4pq$$

2. def simulX(n,p):

 x = 0

 a = random() < p

 for k in range(n-1):

 b = a

 a = random() < p

 if a != b:

 x += 1

 return x

3. (a) La variable aléatoire Y_i suit une loi de bernoulli et son paramètre est $P(F_i \cap \overline{F_{i+1}}) + P(\overline{F_i} \cap F_{i+1}) = 2pq$

$$Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq)$$

(b) Si les Y_i sont mutuellement indépendantes, on a $P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) = P([Y_1 = 1]) \times P([Y_2 = 1])$

or $P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) = pqp + qpq = pq$ et $P([Y_1 = 1]) \times P([Y_2 = 1]) = 2pq \times 2pq$

donc si les Y_i sont mutuellement indépendantes, on a $pq = \frac{1}{4}$ ($p \in]0; 1[$) ce qui entraîne $p = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, quels que soient a_1, a_2, \dots, a_{n-1} dans $\{0; 1\}$,

seuls 2 résultats réalisent $\bigcap_{i=1}^{n-1} [Y_i = a_i]$ donc $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [Y_i = a_i]\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$ qui est bien égal à $\prod_{i=1}^{n-1} P([Y_i = a_i])$

4. Si $p \neq q$,

$[X_n = 0]$ est égal à : $\{PP...PP, FF...FF\}$ donc $P([X_n = 0]) = p^n + q^n$

$[X_n = 1]$ est égal à : $\{FP...PP, \dots, FF...FP, PF...FF, \dots, PP..PF\}$ donc

$$P([X_n = 1]) = \sum_{k=1}^{n-1} q^k p^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} = 2pq \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q}$$

Si n est pair,

$[X_n = n - 1] = \{FPFP...FP, PFPP...PF\}$ donc $P([X_n = n - 1]) = 2p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}$.

Si n est impair,

$[X_n = n - 1] = \{FP...PF, PF...FP\}$ donc $P([X_n = n - 1]) = p^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n+1}{2}} + p^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n+1}{2}} = p^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}}$.

5. def esperance(n,p):

nb = 0

for k in range(1000):

nb += simulX(n,p)

return nb / 1000

6. $X_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$ et l'espérance des Y_i vaut $2pq$. on trouve ainsi $E(X_n) = 2(n-1)pq$.

Pour $n = 11$ et $p = 0,4$ $E(X_{10}) = 4,8$.

7. Lorsque $p = q$,

$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$ et les Y_i sont des variables de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{2}$ et mutuellement indépendantes, donc

X_n suit la loi binomiale de paramètres $\left(n-1 ; \frac{1}{2}\right)$

Exercice non préparé :

Correction du sujet 30

Question de cours :

Dire que X suit la loi normale centrée réduite signifie que X admet pour densité la fonction :

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Exercice préparé :

1. (a) Sur $]0;1]$, la dérivabilité ne pose pas de problème et en 0 : $\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

Donc g est bien une fonction dérivable sur $[0,1]$ et $g'(0) = 0$.

- (b) La fonction g étant continue, la fonction intégrée est prolongeable par continuité, ce qui justifie que u_n est bien défini.

2. (a)

```
def g(t):
    if t==0:
        return 0
    else:
        return exp(-1 / t)
```

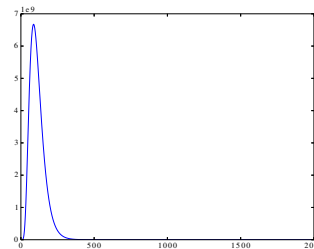
```
def integrale(n):
    f = lambda t : g(t) * (1-t)**n
    S = 0
    for k in range(100):
        S += f(k/100)
    return S*1/100
```

- (b)

```
def u(n,p):
    return integrale(n)*n**p
```

- (c)

```
x,y = [], []
for n in range(2,2000):
    x += [ n ]
    y += [ u(n,10) ]
plot(x,y,'b')
print(y[-1])
```



`print(y[-1])` affiche 5.8023077623316525e-09

Ce programme permet de penser qu'à partir d'un certain rang, $(u_n \times n^{10})$ décroît vers 0.

Conjecture : $\forall p \in \mathbb{N}, n^p \times u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3. (a) f est continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée sur $[0,1]$, autrement dit :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall t \in [0,1], |f(t)| \leq M.$$

- (b) La question précédente donne $|I_n(f)| \leq M \int_0^1 (1-t)^n dt$ et comme $\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$,

$$I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- (c) Une simple intégration par parties donne : $I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \underbrace{\int_0^1 f'(t)(1-t)^{n+1} dt}_{I_{n+1}(f')}$

- (d) En raisonnant par récurrence sur k avec le résultat de la question précédente on obtient :

$$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1) \cdots (n+k+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k+1)} I_{n+k+1}(f^{(k+1)})$$

- (e) Et comme pour chaque k , $I_{n+k+1}(f^{(k+1)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on a bien :

$$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1) \cdots (n+k+1)} + \frac{1}{n^{k+1}} \varepsilon_{k,n}$$

avec $\lim_{+\infty} \varepsilon_{k,n} = 0$

4. La fonction $h : t \mapsto t \sin(t)$ est de classe C^∞ sur $[0, 1]$ et $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) = 2$ donc d'après le résultat de la question précédente : $\int_0^1 t \sin(t)(1-t)^n dt \sim \frac{2}{n^3}$.
5. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{t^k}\right) g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ donc g a un DL₀ nul à tout ordre, avec l'unicité du DL et en appliquant le théorème de Taylor-Young (g est de classe C^∞ sur $[0, 1]$) on a : $\forall k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(0) = 0$.

Ce qui permet d'affirmer, en utilisant 3)d), que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, n^p \times u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Exercice non préparé :

Correction du sujet 31

Question de cours :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice préparé :

1. Pour $t \leq 0$, $P([Z \leq t]) = 0$ et pour $t > 0$, $P([Z \leq t]) = P([U \geq \exp(-at)]) = 1 - \exp(-at)$

ce qui montre que la variable $Z = -\frac{1}{a} \ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre a .

2. (a) `def simulX(t):`

```

n = 0
for k in range(10000):
    if - 24 * log( random() ) > t :
        n += 1
return n

```

(b) `def esperance(t):`

```

nb = 0
for k in range(1000):
    nb += simulX(t)
return nb/1000

```

(c) `def probaT(t):`

```

N = 0
for k in range(1000):
    if simulX(t) > 3000:
        N += 1
return N / 1000

```

3. Pour chaque i , D_i suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{24}$ $P([D_i > t]) = 1 - P([D_i \leq t]) = \exp\left(\frac{-t}{24}\right)$.

4. A t fixé, X_t est le nombre de i pour lequel $[D_i > t]$ donc $X_t \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10000; \exp\left(\frac{-t}{24}\right)\right)$

et $\mathbb{E}(X_t) = 10000 \exp\left(\frac{-t}{24}\right)$.

5. Ici, on pose $N = 10000$, $\varepsilon = \frac{3}{10}$ et $p = \exp\left(\frac{-t}{24}\right)$

On cherche t pour lequel $P(T > t) = 0,95$ ce qui équivaut à : $1 - P([X_t < N\varepsilon]) = 0,95$

On approche : $P([X_t < N\varepsilon])$ par $\Phi\left(\frac{N\varepsilon - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$

On cherche p tel que $\Phi\left(\frac{N\varepsilon - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) = 0,05$ ou encore $\Phi\left(\frac{N(p - \varepsilon)}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) = 0,95$

il vient $\frac{N(p - \varepsilon)}{\sqrt{Np(1-p)}} \approx 1,65$ on a alors $\varepsilon < p$ et $N(p - \varepsilon)^2 = 1.65^2(p - p^2)$

Ce qui donne l'équation du deuxième ordre : $(10000 + 1,65^2)p^2 - (6000 + 1,65^2)p + 900 = 0$

on a alors $p \approx 0,308$ car on a $p > \varepsilon$, et comme $p = \exp\left(\frac{-t}{24}\right)$ on trouve $t \approx 28,3$ (mois)

Et avec la fonction de la question 2)c) on peut vérifier la cohérence de ce résultat.

On obtient les évaluations suivantes de $P([T > t])$ pour $t = 28,3$, $t = 28,2$ et $t = 28,4$

```
>>> probaT(28.2)
0.978
```

```
>>> probaT(28.3)
0.954
```

```
>>> probaT(28.4)
0.914
```

On peut aussi chercher t avec une boucle :

```

t = 20
while probaT(t) > 0.95 :
    t += .5
print(t)

```

Correction du sujet 32

Question de cours :

Pour u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n ,

$$\langle u|v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Exercice préparé :

- E_1 : " La première fleur ne donne aucune descendance". $u_1 = P(E_1) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2$.
- Deux fonctions pour simuler la loi donnant le nombre de descendants à la n -ième génération :

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        if random() < p:
            x += 1
    return x

def apres_n_generation(n,p):
    x = 1
    k = 0
    while x > 0 and k < n :
        y = x
        x = 0
        for i in range(y):
            x += binomiale(2,p)
        k += 1
    return x
```

- Si A_0 est réalisé alors E_{n+1} aussi ($A_0 \subset E_{n+1}$) donc : $P_{A_0}(E_{n+1}) = 1$
 Si A_1 est réalisé alors on se retrouve dans la situation initiale après une génération, donc : $P_{A_1}(E_{n+1}) = u_n$.
 Si A_2 est réalisé alors on observe après une génération, deux expériences indépendantes et identiques à la situation initiale donc : $P_{A_2}(E_{n+1}) = u_n^2$.

- A_0, A_1 , et A_2 forment un système complet d'événements donc :
 $P(E_{n+1}) = P(A_0) \times P_{A_0}(E_{n+1}) + P(A_1) \times P_{A_1}(E_{n+1}) + P(A_2) \times P_{A_2}(E_{n+1})$
 on obtient : $P(E_{n+1}) = (1-p)^2 \times 1 + 2p(1-p)u_n + p^2 \times u_n^2$ ou encore $u_{n+1} = ((1-p) + pu_n)^2$

- Deux fonctions permettant d'évaluer $f(x)$ et u_n :

```
def f(x,p):
    return ( (1-p) + p*x )**2

def calcul_de_u(n,p):
    u = 0
    for k in range(n):
        u = f(u,p)
    return u
```

- NbGen, p, N, nb = 10, 0.75, 10000, 0

```
for k in range(N):
    if apres_n_generation( NbGen , p ) == 0 :
        nb += 1

print( nb /N ) # Affichage de la fréquence d'extinction de la descendance.
print(calcul_de_u(NbGen,p)) # Affichage de u_10
```

Quelques exécutions :

```
>>> (executing lines 1 to 42 of "sujet 2.py")
Avec p = 0.75
0.1088
0.11102582850458993

>>> (executing lines 1 to 42 of "sujet 2.py")
Avec p = 0.1
1.0
0.999999903870653
```

```
>>> (executing lines 1 to 42 of "sujet 2.py")
Avec p = 0.25
0.9993
0.9992324565413094

>>> (executing lines 1 to42 of "sujet 2.py")
Avec p = 0.9
0.0127
0.01234567782556361
```

```
>>> (executing lines 1 to 42 of "sujet 2.py")
Avec p = 0.5
0.7386
0.7414901310638735
```

Correction du sujet 33

Question de cours :

Pour u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n ,

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Exercice préparé :

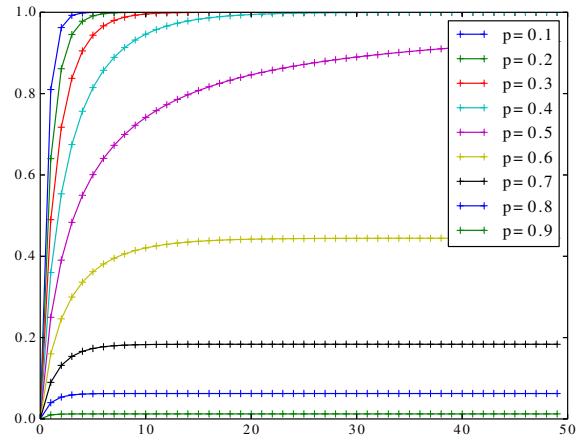
1. C'est aussi simple avec les trois logiciels.

Avec Python :

```
from matplotlib.pyplot import *

def f(x,p):
    return ((1-p)+p*x)**2

for k in range(1,10):
    p = k/10
    u = 0
    x = [0]
    y = [u]
    for n in range(1,50):
        u = f(u,p)
        x += [n]
        y += [u]
    plot(x,y,"-+", label = "p="+ str(p))
legend()
```



2. L'étude précédente permet de penser que la suite (u_n) est croissante, quel que soit la valeur de p . Elle semble aussi convergente quel que soit p , mais sa limite semble dépendre de la valeur de p .
3. Aucune difficulté particulière pour l'étude de ce trinôme :

x	$-\infty$	$\frac{p-1}{p}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	1
f	$(1-p)^2$	1

4. Pour tout réel x on a : $f(x) = x \iff p^2x^2 + (2p(1-p) - 1)x + (1-p)^2 = 0$,

plusieurs méthodes possibles pour montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$ ce polynôme a deux racines : 1 et $\frac{(1-p)^2}{p^2}$.

or pour $p \in]0; 1[$, $\frac{(1-p)^2}{p^2} \in]0; 1[\iff \frac{1-p}{p} < 1$ ou encore $\iff p > \frac{1}{2}$

On en déduit :

l'équation $f(x) = x$ admet une solution sur l'intervalle ouvert $]0; 1[$ si, et seulement si, $p \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

5. (Question délicate pour nos élèves car on donne peu d'indications)

Lorsque $p \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$, on note α le point fixe dans $]0; 1[$.

on montre assez facilement que $[0, \alpha]$ est stable par f , puis que (u_n) est croissante, puis convergente et vers α .

Lorsque $p \notin \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$,

on montre assez facilement que $[0, 1]$ est stable par f , puis que (u_n) est croissante, puis convergente et vers 1. Déterminer la nature de la suite (u_n) suivant les valeurs de p .

6. Si $p > \frac{1}{2}$, il est possible (*la probabilité est non nulle*) que la descendance ne s'éteigne jamais.

Sinon il est quasi-certain qu'il finisse par ne plus y avoir de descendance.

7. Dernière question simple.

```
def limite(p):  
    if p <= 0.5:  
        return 1  
    else :  
        return ((1-p)/p)**2
```

Exercice non préparé :

Question de cours :

Etant donné $f : P \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

les fonctions partielles de f en $(x_0, y_0) \in P$ sont les fonctions $y \mapsto f(x_0, y)$ et $x \mapsto f(x, y_0)$.

Exercice préparé :

1. U est à valeurs dans $]0, 1[$ donc $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ est à valeurs dans $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq x\right) \\ &= P(\ln(1 - U) \geq -\lambda x) \\ &= P(1 - U \geq e^{-\lambda x}) \\ &= P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ . $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$

2. `def simul_X(lbd):`

`u = rd.random()`

`return -1/lbd*m.log(1-u)` On utilise la propriété démontrée en 1)

3. (a) • Pour $n = 1$, on a $f_1 : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ qui est bien une densité (*lois usuelles*).

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est une densité.

f_{n+1} est à valeurs positives ou nulles et est continue sur \mathbb{R} (sauf peut-être en 0),

il suffit d'étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(t) dt$ ou encore $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dt$

pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dt &= \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \cdot t^n dt \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \left(\left[-e^{-\lambda t} \cdot t^n \right]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} \cdot n t^{n-1} dt \right) \\ &= -\frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} + \int_0^x f_n(t) dt \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + 1 \quad (\text{car } f_n \text{ est une densité}) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence (on prépare l'oral, inutile de tout écrire au tableau).

(b) • Pour $n = 1$, $f_1 : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

donc f_1 est bien une densité de X_1

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est une densité de S_n .

$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et ces deux variables sont indépendantes (*lemme de coalition*) donc de densité :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_1(x - t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \times \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1} \mathbb{1}_{0 \leq t \leq x} dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x t^{n-1} dt \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \frac{x^n}{n} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ &= f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence (on prépare l'oral, inutile de tout écrire au tableau).

4. (a) (Je ne perds pas de temps à comprendre "avec soin")

$$[N_t \geq n] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} [N_t = k] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} [S_k \leq t < S_{k+1}] = [S_n \leq t]$$

car (S_n) est croissante.

(b) $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n + 1)$ (En effet : $(N_t \geq n) = (N_t \geq n + 1) \cup (N_t = n)$ (disjointe))
donc avec le résultat précédent :

$$P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

(c) En reprenant le calcul de la question 3. (a) on obtient la relation :

$$\text{Pour } x > 0, \int_0^x f_{n+1}(\theta) d\theta = -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^x f_n(\theta) d\theta$$

$$\text{donc } \forall n \geq 0, P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad \boxed{N_t \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda t}$$

5. On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.

(a) A la fin de la boucle while :

r représente l'horaire de passage du bus avant l'arrivée de l'individu.

s représente l'horaire de passage du bus juste après l'arrivée de l'individu.

u représente le temps d'attente de l'individu

v représente le temps séparant les deux bus encadrant l'arrivée de l'individu.

(b) Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252 20.315494.

Elles correspondent respectivement au temps d'attente moyen de l'individu et à la durée moyenne entre les deux bus.

Sachant que la durée entre deux bus suit une loi d'espérance 10 minutes on pourrait penser qu'entre les deux bus la moyenne serait de 10 mn. mais non elle est de deux fois cette valeur et le temps d'attente qu'on pourrait penser inférieur à 10 mn est lui égal à 10 mn.

(On peut ouvrir une discussion tentant d'expliquer ces résultats)

Exercice non préparé :

```
1. def test_H(L):
    n = len(L)
    liste = [ k for k in range(n) ]
    for t in L:
        if t not in liste:
            return False
    return True
```

2. Dans la fonction suivante on sait que la liste vérifie \mathcal{H} , il suffit de vérifier que les entiers de 0 à $n - 1$ sont tous là. (Raisonnement par double inclusion)

```
def test_H_prime(L):
    n = len(L)
    for k in range(n):
        if k not in L:
            return False
    return True
```

Les meilleurs candidats ont surement eu d'autres questions, vous devrez juste faire au mieux avec vos qualités.

Question de cours :

(Allons au plus simple, on donne une caractérisation)

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $0_E \in F$ et $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in F^2, \alpha u + \beta v \in F$

Remarque : la définition est :

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Dire qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E signifie que $(F, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Exercice préparé :

(Bien prendre le temps de bien comprendre les questions pendant la préparation, quitte à faire moins de questions)

1. En prenant (u_n) la suite constante égale à 1 et $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$.

• D'une part : $u_n f(nx) = 1 \times (nx - \frac{1}{2}) = nx - \frac{1}{2}$.

• D'autre part : $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) = nx + \frac{n(n-1)}{2n} - \frac{n}{2} = nx - \frac{1}{2}$

Donc la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{2}$

2. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$

En dérivant les deux membres par rapport à x (ce qui est possible car on a supposé f dérivable) on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, nu_n f'(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

et donc la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à la fonction f'

3. (a) La valeur de cette somme est $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}$, d'où la fonction suivante :

```
def integrale(L):
    n = len(L)
    s = 0
    for k in range(n):
        s += L[k]/(k+1)
    return s
```

(b) $B'_1 = B_0$ donc $B_1 : x \mapsto x + c$ avec c une constante et comme $\int_0^1 B_1(t)dt = 0$ on obtient $c = -\frac{1}{2}$

donc $B_1 = X - \frac{1}{2}$

$B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$ donc $B_2 : x \mapsto x^2 - x + c$ avec c une constante et comme $\int_0^1 B_2(t)dt = 0$ on

obtient $c = \frac{1}{6}$ donc $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$

Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E .

(c) Un récurrence simple sur l'entier p permet de montrer que :

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, B_p est unitaire et de degré p .

(d) i. On suppose que B_p appartient à E , $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $u_n B_p(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$

On dérive p fois membre à membre cette égalité polynomiale pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad p! \cdot u_n n^p B_0(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} p! \cdot B_0\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

et comme $B_0 = 1$ il vient $n^p u_n = n$ ce qui donne bien $u_n = \frac{1}{n^{p-1}}$,

alors la suite $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_p

ii. La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{n^{p-2}} B_p'(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p'\left(x + \frac{k}{n}\right) = p \left(\frac{1}{n^{p-2}} B_{p-1}(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}\left(x + \frac{k}{n}\right) \right)$$

or d'après i. $\left(\frac{1}{n^{p-2}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_{p-1} et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 0$

iii.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/n} \varphi(x) dx &= \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right) \right) dx \\ &= \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{n^p} \int_0^{1/n} n B_p(nx) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/n} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right) dx \\ &= \frac{1}{n^p} \int_0^1 B_p(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} B_p(t) dt \\ &= \frac{1}{n^p} \int_0^1 B_p(t) dt - \int_0^1 B_p(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

iv. Les deux questions précédentes montrent que φ est nulle.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ donc $B_p \in E$

On a donc montré dans (d) que pour tout $p \geq 1$, si $B_{p-1} \in E$ alors $B_p \in E$ et comme $B_0 \in E$ on peut conclure : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B_p \in E$

Exercice non préparé :

1. def `verif(L, a, b)`:

for t in L:

if not (a <= t <= b):

return False

return True

2. Ici on suppose que la liste L passée en argument contient des entiers entre a et b.

def `denombre(L, a, b)`:

Nb_Occ = [0 for k in range(a, b+1)]

for t in L:

Nb_Occ[t-a]

return Nb_Occ

Question de cours :

On appelle densité de probabilité une fonction f définie sur \mathbb{R} , à valeurs positives ou nulles, dont l'intégrale généralisée sur \mathbb{R} converge et vaut 1 .

Exercice préparé : (Remarque : Exercice très proche du sujet G2E 2024)

```

1. def ps(u, v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k]*v[k]
    return s

import numpy as np

def Gram(L):
    p = len(L)
    G = []
    for i in range(p):
        ligne = []
        for j in range(p):
            ligne.append(ps(L[i], L[j]))
        G.append(ligne)
    return np.array(G)

u1,u2,u3 = [1, -1, 0], [1, 0, -1], [1, 1, 1]
print(Gram([u1, u2, u3]))

```

2. La matrice de Gram d'une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
3. (a) On suppose que G est inversible.

$$GX = \begin{pmatrix} \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_1, u_2 \rangle + \dots + \alpha_p \langle u_1, u_p \rangle \\ \alpha_1 \langle u_2, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_2 \rangle + \dots + \alpha_p \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle u_p, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_p, u_2 \rangle + \dots + \alpha_p \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \rangle \\ \langle u_2, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \rangle \\ \vdots \\ \langle u_p, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, 0 \rangle \\ \langle u_2, 0 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_p, 0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or G est inversible donc son noyau est réduit au vecteur nul, ainsi tous les coefficients α_k sont nuls et la famille (u_1, \dots, u_p) est libre.

- (b) i. Si $GX = 0$, alors, d'après le calcul précédent, pour tout entier $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a bien $\left\langle u_i, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right\rangle = 0$

ii. Alors $\left\langle \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^p \alpha_i \left\langle u_i, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right\rangle = 0$ (par linéarité à gauche du produit scalaire), donc $\left\| \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \right\| = 0$ et ainsi le vecteur $\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k$ est nul.

iii. Or la famille (u_1, \dots, u_p) est libre donc tous les coefficients α_k sont nuls, c'est-à-dire $X = 0$. Ainsi le noyau de G est réduit au vecteur nul et la matrice G est inversible.

G est inversible si, et seulement si, $\ker(G) = \{0\}$

4. (a) Soient a et $b \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle \quad (\text{bilinéarité et symétrie})$$

- (b) Soit $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j$, on a $\|v_i - v_j\|^2 = \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - 2\langle v_i, v_j \rangle$, c'est-à-dire $1 = 1 + 1 - 2\langle v_i, v_j \rangle$ donc $\langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{2}$.

Les termes diagonaux de la matrice G valent 1, les autres termes $\frac{1}{2}$.

- (c) Par produit matriciel, A^2 est la matrice dont les termes diagonaux valent $n+3$, les autres termes $n+2$. On peut alors vérifier directement que $A^2 = (n+2)A - (n+1)I_n$ (ou on peut poser $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ et déterminer les valeurs de α et β si nécessaire). Cette relation nous permet d'écrire :

$$A \left(-\frac{1}{n+1}A + \frac{n+2}{n+1}I_n \right) = I_n$$

Ainsi A possède un inverse à droite donc est inversible, d'inverse $-\frac{1}{n+1}A + \frac{n+2}{n+1}I_n$.

- (d) La matrice $2G$ est inversible donc G l'est également. D'après le résultat de la question 3, la famille (v_1, \dots, v_n) est libre, elle est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc elle est une base de \mathbb{R}^n .

Exercice non préparé :

```
import random as rd

def marche(i,N):
    pos = i
    for k in range(N):
        pos += rd.choice([1,-1])
    return pos

def jeu(n,a,b,i):
    pos = i
    while pos != 0 and pos != n:
        pos = marche(pos,1)
    if pos == 0:
        return a
    return b
```

Correction du sujet 37

Question de cours :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Exercice préparé :

1. (Bien faire cette question pendant la préparation).

```
def simul_XY(n):
    Nb_Occ = [0, 0, 0]
    for k in range(n):
        u = rd.randrange(3)
        Nb_Occ[u] += 1
    x = Nb_Occ[0]
    y = 0
    for i in Nb_Occ:
        if i==0:
            y += 1
    return x, y
```

2. (Loi des grands nombres : la fréquence de réalisation donne une valeur approchée des espérances)

```
N = 10000
SX, SY, SXY = 0, 0, 0
for k in range(N):
    x, y = simul_XY(10)
    SX += x
    SY += y
    SXY += x*y
print(SX/N, SY/N, SXY/N)
print(SXY/N - SX/N * SY/N)
```

Le programme affiche une valeur proche de 0, on peut faire la conjecture que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

3. Plusieurs approches possibles, par exemple :

On utilise le modèle : $\Omega = \{1, 2, 3\}^2$ et P uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 3^2 = 9$)

Le couple (i, j) correspond au résultat :

la boule 1 dans le tiroir i et la boule 2 dans le tiroir j .

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$

$x \backslash Y$	1	2	
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

On obtient $E(X) = \frac{2}{3}$, $E(Y) = \frac{4}{3}$ et $E(XY) = \frac{8}{9}$, ce qui entraîne $\text{cov}(X, Y) = 0$

Remarque : X et Y ne sont pas indépendantes.

4. (a) On est dans la situation classique appelée schéma de Bernoulli : X compte le nombre de succès : le jeton va dans l'urne 1. (On peut détailler si nécessaire. L'expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ...). X suit la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{3})$, ainsi $E(X) = \frac{n}{3}$.

(b) On a $(Y_1 = 1) = (X = 0)$ et Y_1 est de Bernoulli donc $E(Y_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

La symétrie du problème permet d'affirmer que $E(Y_2) = E(Y_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et la relation $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ donne (avec la linéarité de $E(\cdot)$) $E(Y) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(c) Raisonnons pour $i = 2$ (ce serait le même raisonnement pour $i = 3$).

On utilise le modèle : $\Omega = \{1, 2, 3\}^n$ et P uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 3^n$)

$[X = j] \cap [Y_2 = 1]$ est le nombre de listes avec j fois 1 et aucun 3 donc $\text{card}([X = j] \cap [Y_2 = 1]) = \binom{n}{j}$

$$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P([X = j] \cap [Y_i = 1]) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}$$

(d) Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned} E(XY_2) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^1 jkP([X = j] \cap [Y_2 = k]) \\ &= \sum_{j=0}^n jP([X = j] \cap [Y_2 = 1]) \\ &= \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n} \\ &= n \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad (\text{somme usuelle}) \end{aligned}$$

de même $E(XY_3) = n \frac{2^{n-1}}{3^n}$

En revanche $XY_1 = 0$ donc $E(XY_1) = 0$

(En effet $[X \neq 0] \subset [Y_1 = 0] \subset [XY_1 = 0]$ et $[X = 0] \subset [XY_1 = 0]$)

(e) $E(XY) = E(XY_1) + E(XY_2) + E(XY_3) = 0 + n \frac{2^{n-1}}{3^n} + n \frac{2^{n-1}}{3^n} = n \frac{2^n}{3^n}$

donc avec les résultats précédents on montre bien la conjecture : $\text{cov}(X, Y) = 0$

Exercice non préparé : (De l'intérêt de connaître les listes de listes)

```
1. def temps(coords):
    L = [] # liste des temps
    for c in coords: # c parcourt la liste coords
        L.append(c[3]) # c[3] est le temps du point de passage c
    return L
```

On aurait aussi pu utiliser une liste en compréhension :

```
def temps(coords):
    return [c[3] for c in coords]
```

2. On utilise la méthode classique de recherche du maximum :

```
def plus_haut(coords):
    tmp_max = coords[0] # premier point de passage
    for c in coords:
        if c[2] > tmp_max[2]: # si l'altitude du pt de passage est plus grande
```

```
        tmp_max = c                                # nouveau maximum temporaire
return [tmp_max[0], tmp_max[1]]
```

Question de cours :

Soit f une fonction admettant des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 .

On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

Exercice préparé :

1. (a) • D définit bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(En effet : Si P est un polynôme de $\deg \leq n$ alors $D(P)$ est un polynôme de $\deg \leq n$)

- Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,

$$\begin{aligned} D(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) - \alpha P(X) - \beta Q(X) \\ &= \alpha D(P) + \beta D(Q) \end{aligned}$$

 D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

- (b) $D(1) = 0$ et la formule du binôme donne $D(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$ pour tout entier naturel k de $[[1, n]]$.

- (c) Le résultat précédent donne la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- (d) La matrice D est triangulaire donc le spectre est $\{0\}$.

Si D était diagonalisable alors D serait semblable à la matrice nulle et donc elle serait nulle.

 D n'est pas diagonalisable

2. (a) \mathcal{B} est formée de $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre
La famille \mathcal{B} est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts donc elle est libre.

 \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

- (b)

$$\begin{aligned} D(H_0) = 0 \quad \text{et} \quad D(H_k) &= \prod_{i=0}^{k-1} (X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) \\ &= \prod_{i=-1}^{k-2} (X-i) - \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) \\ &= \prod_{i=0}^{k-2} (X-i) (X+1 - (X-k+1)) \\ &= kH_{k-1} \end{aligned}$$

- (c) La matrice représentative de D dans la base \mathcal{B} est donc
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

```

3. def f1(P, a):
    XP = [0] + P
    aP = [ a*c for c in P ] + [0]
    return [XP[i]-aP[i] for i in range(len(XP))]
print(f1([1,1],1))

```

```

def H(n):
    P = [1]
    for i in range(n):
        P = f1(P, i)
    return P
print(H(3))

```

4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) $H_2(Y) = Y^2 - Y$ et Y suit une loi de Poisson donc $H_2(Y)$ admet une espérance et $H_2(Y) = V(Y) + E(Y)^2 - E(Y) = \lambda^2$. $\boxed{H_2(Y) = \lambda^2}$
 $H_1(Y) = Y$ et $H_0(Y) = 1$ $E(H_0(Y)) = 1$ et $E(H_1(Y)) = \lambda$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de 1 dans la base (H_0, H_1, H_2) et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont celles de X .

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2) . (En effet : $X^2 = H_1 + H_2$)

(c) $X^2 = H_1 + H_2$ donc $E(Y^2) = H_1(Y) + H_2(Y) = \lambda + \lambda^2$, on retrouve $\boxed{V(Y) = \lambda}$

5. (a) • Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{D}(h_a) = (e^a - 1)h_a$ et $\tilde{D}(k_a) = -(e^a + 1)k_a$
 Quand a décrit \mathbb{R} , $e^a - 1$ décrit $] -1; +\infty[$ et $-e^a - 1$ décrit $] -\infty; -1[$
 donc les valeurs de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sont valeurs propre de \tilde{D}
 • De plus si -1 était valeur propre de \tilde{D} on aurait une fonction non nulle f vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = 0$, ce qui est impossible

En conclusion $\boxed{\text{le spectre de } \tilde{D} \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

(b) F est bien dans \mathcal{C} , on note $g = \tilde{D}(f)$, Comme F est continue et croissante, g est continue et positive. Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
 \int_a^b g(t)dt &= \int_a^b F(t+1)dt - \int_a^b F(t)dt \\
 &= \int_{a+1}^{b+1} F(t)dt - \int_a^b F(t)dt \\
 &= \int_b^{b+1} F(t)dt - \int_a^{a+1} F(t)dt
 \end{aligned}$$

Par croissance de F et croissance de l'intégrale, on a alors $F(b) \leq \int_b^{b+1} F(t)dt \leq F(b+1)$.

Par théorème d'encadrement des limites, cette intégrale converge donc vers 1 quand b tend vers $+\infty$.

De même, l'intégrale $\int_a^{a+1} F(t)dt$ converge vers 0 quand a tend vers $-\infty$.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge, vers 1. Ainsi, $\boxed{g \text{ est bien une densité de probabilité}}$.

(c) Si F est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, on a alors g définie par

$$\forall t < -1, g(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 0], g(t) = t + 1 \quad \forall t \in [0, 1], g(t) = 1 - t \quad \forall t > 1, g(t) = 0$$

Exercice non préparé :

```

1. def simul(N):
    return [ rd.randint(0, 1) for k in range (N) ]

```

```

2. def longueur():
    L = simul(3)
    while L[-3:] != [1,1,0]:
        L.append(rd.randint(0, 1))
    return len(L)

```

N = 10000
 S = 0
 for k in range(N):
 S += longueur()
 print(S/N)

Le programme affiche une longueur moyenne proche de 8.

Question de cours :

Soit E et F deux espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.

Pour f une application linéaire de E dans F , $\text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

Exercice préparé :

1. U est à valeurs dans $]0, 1[$ donc U^2 aussi et pour $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} F_{U^2}(x) &= P(U^2 \leq x) \\ &= P(U \leq x) \quad \text{car } x \geq 0 \text{ et } U \geq 0 \\ &= F_U(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x} \quad \text{car } 0 < \sqrt{x} < 1 \text{ et } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[) \end{aligned}$$

La fonction de répartition de U^2 est :
$$\begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ x \mapsto \sqrt{x} & \text{si } x \in]0, 1[\\ x \mapsto 1 & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

Cette fonction est continue sur \mathbb{R} (tout entier) et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf en 0 et 1 donc U^2 est une variable à densité, et U^2 est de densité : $f \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0, 1[}(x)$ (même densité pour V^2)

2. U^2 et V^2 sont indépendantes, U^2 de densité f et V^2 de densité f

donc (Théorème rappelé au début du sujet) la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$ admet une densité de probabilité.

3.

```
def simul_Z():
    x = rd.random()
    y = rd.random()
    return x**2 + y**2
```

```
N = 10000
s = 0
for k in range(N):
    if simul_Z() <= 1:
        s += 1
print(s/N)
```

4. (a) Soit x tel que $0 < x \leq 1$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0, 1[}(t) \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}} \mathbb{1}_{]0, 1[}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-t}} \mathbb{1}_{]x-1, x[}(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-t}} \mathbb{1}_{]x-1, x[}(t) dt \end{aligned}$$

quand $t \in]0, 1[$, on a : $\mathbb{1}_{]x-1, x[}(t) = 1 \iff t \in]0, x[$ donc $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.

- (b) $t = xy$ (changement de variable affine)

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-xy}} x dy \end{aligned}$$

on a bien pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$.

(c) $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$
 $(t = \sin^2(u)) \quad \varphi : u \mapsto \sin^2(u)$ est de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u)}} 2 \sin(u) \cos(u) du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 du \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(d) $P(Z \leq 1) = \int_0^1 h(x) dx = \frac{\pi}{4}$

L'expérience peut être vu comme : "On prend un point M au hasard dans le carré $[0, 1]^2$, l'événement $Z \leq 1$ est le même que l'événement $OM \leq 1$.

La probabilité de cet événement est $\frac{\text{L'aire du quart de cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}{\text{L'aire du carré } [0, 1]^2}$ qui vaut $\frac{\pi}{4}$

5. (a) Calculs classiques : $E(Y_n) = \frac{\pi}{4}$ $V(Y_n) = \frac{1}{n} \frac{\pi}{4} (1 - \frac{\pi}{4})$

Pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \frac{\pi}{4} (1 - \frac{\pi}{4})$

(b) En prenant $\varepsilon = 0,01$, on obtient : $P\left(\frac{\pi}{4} \in \left]Y_n - \frac{1}{100}; Y_n + \frac{1}{100}\right]\right) \geq 1 - \frac{10^4}{n} \frac{\pi}{4} (1 - \frac{\pi}{4})$

Il suffit de trouver l'entier n tel que $1 - \frac{10^4}{n} \frac{\pi}{4} (1 - \frac{\pi}{4}) \leq 0,05$

On obtient : pour $n \geq 33700$

$\left]Y_n - \frac{1}{100}; Y_n + \frac{1}{100}\right[$ est un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$.

```
(c) N = 33700
s = 0
for k in range(N):
    if simul_Z() <= 1:
        s += 1
print(s/N -0.01)
print(s/N +0.01)
```

donne l'affichage :

```
0.7735905044510386
0.7935905044510386
```

Exercice non préparé :

```
def paquet():
    x = rd.randrange(20)
    y = rd.randrange(20)
    z = rd.randrange(20)
    return [x, y, z]

def remplit(A, P): # Cette fonction modifie A et ne renvoie rien.
    for p in P:
        A[p] = True

N = 100000
s = 0
for k in range(N):
    A = [ False for k in range(20) ]
    while sum(A) != len(A):
        remplit(A, paquet())
    s += 1
print(s/N)
```

L'affichage est environ 24.3

Question de cours :

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E .

(u_1, \dots, u_n) est libre signifie que : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$

Exercice préparé :

- Sur \mathbb{R}^* f est le quotient de fonction C^0 donc elle est C^0 .
- En 0, $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $f(0) = 1$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ (f continue en 0)

En conclusion : f est continue sur \mathbb{R}

- (a)

```
def f(x):
    if x== 0:
        return 1
    return sin(x)/x
```

 # on a importé from math import sin

- (b)

```
def rectangle(f, a, b):
    S = 0
    d = (b-a)/N
    for k in range(N):
        S += f(a+k*d)
    return S*d
```

 # N une variable globale
Somme de Riemann

- C'est un simple changement de variable affine ($x = (2n + 1)t$) dans une intégrale continue sur un exemple.

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t) (2n+1) dt$$

- (a) g est de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle.
- (b)

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = 0$

- (c) Il suffit de montrer que \tilde{g} est dérivable en 0 et que : $\lim_{t \rightarrow 0} g'(t) = \tilde{g}'(0)$

- En 0, le calcul précédent montre $\frac{\tilde{g}(t) - \tilde{g}(0)}{t - 0} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}$ donc \tilde{g} est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = \frac{1}{6}$.
- Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{t^2 \cos(t) - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)} \end{aligned}$$

Or $t^2 \cos(t) - \sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^2 - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{t^4}{6} + o(t^4)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} g'(t) = -\frac{1}{6}$

En conclusion \tilde{g} est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

- (a) \tilde{g} et $t \mapsto -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t)$ sont de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ on peut donc faire l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt &= \left[-\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) \tilde{g}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t) dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t) dt$$

(b)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt \right| &\leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tilde{g}'(t)| dt \end{aligned}$$

donc (théorème des gendarmes) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = 0$

6. (a) On sait que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ donc

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

(b) On raisonne par récurrence sur n .

Pour $n=0$ c'est immédiat et si pour un n c'est vrai il vient :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2kt) &= \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} + 2 \cos(2(n+1)t) \\ &= \frac{\sin((2n+1)t) + 2 \sin(t) \cos(2(n+1)t)}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t) + \sin((2n+3)t) + \sin(-(2n+1)t)}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin((2n+3)t)}{\sin(t)} \quad (\text{ce qui achève la récurrence}) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t)) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1) \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t} - \sin((2n+1)t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \right)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt) dt \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} + 0 \end{aligned}$$

7. On vient de montrer que $u_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1) \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$

et on a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice non préparé :

Question de cours :

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ on appelle norme euclidienne le réel $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Exercice préparé :

1. On reconnaît la loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

```
def simul_X():
    u = rd.random()
    return u - 1/2
```

2.

```
def F_X(x):
    if x < -1/2 :
        return 0
    elif x < 1/2 :
        return x + \frac{1}{2}
    return 1
```

3. $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $E(X) = 0$, $E(|X|) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t| dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t dt$ $E(|X|) = \frac{1}{4}$
 et $E(X^2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt$ $E(X^2) = \frac{1}{12}$

4. (a) M_n à valeurs dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ et pour x dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) \quad (\text{indépendance des } X_k) \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

La fonction de répartition de M_n est : $\begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\\ x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^n & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ x \mapsto 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

- (b) La fonction de répartition de M_n est continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R} sauf en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, donc M_n est à densité

et M_n de densité : $\begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\\ x \mapsto n \left(x + \frac{1}{2}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ x \mapsto 0 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

M_n admet une espérance car cette densité est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ et continue sur ce segment et

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} nx \left(x + \frac{1}{2}\right)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

- (c) m_n à valeurs dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ et pour x dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} P(m_n \leq x) &= 1 - P((X_1 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n P(X_k > x) \quad (\text{indépendance des } X_k) \\ &= 1 - \left(1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^n\right)^n \end{aligned}$$

La fonction de répartition de m_n est : $\begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\\ x \mapsto 1 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^n & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ x \mapsto 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

(d) $P((m_n \geq 0) \cap (M_n \leq 0)) = 0$ or $P((m_n \geq 0) \neq 0 \text{ et } P(M_n \leq 0)) \neq 0$

Les variables aléatoires m_n et M_n ne sont pas indépendantes

(e) Linéarité de $E(\cdot)$: $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$

5. (a) $e^{\lambda S_n} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda X_i}$ (on justifiera l'existence des espérances à la fin)

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda S_n}) &= \prod_{i=1}^n E(e^{\lambda X_i}) \quad (\text{indépendance}) \\ &= (E(e^{\lambda X_i}))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } E(e^{\lambda X_i}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\lambda t} dt = \frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(e^{\lambda S_n}) = \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} \right)^n$

(b) L'inégalité de Markov donne : $P(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{E(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda t}}$

donc $P(\lambda S_n \geq \lambda t) \leq e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} \right)^n$

Pour $\lambda = 1$ il vient : $P(S_n \geq t) \leq e^{-t} (e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})^n \leq e^{-t + \frac{n}{2}} (1 - e^{-1})^n$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(S_n \geq t) \leq e^{-t + \frac{n}{2}}$

6. (a)

```
def simul_M(n):
    m = 0
    for k in range(n):
        a = simul_X()
        if a > m:
            m = a
    return m
```

(b) La fonction de répartition de M_n est :
$$\begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\\ x \mapsto (x + \frac{1}{2})^n & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ x \mapsto 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable certaine égale à $\frac{1}{2}$ est $F : \begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\\ x \mapsto 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

On a bien pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M_n}(x) = F(x)$

M_n converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à $\frac{1}{2}$

7. (a)

```
def simul_Z(n):
    return n*(1/2-simul_M(n))
```

(b)

```
N = 10000
n = 10

E = [ simul_Z(n) for k in range(N)]
x = sorted(E)
y = [(k+1)/N for k in range(N)]
plt.plot(x,y,'k')
plt.show()
```

(c) Z_n à valeurs dans $[0, n]$ et pour $x \in [0, n]$,

$$\begin{aligned}
P(Z_n \leq x) &= P\left(n\left(\frac{1}{2} - M_n\right) \leq x\right) \\
&= P\left(M_n \geq \frac{1}{2} - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - P\left(M_n \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{n} + \frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

donc Z_n converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice non préparé :

Question de cours :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dire que A et B sont semblables signifie que : il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice préparé :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2,

pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$.

1. • on remarque : $\deg(\Phi(P)) \leq \deg(P)$ donc $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$.
- $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\Phi(\alpha P + \beta Q) = \dots = \alpha\Phi(P) + \beta\Phi(Q)$.

Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

2. (a) $\Phi(1) = 0$, $\Phi(X) = 3X$ et

pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $\Phi(X^k) = 3kX^k + k(k-1)X^{k-2}(X^2 - 1)$ $\Phi(X^k) = (k^2 + 2k)X^k - k(k-1)X^{k-2}$

- (b) $\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}((\Phi(X^k))_{0 \leq k \leq n}) = \text{Vect}((\Phi(X^k))_{1 \leq k \leq n}) = n$

(Famille de polynômes non nuls de degrés différents)

$(\Phi(X^k))_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\text{Im}(\Phi)$.

- (c) Le théorème du rang donne : $\dim(\ker(\Phi)) = 1$ et comme $\Phi(1) = 0$, (1) est une base de $\ker(\Phi)$

3. Le résultat de 2.(a) permet d'affirmer que la matrice de Φ dans la base canonique est triangulaire supérieure donc le spectre se lit sur la diagonale ; ainsi $\text{Sp}(\Phi) = \{k^2 + k \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$: $n + 1$ valeurs propres distinctes donc Φ est diagonalisable.

4. (a)

```
def S(n):
    s = 0
    for k in range(0, N//2 + 1):
        s += comb(N+1, 2*k+1)
    return s
```

- (b) $S_4 = 5 + 10 + 1 = 16$ et $S_5 = 6 + 20 + 6032$.

- (c) $S_N + T_N = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{n}{k} = (1+1)^{N+1}$ donc $S_N + T_N = 2^{N+1}$

$$S_N - T_N = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} = -(1-1)^{N+1} \text{ donc } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $S_N - T_N = 0$$$

On en déduit que $S_N = T_N = 2^N$

5. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ le polynôme :

$$P_N = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1-X^2)^k X^{N-2k}$$

- (a) $P_0 = (-1)^0 \binom{1}{1} (1-X^2)^0 X^0$ donc $P_0 = 1$ $P_1 = (-1)^0 \binom{2}{1} (1-X^2)^0 X^1$ donc $P_1 = 2X$

et $P_2 = (-1)^0 \binom{3}{1} (1-X^2)^0 X^2 + \binom{3}{1} (-1)^1 (1-X^2)^1 X^0$ donc $P_2 = 4X^2 - 1$

- (b) P_N est la somme de polynômes de degré N et des coefficients dominants est :

$$\sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (-1)^k = S_N$$

Le monôme dominant de P_N est $2^N X^N$

- (c) Cette famille contient $n + 1$ vecteurs et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n + 1$ donc il suffit de montrer que la famille est libre.

or c'est une famille de polynômes non nuls de degrés différents donc elle est libre.

(P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

(d) $\sin((N+1)t) = \text{Im}((\cos(t) + i \sin(t))^{N+1})$

or la formule du binôme donne : $(\cos(t) + i \sin(t))^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (i \sin(t))^k (\cos(t))^{N+1-k}$
 donc

$$\begin{aligned} \sin((N+1)t) &= \frac{1}{i} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} \binom{N+1}{2k+1} (i \sin(t))^{2k+1} (\cos(t))^{N-2k} \\ &= \sin(t) \sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1 - \cos^2(t))^k (\cos(t))^{N-2k} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\boxed{\sin((N+1)t) = \sin(t) P_N(\cos(t))}$$

(e) En dérivant deux fois l'égalité précédente on obtient successivement :

$$(N+1) \cos((N+1)t) = \cos(t) P_N(\cos(t)) - \sin^2(t) P'_N(\cos(t))$$

$$-(N+1)^2 \sin((N+1)t) = -\sin(t) P_N(\cos(t)) - \cos(t) \sin(t) P'_N(\cos(t)) - 2 \sin(t) \cos(t) P'_N(\cos(t)) + \sin^3(t) P''_N(\cos(t))$$

Ce qui donne après simplification :

$$(N^2 + 2N) P_N(\cos(t)) - 3 \cos(t) P'_N(\cos(t)) - (\cos^2(t)^2 - 1) P''_N(\cos(t)) = 0$$

donc $\boxed{(N^2 + 2N) P_N - 3X P'_N - (X^2 - 1) P''_N = 0}$ (En effet : ce polynôme a une infinité de racines)

(f) On vient de montrer que $\Phi(P_N) = (N^2 + 2N) P_N$ donc (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction `est_mixte` prenant en argument une liste composée de 0 et/ou 1 qui renvoie `False` si la liste est composée uniquement de 0 ou uniquement de 1 et `True` sinon.
2. Écrire une fonction `plus_longue_suite` prenant en argument une liste composée de 0 et de 1 qui renvoie la plus longue suite de 1 de la liste.

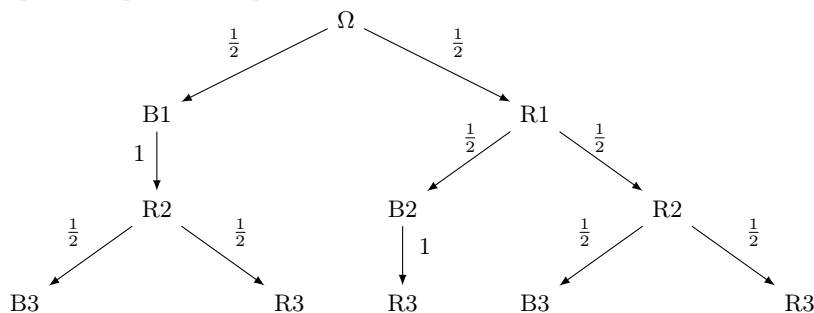
Exemple : si $L = [0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$, la fonction renvoie 3.

Question de cours :

Théorème fondamental de l'analyse :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$ et f une fonction définie sur I .Si f est continue sur I alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I .**Exercice préparé :**

On peut illustrer l'expérience par l'arbre pondéré suivant :



1. (a) La formule des probabilités totales avec le système complet (R_n, B_n) donne :

$$P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(R_{n+1}) \text{ donc } \boxed{r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + b_n}$$

$$P(B_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \text{ donc } \boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2}r_n}$$

- (b) $b_n = 1 - r_n$ donc $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + 1 - r_n$ ou encore : $r_{n+1} = -\frac{1}{2}r_n + 1$

$$\text{Il suffit de traiter cette suite arithmético-géométrique avec } r_1 = \frac{1}{2} : \boxed{\forall n \geq 1, \quad r_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\text{et } b_n = 1 - r_n \text{ donc } \boxed{\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

2. On note X le rang du premier tirage d'une boule bleue et Y le rang du premier tirage d'une boule rouge

(a) `def simul_XY():`
`if rd.random() <= 0.5 : # si on tout de suite une boule bleue`
`return 1, 2`
`n = 2`
`while rd.random() > 0.5 : # tant qu'on a des boules rouges`
`n += 1`
`return n, 1`

(b) `N = 10000`
`Sx, Sy = 0, 0`
`for k in range(N):`
`x, y = simul_XY()`
`Sx += x`
`Sy += y`
`print(Sx/N)`
`print(Sy/N)`

- (c) $\boxed{Y \text{ suit la loi uniforme sur } \{1, 2\}}$ et $\boxed{X \text{ suit la géométrique de paramètre } \frac{1}{2}}$.

- (d) $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0 \neq P(X = 1) \times P(Y = 1)$ donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

3. (a) $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Z_1 = 1) = P(B_1)$ donc $\boxed{Z_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$
 $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Z_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2)$ donc $\boxed{Z_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{3}{4}\right)}$
 $Z_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $P(Z_3 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ et $P(Z_3 = 2) = P(B_1 \cap R_2 \cap B_3)$
donc $\boxed{P(Z_3 = 0) = \frac{1}{8} \quad P(Z_3 = 1) = \frac{5}{8} \text{ et } P(Z_3 = 2) = \frac{1}{4}}$
 $Z_4(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $P(Z_4 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$ et
 $P(Z_4 = 1) = P(B_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4) + P(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4)$
donc $\boxed{P(Z_4 = 0) = \frac{1}{16} \quad P(Z_4 = 1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \text{ et } P(Z_4 = 2) = \frac{1}{2}}$

- (b) • Dans le cas n pair : $n = 2m$,

Dans ce cas on ne peut pas avoir plus de m boules bleues avec $m+1$ boules bleues on aurait nécessairement deux boules bleues consécutives.

- Dans le cas n pair : $n = 2m + 1$,

Dans ce cas on ne peut pas avoir plus de $m + 1$ boules bleues avec $m + 2$ boules bleues on aurait nécessairement deux boules bleues consécutives.

On peut alors conclure par : Z_n prend toutes les valeurs entières entre 0 et $\lfloor \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \rfloor$

- (c) $P(Z_n = 0) = P(R_1 \cap \dots \cap R_n)$ donc $P(Z_n = 0) = \frac{1}{2^n}$.

- (d) • Si n est impair : $n = 2m + 1$ alors ... donc $P(Z_n = m + 1) = \frac{1}{2^{m+1}}$.

Dans ce cas il n'y a qu'une configuration : $BRBR\dots RBRB$

- Si n est pair : $n = 2m$ alors ... donc $P(Z_n = m) = \frac{1}{2^{m+1}}$.

Dans ce cas il y a plusieurs configurations :

- une qui finit par R : $BRBR\dots BRBRBR$
- $m + 1$ qui finissent par B :

$$\boxed{R}BRBR\dots BRBRB, \quad BR\boxed{R}BR\dots BRBRB, \quad \dots, \quad BRBR\dots BRBR\boxed{R}B$$

- (e) En dehors de $k \in \lfloor \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \rfloor$ la probabilité est nulle.

Distinguons deux types de séquences :

- La dernière boule est bleue.

Ces séquences sont entièrement caractérisées par la place des $k - 1$ blocs "BR" et $n - 2k + 1$ "R" avant cette dernière boule "B".

Elles sont au nombre de $\binom{n-k}{k-1}$ et elles ont chacune pour probabilité $\frac{1}{2^{n+1-k}}$

- La dernière boule est rouge.

Ces séquences sont entièrement caractérisées par la place des k blocs "BR" et $n - 2k$ "R".

Elles sont au nombre de $\binom{n-k}{k}$ et elles ont chacune pour probabilité $\frac{1}{2^{n-k}}$

Ces deux cas forment une partition de $(Z_n = k)$ donc

$$P(Z_n = k) = \binom{n-k}{k-1} \frac{1}{2^{n+1-k}} + \binom{n-k}{k} \frac{1}{2^{n-k}}$$

Exercice non préparé :

Question de cours :

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n : $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2, | \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Exercice préparé :

1. f est continue et à valeurs positives ou nulles sur \mathbb{R} , il suffit de montrer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$
(Calcul à présenter soigneusement au tableau)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \sqrt{4-t^2} dt && \text{(intégrale convergente)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2(u)} 2\cos(u) du && \text{Changement de variable } t = \sin(u) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2u)) du = 1 \end{aligned}$$

f est bien une densité

2. (a) $x \mapsto x^n f(x)$ est nulle en dehors de $[-2, 2]$ et continue sur $[-2, 2]$
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$ est absolument convergente donc (théorème de transfert)

pour tout $n \in \mathbb{N}$, que X^n admet une espérance

(b) $x \mapsto x^n f(x)$ est impaire et $E(X^{2k+1})$ existe donc $E(X^{2k+1}) = 0$

3. (a) Le programme suivant permet d'estimer les 10 premières valeurs de U_k .

```
from math import pi, sqrt
import scipy.integrate as sc
for k in range(11):
    def g(x):
        return x**(2*k)*sqrt(4-x**2)/(2*pi)
    print(sc.quad(g, -2, 2))
```

qui donne l'affichage suivant : La deuxième valeur est une majoration de l'erreur.

```
(1.0000000000000002, 6.36773078710462e-10)
(1.0000000000000002, 3.4132388027074967e-09)
(1.9999999999999873, 2.5540261017198418e-08)
(4.999999999999991, 6.793205997723817e-10)
...
(4861.999999998512, 5.90583485973184e-05)
(16795.99999999945, 1.4916062355041504e-05)
```

- (b) Pour f une fonction continue sur $[a, b]$,

$$\text{En posant } S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$

On peut remplacer la fonction `scipy.quad` par la fonction suivante :

```
def integrale(f, a, b):
    N = 1000
    S = 0
    for k in range(N):
        S += f(a+k*(b-a)/N)
    return S*(b-a)/N
```

4. (a) • $g : x \mapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $]0, 1]$ (fonction usuelle $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$).

et pour tout $x \in]0, 1]$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

• en 0, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0

la fonction $g : x \mapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$

Remarque : cette propriété nous sert dans l'intégration par parties de la question suivante.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 4U_k - U_{k+1} &= 4 \int_{-2}^2 \frac{x^{2k}}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx - \int_{-2}^2 \frac{x^{2k+2}}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} (4-x^2) \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right] - \int_{-2}^2 \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \times \frac{3}{2} (-2x) \sqrt{4-x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(0 + \frac{3}{2k+1} \int_{-2}^2 x^{2k+2} \sqrt{4-x^2} dx \right) \\ &= \frac{3}{2k+1} U_{k+1} \end{aligned}$$

on obtient bien : $U_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2} U_k$

(c)

```
u = 1
for k in range(100):
    if (2*(2*k+1)*u)%(k+2) != 0:
        print("stop")
    u=(2*(2*k+1)*u)//(k+2)
print('u(' + str(k+1) + ')=' , u)
```

Le programme n'affiche aucun "stop" donc les valeurs sont toutes entières.

Les 6 derniers chiffres de U_{100} sont 909320.

$u(100) = 896519947090131496687170070074100632420837521538745909320$

(d) On parvient de proche en proche à la relation : $\forall k \in \mathbb{N}, U_k = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}$ à démontrer par récurrence.

(e)

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \\ &\sim \frac{(2k)^{2k}}{k^k (k+1)^{k+1}} \times \frac{e^k e^{k+1}}{e^{2k}} \times \sqrt{\frac{2\pi(2k)}{2\pi k \times 2\pi(k+1)}} \\ &\sim 2^{2k} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \times \frac{1}{k+1} \times e \times \sqrt{\frac{1}{\pi(k+1)}} \quad \text{donc } \boxed{U_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}} \end{aligned}$$

Exercice non préparé :

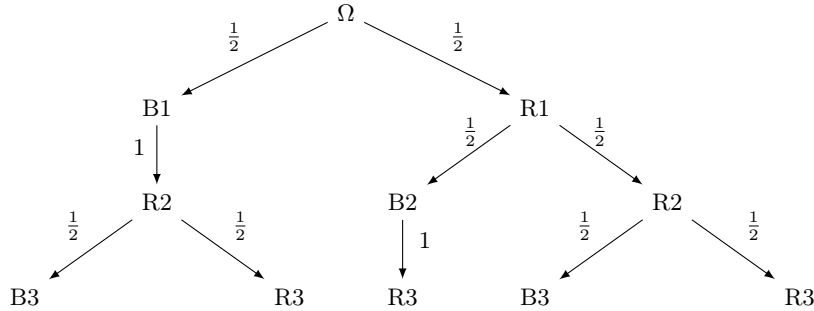
1. def maximum(L):
 m = L[0]
 for i in range(1, len(L)):
 if L[i] > m:
 m = L[i]
 return m

2. def histo(L):
 n = maximum(L)
 Nb_occ = (n+1)*[0]
 for l in L:
 Nb_occ[l] += 1
 return Nb_occ

3. def tri_compt(L):
 S = []
 Nb_occ = histo(L)
 for k in range(len(S)):
 for i in range(Nb_occ[k]):
 S.append(k)
 return S

Question de cours : Une application linéaire est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice préparé : On peut illustrer l'expérience par l'arbre pondéré suivant :



1. (a) La formule des probabilités totales avec le système complet (R_n, B_n) donne :

$$P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(R_{n+1}) \text{ donc } \boxed{r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + b_n}$$

$$P(B_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \text{ donc } \boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2}r_n}$$

- (b) $b_n = 1 - r_n$ donc $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + 1 - r_n$ ou encore : $r_{n+1} = -\frac{1}{2}r_n + 1$

$$\text{Il suffit de traiter cette suite arithmético-géométrique avec } r_1 = \frac{1}{2} : \boxed{\forall n \geq 1, \quad r_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\text{et } b_n = 1 - r_n \text{ donc } \boxed{\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

2. (a)

```
def simul_Z(n):
    L = [rd.randint(0, 1)]          # 1 : bleue et 0 : rouge
    while len(L) < n:
        if L[-1] == 1:
            L.append(0)
        else:
            L.append(rd.randint(0, 1))
    return sum(L)
```

- (b)

```
for n in range(2,11):
    N = 100000
    S = 0
    for k in range(N):
        x = simul_Z(n)
        S += x
    print(n, ' : ', S/N)
```

Avec l'affichage :

```
2 : 0.74796
3 : 1.12432
4 : 1.43653
5 : 1.78314
6 : 2.10866
7 : 2.44148
8 : 2.77436
9 : 3.11501
10 : 3.44171
```

3. $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Z_1 = 1) = P(B_1)$ donc $\boxed{Z_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$ et $\boxed{E(Z_1) = \frac{1}{2}}$

$$Z_2(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(Z_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) \text{ donc } \boxed{Z_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{3}{4}\right)} \text{ et } \boxed{E(Z_2) = \frac{3}{4}}$$

$$Z_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}, \quad P(Z_3 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{8} \text{ et } P(Z_3 = 2) = P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \boxed{P(Z_3 = 0) = \frac{1}{8}} \quad \boxed{P(Z_3 = 1) = \frac{5}{8}} \text{ et } \boxed{P(Z_3 = 2) = \frac{1}{4}} \text{ et } \boxed{E(Z_3) = \frac{9}{8}}$$

$$Z_4(\Omega) = \{0, 1, 2\}, \quad P(Z_4 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) \text{ et}$$

$$P(Z_4 = 1) = P(B_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4) + P(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4)$$

$$\text{donc } \boxed{P(Z_4 = 0) = \frac{1}{16}} \quad \boxed{P(Z_4 = 1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}} \text{ et } \boxed{P(Z_4 = 2) = \frac{1}{2}} \text{ et } \boxed{E(Z_4) = \frac{23}{16}}$$

4. • Dans le cas n pair : $n = 2m$,

Dans ce cas on ne peut pas avoir plus de m boules bleues avec $m + 1$ boules bleues on aurait nécessairement deux boules bleues consécutives.

• Dans le cas n pair : $n = 2m + 1$,

Dans ce cas on ne peut pas avoir plus de $m + 1$ boules bleues avec $m + 2$ boules bleues on aurait nécessairement deux boules bleues consécutives.

On peut alors conclure par : Z_n prend toutes les valeurs entières entre 0 et $\boxed{\left[0; \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right]}$

5. (a) $R_1, B_1 \cap R_2$ est un système complet car $B_1 \cap B_2$ est impossible donc

$$P(Z_{n+2} = k) = P(R_1)P_{R_1}(P(Z_{n+2} = k) + P(B_1 \cap R_2)P_{B_1 \cap R_2}(P(Z_{n+2} = k)$$

• si R_1 est réalisé alors on se retrouve dans la situation du début avec un décalage d'un tirage donc

$$P_{R_1}(P(Z_{n+2} = k) = P(Z_{n+1} = k)$$

• si $B_1 \cap R_2$ est réalisé alors on se retrouve dans la situation du début avec un décalage de 2 tirages et une boule bleue déjà tirée donc

$$P_{B_1 \cap R_2}(P(Z_{n+2} = k) = P(Z_n = k - 1)$$

on obtient bien : $\boxed{P(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2}P(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2}P(Z_n = k - 1)}$

(b) En multipliant par k et en sommant la relation précédente sur $\left[0; \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right]$ il vient :

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} kP(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} kP(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} kP(Z_n = k - 1)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} kP(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} kP(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} (k+1)P(Z_n = k)$$

donc $\boxed{E(Z_{n+2}) = \frac{1}{2}E(Z_{n+1}) + \frac{1}{2}E(Z_n) + \frac{1}{2}}$,

Il reste à montrer par exemple par récurrence d'ordre 2 la relation :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad E(Z_n) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}}$$

6. (a) $P(Z_n = 0) = P(R_1 \cap \dots \cap R_n)$ donc $P(Z_n = 0) = \frac{1}{2^n}$.

(b) • Si n est impair : $n = 2m + 1$ alors ... donc $P(Z_n = m + 1) = \frac{1}{2^{m+1}}$.

Dans ce cas il n'y a qu'une configuration : $BRBR\dots RBRB$

• Si n est pair : $n = 2m$ alors ... donc $P(Z_n = m) = (m+2) \frac{1}{2^{m+1}} \left(= \frac{1}{2^m} + \frac{m}{2^{m+1}} \right)$.

Dans ce cas il y a plusieurs configurations :

• une qui finit par R : $BRBR\dots BRBRBR$

• m qui finissent par B :

$$\boxed{R}BRBR\dots BRBRB, \quad BR\boxed{R}BR\dots BRBRB, \quad \dots, \quad BRBR\dots BRBR\boxed{R}B$$

(c) En dehors de $k \in \left[0; \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right]$ la probabilité est nulle.

Distinguons deux types de séquences :

• La dernière boule est bleue.

Ces séquences sont entièrement caractérisées par la place des $k - 1$ blocs "BR" et $n - 2k + 1$ "R" avant cette dernière boule "B".

Elles sont au nombre de $\binom{n-k}{k-1}$ et elles ont chacune pour probabilité $\frac{1}{2^{n+1-k}}$

• La dernière boule est rouge.

Ces séquences sont entièrement caractérisées par la place des k blocs "BR" et $n - 2k$ "R".

Elles sont au nombre de $\binom{n-k}{k}$ et elles ont chacune pour probabilité $\frac{1}{2^{n-k}}$

Ces deux cas forment une partition de $(Z_n = k)$ donc

$$P(Z_n = k) = \binom{n-k}{k-1} \frac{1}{2^{n+1-k}} + \binom{n-k}{k} \frac{1}{2^{n-k}}$$

Question de cours :

Pour q un réel vérifiant $|q| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Exercice préparé :

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} et Ψ l'application définie sur F par :

$$\forall y \in F, \quad \Psi(y) = y'' + 2y'$$

1. Φ est une application de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$.
 et $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R})^2, \Phi(\alpha u + \beta v) = \dots = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$

Ψ est un endomorphisme de F

2. On s'intéresse au problème différentiel :

$$(E) : \begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = -te^{-t} & t \in [0, 5] \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

En posant $z(t) = y'(t)$, (E) peut s'écrire :

$$\text{sur}[0, 5], \quad \begin{cases} y'(t) = z(t) & y(0) = 0 \\ z'(t) = -2z(t) - te^{-t} & z(0) = 1 \end{cases}$$

(a)

```

from math import exp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = 0
b = 5
N = 100
dt = (b-a)/N
t = np.zeros(N+1)
y = np.zeros(N+1)
z = np.zeros(N+1)
t[0] = a
y[0] = 0
z[0] = 1
for k in range(N):
    t[k+1] = t[k] + dt
    y[k+1] = y[k] + dt*z[k]
    z[k+1] = z[k] + dt*(-2*z[k] - t[k] * exp(-t[k]))

plt.plot(t,y,'k')
y = [x*exp(-x) for x in t]
plt.plot(t,y,'r')
plt.show()

```

(b) (voir ci-dessus)

(c) -1 est une valeur propre de Ψ .

3. Quel que soit le réel λ l'équation différentielle $y'' + 2y' - \lambda y = 0$ admet une solution non nul.

(Théorème de résolution des équations du second degré à coefficients constants)

4. (a) Soit α, β, γ des réels tels que $\alpha \exp + \beta \cos + \gamma \sin = 0$
 donc $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha \exp(t) + \beta \cos(t) + \gamma \sin(t) = 0$
 En prenant la limite en $+\infty$ il vient $\alpha = 0$ (Raisonnement par l'absurde)
 d'où $\forall t \in \mathbb{R}, \beta \cos(t) + \gamma \sin(t) = 0$
 en prenant maintenant $t = 0$ il vient $\beta = 0$ puis il vient $\gamma = 0$
 Ce qui achève la démonstration de la liberté de \mathcal{B} .
 et comme elle est génératrice de G c'est bien une base de G .

(b) On remarque que pour tout $y \in \{\exp, \cos, \sin\}$ on a $\Phi(y) \in G$

et Φ est linéaire donc On peut définir un endomorphisme de G en posant $\forall f \in G, \varphi(f) = \Psi(f)$

(c) $\Psi(\exp) = \exp + 2\exp = 3\exp$, $\Psi(\cos) = -\cos - 2\sin$ et $\Psi(\sin) = -\sin + 2\cos$

Donc la matrice M de φ dans \mathcal{B} est égale à :
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 + 4 \end{pmatrix}$$

donc M n'a qu'une valeur propre 3 et la dimension de $E_3(M)$ vaut 1 donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

5. Reprendre la matrice M précédente et diagonaliser M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Question de cours :

La formule des probabilités composées :

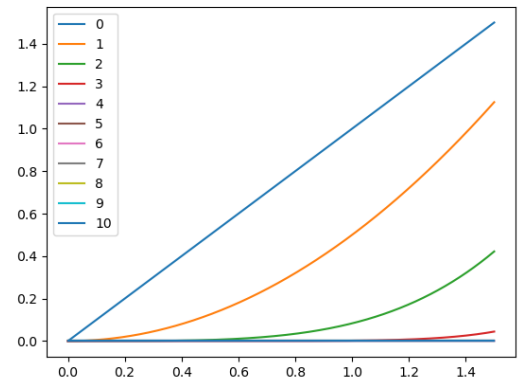
Soit (A_1, \dots, A_n) une liste d'événements d'un même espace probabilisé, si $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exercice préparé :

- $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto \frac{x^4}{2}$
- Ecrire une fonction Python traçant la fonction f_{n+1} pour n allant de 1 à 10 et sur $[0, 3/2]$.

```
N = 1000
a, b = 0, 1.5
Liste_x = [ a + k*(b-a)/N for k in range(N+1) ]
Liste_y = Liste_x
plt.plot(Liste_x, Liste_y, label = '0')
for n in range(1,11):
    Liste_y = [ t**2/(n+1) for t in Liste_x]
    plt.plot(Liste_x, Liste_y, label = str(n))
plt.legend()
plt.show()
```



- Un récurrence immédiate permet de justifier que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geq 0}$.

- $f_0 : x \mapsto x$ est clairement croissante sur \mathbb{R}^+
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f_n est croissante sur \mathbb{R}^+ ,
pour x_1, x_2 tel que $x_1 < x_2$,

f_n est croissante donc $f_n(x_1) \leq f_n(x_2)$ et comme $f_n(x) \geq 0$ il vient $\frac{f_n(x_1)^2}{n+1} \leq \frac{f_n(x_2)^2}{n+1}$

et ainsi : $x_1 < x_2 \implies f_{n+1}(x_1) \leq f_{n+1}(x_2)$ ce qui montre que f_{n+1} est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Ce qui achève la récurrence.

Remarque :

On peut aussi utiliser la fait que f_{n+1} est la composée de deux fonctions croissantes : f_n et $x \mapsto \frac{x^2}{n+1}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on suppose ici qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0+1}(x) \leq f_{n_0}(x)$

(a) On a supposé l'initialisation : Pour $n_0 \in \mathbb{N}$, $f_{n_0+1}(x) \leq f_{n_0}(x)$

Soit $n \geq n_0$ tel que : $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ donc $0 \leq f_{n+1}(x)^2 \leq f_n(x)^2$ et comme de plus $0 \leq \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$

on a bien $\frac{f_{n+1}(x)^2}{n+2} \leq \frac{f_n(x)^2}{n+1}$ d'où $f_{n+2}(x) \leq f_{n+1}(x)$ (ce qui achève la récurrence)

(b) $(f_n(x))_{n \geq n_0}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Et en passant à la limite sur l'égalité $f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)^2}{n+1}$ il vient $\ell = 0$

$$\boxed{(f_n(x))_{n \geq n_0} \text{ converge vers } 0}$$

- On remarque : $f_2(1) < f_1(1)$ donc en utilisant la question 4) il vient : $\boxed{(f_n(1)) \text{ converge vers } 0}$.

- Montrons par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f_n(2) \geq n+2}$

- Pour $n = 0$ on a d'une part : $f_0(2) = 2$ et d'autre part : $0 + 2 = 2$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(2) \geq n + 2$,

on alors $f_{n+1}(2) = \frac{f_n(2)^2}{n+1} \geq \frac{(n+2)^2}{n+1}$

or $\frac{(n+2)^2}{n+1} - (n+3) = \frac{1}{n+1}$ donc $f_{n+1}(2) \geq n+3$

7. On a $E_0 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$ et $E_\infty = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty\}$

(a) On vient de voir que $1 \in E_0$ et $2 \in E_\infty$ donc $\boxed{E_0 \text{ et } E_\infty \text{ sont non vides}}$.

(b) Comme f_n est croissante sur \mathbb{R}^+ si $0 \leq y \leq x$ alors $0 \leq f_n(y) \leq f_n(x)$.

donc si de plus $x \in E_0$ alors $y \in E_0$

Comme f_n est croissante sur \mathbb{R}^+ si $0 \leq x \leq y$ alors $f_n(x) \leq f_n(y)$.

donc si de plus $x \in E_\infty$ alors $y \in E_\infty$

8. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_{n+1}(\delta)} = \left(\frac{f_n(x)}{f_n(\delta)}\right)^2$

on montre par un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{f_n(x)}{f_n(\delta)} = \left(\frac{x}{\delta}\right)^{(2^n)}$

9. $\delta \in E_{+\infty}$ donc $[\delta, +\infty[\subset E_{+\infty}$ (question 7)b)

de plus si $x < \delta$ le résultat de la question 8. on a $x \in E_0$ donc

$$\boxed{E_0 = [0; \delta[\text{ et } E_{+\infty} = [\delta, +\infty[}$$

10. Rapidement :

La relation $f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)^2}{n+1}$ donne $\frac{\ln(f_n(x))}{2^n} - \frac{\ln(f_{n-1}(x))}{2^{n-1}} = -\frac{\ln(n)}{2^n}$

En sommant il vient :

$$\frac{\ln(f_n(x))}{2^n} - \frac{\ln(x)}{2^0} = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k}$$

d'où

$$\ln(f_n(x)) = 2^n \left(\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right)$$

donc (A détailler !)

$$\boxed{\delta = \prod_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{2^k}}}$$

Question de cours :

Exercice préparé :

1. • $f \geq 0$ et f continue sur \mathbb{R} sauf en 1.

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt$$

or $F : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ est une primitive de f sur $]1; +\infty[$ et $\lim_1 F = -1$ et $\lim_{+\infty} F = 0$,

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut 1. donc $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}.$

2. si $x < 1$ alors $F_X(x) = 0$ et si $x \geq 1$ alors $F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

3. U à valeur dans $]0, 1[$ donc V à valeurs dans $]1; +\infty[$ (*Etude de fonction de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$*)

$$\begin{aligned} P(V \leq x) &= P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= P\left(\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{car } 0 < 1 - \frac{1}{x^2} < 1 \end{aligned}$$

On retrouve bien la fonction de répartition de X .

4. On applique le résultat de la question précédente.

```
def simul_X():
    u = rd.random()
    return 1/sqrt(1-u)
```

5. $E(X) = 2$ et X n'a pas de variance.

```
6. (a) def Simul_T(n):
    L = [simul_X() for k in range(n)]
    return max(L)/sqrt(n)
```

```
(b) N = 1000000
    n = 1000
    c = 0
    for i in range(N):
        c += Simul_T(n)
    print(n, ' : ', c/N)
```

7. Pour $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\begin{aligned} P(T_n \leq x) &= P\left(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}} \leq x\right) \\ &= P\left(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x\sqrt{n}\right) \\ &= P\left(X_1 \leq x\sqrt{n}\right)^n \quad \text{indépendance} \\ &= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \end{aligned}$$

8. T a pour densité g donc sa fonction de répartition (en intégrant) est :

$$\text{si } x \leq 0 \text{ alors } F_T(x) = 0 \quad \text{et} \quad \text{si } x \geq 1 \text{ alors } F_T(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{Soit } x > 0, \text{ pour } n > \frac{1}{x^2} \text{ on a : } P(T_n \leq x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

(T_n) converge en loi vers T de densité g .

9. *Il manque la rédaction.*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_{+\infty}^0 -2e^{-u^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \quad \text{avec } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sigma\sqrt{2\pi} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

T admet une espérance qui vaut $\sqrt{\pi}$

Question de cours :

Exercice préparé :

On pose $x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$ avec $\alpha = e^r > 0$ et $x_0 > 0$.

1. $y_{n+1} = y_n e^{r \left(1 - \frac{y_n}{p}\right)}$ donc $by_{n+1} = by_n e^{r - \frac{ry_n}{p}}$ et comme $b = r/p$, $\alpha = e^r$ et $x_n = by_n$ il vient bien :

$$x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$$

Si $x_0 = 0$ alors $x_n = 0$ pour tout n : la population reste nulle.

2. La fonction $x \mapsto \alpha x e^{-x}$ envoie \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* . Par récurrence immédiate, si $x_0 > 0$ alors $x_n > 0$ pour tout n .
 3. La fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x e^{-x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ , avec $f'_\alpha(x) = \alpha(1-x)e^{-x}$.

x	0	1	$+\infty$		
$f'_\alpha(x)$		+	0	-	
$f_\alpha(x)$	0	\nearrow	αe^{-1}	\searrow	0

4. $f_\alpha(x) = x \iff \alpha e^{-x} = 1$ ou $x = 0$, et comme $\alpha > 0$ $x = \ln \alpha$ ou $x = 0$.

- Si $\alpha \leq 1$, le seul point fixe est $x = 0$.
- Si $\alpha > 1$, les deux points fixes sont $\ln \alpha$ et 0.

5. (a) Programme Python :

```
from math import exp
import matplotlib.pyplot as plt

def ricker(x0, alpha):
    x = x0
    for k in range(201):
        if k % 2 == 0:
            couleur = 'blue'
        else:
            couleur = 'red'
        plt.plot(k, x, '+', color=couleur)
        x = alpha * x * exp(-x)
    plt.show()
```

- (b) Pour $x_0 = 0,5$ et $\alpha = 4$: (x_{2n}) et (x_{2n+1}) semblent adjacentes et converger vers un réel proche de 1.4

6. On suppose $\alpha \in]e, e^2[$.

- (a) $g_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x = \alpha x e^{-x} - x = x e^{-x}(\alpha - e^x)$.

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$	
$(\alpha - e^x)$		+	0	-
$g_\alpha(x)$	0	+	0	-

(b) $f'_\alpha(x) = \alpha(1-x)e^{-x}$ donc pour $x \geq 1$: $|f'_\alpha(x)| = \alpha(x-1)e^{-x}$

En étudiant : $h : x \mapsto (x-1)e^{-x}$, on montre que $h(x) \leq e^{-2}$ sur $[1; +\infty[$.

Donc $|f'_\alpha(x)| \leq \alpha e^{-2} < e^2 \cdot e^{-2} = 1$ car ici $\alpha < e^2$. On pose $M = \alpha e^{-2} \in [0, 1[$.

(c) En utilisant le tableau de variations de la question 3, sachant qu'ici $\alpha e^{-1} > 1$ il y a exactement deux solutions : $\lambda_\alpha \in]0, 1[$ et $\mu_\alpha \in]1, +\infty[$.

(d) Raisonnement par l'absurde : supposons $x_n \notin [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$ pour tout n .

le tableau de variations montre que si $x \notin [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$ alors $f(x) \in [0, 1]$

donc $x_{n+1} = f(x_n) \in [0, 1]$ et comme $x_{n+1} \notin [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$ il vient $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$

On aurait alors (x_n) croissante majorée donc convergente vers un réel de $]0, \lambda_\alpha]$

(A détailler on utilise $x_0 \neq 0$)

Ce n'est pas possible car il n'y a pas de point fixe dans cet intervalle. (En effet : $\ln(\alpha) > 1$)

Donc il existe n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.

(e) Pour $x \in [1, \mu_\alpha]$: $f_\alpha(x) \in [f_\alpha(\mu_\alpha), f_\alpha(1)] = [1, \alpha e^{-1}]$ (décroissance de f_α sur $[\mu_\alpha; +\infty[$).

Or ici $f_\alpha(\alpha e^{-1}) > 1$ donc $f_\alpha(\alpha e^{-1}) > f_\alpha(\mu_\alpha)$ et ainsi $\alpha e^{-1} < \mu_\alpha$ (strict. décroissance de f_α)

(f) Pour $n \geq n_0 + 1$, on a $x_n \in [1, \mu_\alpha]$ et le théorème des accroissements finis donne :

$$|x_{n+1} - \ln \alpha| = |f_\alpha(x_n) - f_\alpha(\ln \alpha)| \leq M|x_n - \ln \alpha|$$

puisque $|f'_\alpha| \leq M$ sur $[1, +\infty[$.

(g) Par récurrence, $|x_n - \ln \alpha| \leq M^{n-n_0-1}|x_{n_0+1} - \ln \alpha| \rightarrow 0$.

(x_n) converge vers $\ln \alpha$

1.a) Ensemble de définition : f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(2+x)^2} < 0$ sur tout D : f est **strictement décroissante** sur chacun des trois intervalles $] -\infty, -2[$, $] -2, -1[$ et $] -1, +\infty[$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	0^+

On applique théorème de la bijection sur les trois intervalles.

L'équation $f(x) = 1$ admet exactement 2 solutions.

$$1.b) f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} = 1 \Leftrightarrow (2+x) + 2(1+x) = (1+x)(2+x) \Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ et } x = \sqrt{2}$$

2.a) et b)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as la
```

```
def A(n):
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i, j] = (j+1) * (i != j)
    return M
```

```
print(A(10))
```

```
for n in [2, 3, 4, 10]:
    print(la.eigvals(A(n)))
```

```
# Affichage :
[ 1.41421356 -1.41421356]
[ 3.76643548 -1.28282386 -2.48361162]
[ 7.1061962 -1.21448662 -3.52502525 -2.36668434]
[48.11195054 -1.08895994 -2.15868999 -9.63101185 -3.22099543 -8.53470637
 -4.27999435 -5.33818536 -7.46161804 -6.39778921]
```

3.a) La fonction est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles.

x	$-\infty$	$-n$	$-n+1$	\dots	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+

(\mathcal{E}_n) admet une unique solution dans chacun des intervalles $] -1, +\infty[$ et $] -k, -(k-1)[$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Cela donne $1 + (n-1) = n$ solutions distinctes en tout.

3.b) A_n est une matrice $n \times n$ et A_n admet n valeurs propres distinctes donc A_n est diagonalisable.

4.a) Pour $t \in]-2, -1[$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{n+1}{n+1+t}$.

de plus $n+1+t > n-1 > 0$ (car $n \geq 2$), donc $\frac{n+1}{n+1+t} > 0$, d'où $f_{n+1}(t) > f_n(t)$.

On en déduit que $\lambda_n \in]-2, -1[$ et ainsi $f_{n+1}(\lambda_n) > f_n(\lambda_n) = 1$ d'où $f_{n+1}(\lambda_n) > f_{n+1}(\lambda_{n+1})$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $] -2, -1[$

(λ_n) est (strictement) croissante.

4.b) (λ_n) est croissante et majorée par -1 donc *théorème de convergence monotone* :

(λ_n) converge vers un réel $\ell \in]-2, -1[$

Si $\ell \in]-2, -1[$, sachant que $-2 < \lambda_n \leq \ell < -1$ et que f_n est décroissante sur $] -2, -1[$: $f_n(\lambda_n) \geq f_n(\ell)$.

4.c) La question précédente donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\lambda) \leq 1$,

or $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} \geq \frac{n}{1+\lambda}$. (En effet : pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{k}{k+\lambda} \geq \frac{1}{1+\lambda}$)

Ce qui entraîne par minoration que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) = +\infty$ ce qui est impossible car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\lambda) \leq 1$.

$\ell = -1$.

4.d) $2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geq \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$.

En sommant de $k=1$ à n :

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(Théorème des gendarmes) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow 0$

4.e) On sait $f_n(\lambda_n) = 1$, donc $\frac{1}{1+\lambda_n} + \frac{2}{2+\lambda_n} + \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} = 1$ puis $\frac{1}{1+\lambda_n} = \frac{\lambda_n}{2+\lambda_n} - \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$

Comme $-2 \leq \lambda_n \leq -1$ on montre que : $\sum_{k=3}^n \frac{k}{k-1} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k-2}$

avec un changement d'indice : $\sum_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n} \leq \sum_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{2}{k}\right)$

En appliquant le résultat de 4)d) on en déduit :

$$\frac{1}{1+\lambda_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n, \quad \text{et. } 1+\lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

5. Sur $(A - \lambda I_n)X = 0$ en faisant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$ il vient :

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ (\lambda+1)x_1 - (\lambda+2)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda+1)x_1 - (\lambda+n)x_n = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = -1$ la seule solution est $(0, \dots, 0)$ donc -1 n'est pas valeur propre et on continue avec $\lambda \neq -1$,

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0 \\ x_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{\lambda+1}{\lambda+n} x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} (f_n(\lambda) - 1)x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{\lambda+1}{\lambda+n} x_1 \end{cases}$$

Les valeurs propres de A_n sont exactement les solutions de (E_n) .

1.a) D diagonale donc : $(DX)_i = d_i x_i$, donc $X^\top DX = \sum_{i=1}^n x_i (DX)_i = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$

$$X^\top DX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

1.b)

(\Rightarrow) Si tous les $d_i > 0$ et $X \neq 0$, alors au moins un $x_i \neq 0$, donc $X^\top DX = \sum d_i x_i^2 > 0$.

(\Leftarrow) Si $X^\top DX > 0$ pour tout $X \neq 0$: en prenant $X = e_i$ (vecteur de base canonique), $e_i^\top D e_i = d_i > 0$.

tous les $d_i > 0$ si, et seulement si, $X^\top DX > 0$ pour tout $X \neq 0$.

2.a) et b)

```
import random as rd
import numpy as np

def f(M):
    n, n = np.shape(M)
    X = [ rd.random() for k in range(n) ]
    S = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            S += M[i, j] * X[i] * X[j]
    return S

M = np.array([ [1, 1], [2, 1]])
print(f(M))

M = np.array([ [-1, 1, 1], [1, -1, 1], [1, 1, -1]])

c = 0
for k in range(100):
    if f(M) > 0:
        c += 1
print(c) # Environ 80
```

3.a) $AU_1 = 4U_1$, U_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

3.b) $AX = X \iff x + y + z = 0$ donc 1 est valeur propre et $E_1(A)$ est de dimension 2.

On remarque que U_2 et U_3 forment une base orthonormale de $E_1(A)$

De plus (U_2, U_3) est une famille orthonormale :

3.c) En posant $P = (U_1|U_2|U_3)$ (famille orthonormale : $P^\top P = I$) et $\Delta = \text{diag}(4, 1, 1)$, on a : $A = P\Delta P^\top$.

En posant $D = \text{diag}(2, 1, 1)$ et alors :

$$A = PD^2P^\top \text{ avec } P = (U_1|U_2|U_3), D = \text{diag}(2, 1, 1), P^\top P = I.$$

3.d) En posant $L = PDP^\top$ (qui est inversible car D_0 est inversible et P orthogonale) :

$$LL^\top = (PDP^\top)(PD^\top P^\top) = PD(P^\top P)DP^\top = PD^2P^\top = A.$$

(On utilise $D_0 = D_0^\top$ car D_0 est diagonale.)

$$L = PD_0P^\top \text{ est inversible et } A = LL^\top.$$

4.a) $C = L^{-1}B(L^{-1})^\top$. Vérifions la symétrie :

$$C^\top = ((L^{-1})^\top)^\top B^\top (L^{-1})^\top = L^{-1}B(L^{-1})^\top = C.$$

C est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, il existe Q orthogonale et Δ diagonale telles que $C = Q\Delta Q^\top$.
Donc $L^{-1}B(L^{-1})^\top = Q\Delta Q^\top$, soit $B = LQ\Delta(LQ)^\top$.

$$\boxed{B = LQ\Delta(LQ)^\top \text{ avec } Q \text{ orthogonale et } \Delta \text{ diagonale.}}$$

4.b) $R = LQ$, $B = R\Delta R^\top$. Calculons RR^\top :

$$RR^\top = LQ(LQ)^\top = LQQ^\top L^\top = LL^\top = A.$$

$$\boxed{RR^\top = A.}$$

1. (a) Description du protocole A A_n peut prendre deux valeurs : 1 si le mélange est négatif et $n + 1$ sinon.

$A_n(\Omega) = \{1; n + 1\}$ et comme $A_n(\Omega)$ est fini on a A_n admet une espérance.

- (b) ($A_n = 1$) : "Les n individus sont négatifs" et cette expérience est constitué de n épreuves de Bernoulli indépendantes donc $P(A_n = 1) = q^n$,

Sachant que $A_n(\Omega) = \{1; n + 1\}$ on obtient la loi de A_n :

$$P(A_n = 1) = q^n \text{ et } P(A_n = n + 1) = 1 - q^n$$

- (c) cette fonction a été faite (et bien faite) en direct par Aïcha.

```
def A_(L):
    for t in L:          # on parcourt L en valeurs
        if t:           # si t vaut True
            return n+1
    return 1
```

- (d) Le programme n'a pas été fait pendant l'oral.

```
n = 10
N = 10000
c = 0
for k in range(N):
    L = [ rd.random() < 0.1 for k in range(n) ]
    c += A_(L)
print(c/N)

print(n+1 -n*0.9**n)
```

- (e) Connaissant la loi de A_n on a : $E(A_n) = 1 \times q^n + (n + 1) \times (1 - q^n)$ $E(A_n) = n + 1 - nq^n$.

- (f) On note S_i : "la i ème personne est positive"

On veut ici $P_A(B)$ avec $A = \bigcup_{i=1}^n S_i$ et $B = \bigcap_{i=1}^k \overline{S_i}$

D'une part $P(A) = 1 - q^n$,

d'autre part $P(B \cap A) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{S_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=k+1}^n S_i\right)\right) = q^k(1 - q^{n-k})$

ce qui donne $P_A(B) = \frac{q^k - q^n}{1 - q^n}$

2. **Remarque** : le protocole B est très simple (trop) et B_n est la variable certaine égale à n .

- (a) On cherche n tels que $E(A_n) < E(B_n)$ ce qui équivaut à $n + 1 - nq^n < n \iff q^n > \frac{1}{n}$

$$E(A_n) < E(B_n) \iff q > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

- (b) Avec de l'aide Aïcha avait finalement obtenu le tableau de variations de $f : x \mapsto x^x$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	1	$e^{-1/e}$	$+\infty$

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables. $f'(x) = (1 + \ln(x))x^x$

Pour la limite en 0, on a utilisé la croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

(c) On remarque que : $E(A_n) < E(B_n) \iff q > f\left(\frac{1}{n}\right)$

Or l'étude de f nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

donc pour n assez grand, $q \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ et ainsi Le protocole B est préférable (en moyenne).

3. (a) La probabilité qu'un groupe de n personnes est négatif est égale à q^n
et $(G > k)$ est l'événement : " les k premiers groupes sont négatifs" il vient (indépendance)

$$P(G > k) = q^{nk}$$

(b) (Je ne fais pas comme au tableau, je trouve plus simple ce que je fais ici)

Cette expérience est la succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (succès : le groupe est positif de paramètre $1 - q^n$)

G est le rang du premier succès donc G suit la géométrique de paramètre $1 - q^n$

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(H) \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \quad (E) \quad y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}.$$

(a) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 5 = 0$, de discriminant

$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Les racines complexes sont $r = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{2x}(A \cos x + B \sin x), (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(b) D'une part $x \mapsto \frac{2}{5}$ est une solution de $y'' - 4y' + 5y = 2$,

D'autre part $x \mapsto -e^{2x}$ est une solution de $y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$

On a suivi l'indication.

On obtient ainsi (*principe de superposition*)

$$x \mapsto \frac{5}{2} - e^{2x} \text{ est une solution de } y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}$$

$$S_E = \left\{ x \mapsto e^{2x}(A \cos x + B \sin x) + \frac{2}{5} - e^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Pour tout réel x , on note $C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ et $S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt$.

(a) C'est une intégration par parties.

(b) Il suffit de résoudre le système précédent :

$$C(x) = \frac{e^{2x}(2 \cos x + \sin x)}{5} - \frac{2}{5} \text{ et } S(x) = \frac{e^{2x}(2 \sin x - \cos x)}{5} + \frac{1}{5}$$

Théorème fondamental de l'analyse : C et S sont des primitives respectivement de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ et $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$ sur \mathbb{R} .

3. `import math as m`

```
def intC(x, nb_pas):
    dt = (x-0) / nb_pas
    somme = 0
    for k in range(nb_pas):
        t = k * dt
        somme += m.exp(2 * t) * m.cos(t)
    return somme * dt
```

Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x} \sin(x).$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Etant une famille génératrice, il suffit de montrer que la famille est libre

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$,

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{2x} \cos x + \lambda_4 e^{2x} \sin x = 0$.

en passant à la limite $x \rightarrow -\infty$ on a : $\lambda_1 = 0$ et en divisant par e^x il vient

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lambda_2 + \lambda_3 \cos x + \lambda_4 \sin x = 0$.

En prenant $x = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ on obtient le système $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$ et donc $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

La famille \mathcal{B} est donc libre, et c'est bien une base de F .

5. (a) C'est une propriété du cours (*long à démontrer à partir de la définition*) $\boxed{u \text{ est linéaire}}$.
 (b)

$$\begin{aligned} u(f_1) &= 0 \\ u(f_2) &= 2f_2, \\ u(f_3) &= 2f_3 - f_4, \\ u(f_4) &= f_3 + 2f_4. \end{aligned}$$

(c) D'une part u est linéaire et l'image d'une base de F est une famille de vecteurs de F

donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } F}$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. **Question 6 – Résolution de** $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On cherche $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c + d = 1 \\ -c + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ 2c + d = 1 \\ d = \frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ 2c + \frac{c}{2} = 1 \\ d = \frac{c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{5} \\ d = \frac{1}{5} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Interprétation. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ revient à trouver $f \in F$ telle que $u(f) = f' = f_3$, c'est-à-dire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos x$.

La solution générale s'écrit $f = af_1 + \frac{2}{5}f_3 + \frac{1}{5}f_4$, soit :

$$f : x \mapsto a + \frac{e^{2x}(2 \cos x + \sin x)}{5}, \quad a \in \mathbb{R},$$

ce qui retrouve bien le résultat de la question **2(b)**.

7. Même raisonnement : on cherche les solutions de (E) qui sont dans F .

Remarque : pour $y \in F$, en notant $X = \text{Coord}_B(y)$

$$\begin{aligned}(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \text{Mat}_B(u^2 - 4u + 5id)\text{Coord}_B(y) = \text{Coord}_B(2f_1 - f_2) \\ &\iff \text{Coord}_B(y'' - y' + 5y) = \text{Coord}_B(2f_1 - f_2) \\ &\iff y'' - y' + 5y = 2f_1 - f_2 \\ &\iff y'(x)' - y'(x) + 5y(x) = 2 - e^{2x} \\ &\iff y \text{ solution de } (E)\end{aligned}$$

Nous n'avons pas eu le courage de calculer $A^2 - 4A + 5I_4$.

1. (a) La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0 = f(0)$ donc f continue sur \mathbb{R} .
- (b) La fonction g est C^1 sur \mathbb{R}^* (produit de fonctions C^1) et, pour tout $x \neq 0$: $g'(x) = 2x \ln |x| + x$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$, g est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2f(x) + x$
 Comme f est continue sur \mathbb{R} , g' aussi et $\boxed{g \text{ est bien de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.
- (c) $\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{2f(x) + x}{x} = 1 + 2 \ln |x|$ qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.
 La fonction g' n'étant pas dérivable en 0, $\boxed{g \text{ n'est pas de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \mu f(x) = 0$
 En prenant successivement $x = 0, 1, 2$ on montre que $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) = (0, 0, 0)$
 Par conséquent, la famille (f_0, f_1, f) est libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel F .

3. # Version sans numpy

```
def f(x):
    if x == 0:
        # Attention à x=0
        return 0
    return x*log(abs(x))
```

```
def F(a,b,c):
    x = [ -1 + 2*k/100 for k in range(101) ]
    y = [ a + b*t + f(t) for t in x ]
    plt.plot(x,y,'b')
    plt.show()
```

4. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a + bx + cf(x)$
 $x = 0$ donne $\boxed{a = h(0)}$, $x = 1 \rightarrow \boxed{b = h(1) - a}$ et $x = 2 \rightarrow \boxed{c = (h(2) - a - 2b)/f(2)}$

```
def f(x):
    # Ici cela ne fonctionne pas avec les fonctions numpy
    if x == 0:
        return 0
    return x*log(abs(x))
```

```
def Question4(h):
    a = h(0)
    b = h(1)-a
    c = (h(2)-a-2*b)/f(2)
    return [a,b,c]
```

5. (a) Soit $\varphi \in F$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu f$. Ainsi, pour tout réel x , $x\varphi(x) = \lambda_0 x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu x f(x) = x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu g(x)$.
 Puisque g est dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto x\varphi(x)$ est bien dérivable sur \mathbb{R} .
 Soient $(\varphi_1, \varphi_2) \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, on a bien :

$$\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \lambda\Phi(\varphi_1)(x) + \Phi(\varphi_2)(x).$$

Ainsi $\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)$ et Φ est bien linéaire.

(b)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f_0)(x) = 1 = f_0(x) \text{ donc } \Phi(f_0) = f_0, \quad \Phi(f_1)(x) = 2x = 2f_1(x) \text{ donc } \Phi(f_1) = 2f_1$$

$$\Phi(f)(x) = g'(x) = x + 2f(x) = f_1(x) + 2f(x) \text{ donc } \Phi(f) = f_1 + 2f$$

- (c) On a démontré que Φ est linéaire et, puisque $\Phi(f_0), \Phi(f_1)$ et $\Phi(f)$ appartiennent à F , par linéarité, pour tout élément φ de F , $\Phi(\varphi)$ appartient également à F donc Φ est bien un endomorphisme de F et

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3))$$

- (d) La matrice M est de rang 3 (*matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont non nuls*) donc M est inversible et Φ est bijective. Par le calcul, on obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (e) M étant triangulaire, on peut lire ses valeurs propres sur sa diagonale donc $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$. Par le calcul, on détermine les sous-espaces propres de M , on obtient :

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 2 donc, d'après la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, M n'est pas diagonalisable. Par conséquent, Φ non plus.