

8h00h-8h40-9h20

Mathis LOEFFLER sujet 6 Lucas BONNEFOY

Sans préparation : sujet 4

Question de cours : Pour q un réel vérifiant $|q| < 1$, donner les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$$

Exercice préparé :

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S + T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)f_T(t-s)ds$$

On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $]0; 1[$.

1. Justifier son existence, puis déterminer une densité f des variables aléatoires U^2 et V^2 .
2. On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h .
3. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $P(Z \leq 1)$.
4. (a) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.
 (b) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$.
 (c) Montrer que, sur $]0; 1[$, on a : $h(x) = \frac{\pi}{4}$. (On pourra utiliser le changement de variable $y = \sin^2(u)$).
 (d) Calculer $P(Z \leq 1)$ et interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.
5. On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n \geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\frac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
 (a) Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer, en fonction de n et ε , une majoration de $P\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.
 (b) En déduire, à partir de quelle valeur de n , il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} .
 (c) À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} .

9h20-10h-10h40

Gilda MARTIN-HANIER sujet 6 Nina PININGRE

Sans préparation : sujet 4

Question de cours : Énoncer le théorème du rang.

Exercice préparé :

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S + T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)f_T(t-s)ds$$

On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $]0; 1[$.

1. Justifier son existence, puis déterminer une densité f des variables aléatoires U^2 et V^2 .
2. On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h .
3. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $P(Z \leq 1)$.

4. (a) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.

(b) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$.

(c) Montrer que, sur $]0; 1[$, on a : $h(x) = \frac{\pi}{4}$. (On pourra utiliser le changement de variable $y = \sin^2(u)$).

(d) Calculer $P(Z \leq 1)$ et interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.

5. On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n \geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\frac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer, en fonction de n et ε , une majoration de $P\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.

(b) En déduire, à partir de quelle valeur de n , il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} .

(c) À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} .

8h40-9h20-10h.

Alan CABARET sujet 8 Alexandre TABBAGH

Sans préparation : sujet 5

Question de cours :Définition d'une famille libre finie d'un espace vectoriel E .

Exercice préparé :On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et que u_n est bien définie.
2. (a) Ecrire une fonction prenant en entrée un nombre x et renvoyant $f(x)$.
 (b) Ecrire une fonction permettant de calculer $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode des rectangles, pour tout a, b réels tels que $a \leq b$.
 (c) A l'aide de ces fonctions faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n) .
3. Montrer que $\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t) dt$.
4. On note g la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.
 (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
 (b) Montrer qu'il existe un unique prolongement de g continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, noté \tilde{g} .
 (c) Montrer que \tilde{g} est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. (a) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t) dt$.
 (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = 0$.
6. (a) Montrer que pour tous réels a et b , $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
 (b) Montrer que pour tout entier n , pour tout réel t différent de 0 ,

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$$
- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t)) dt = \frac{\pi}{2}$.
7. Quelle est la limite de u_n ?

10h-10h40-11h20

Suwaraka KALAMENDRA sujet 9 Gala-Anne Guinaudeau

Sans préparation : sujet 5

Question de cours :

Définition de deux matrices semblables.

Exercice préparé :

On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et que u_n est bien définie.
2. (a) Ecrire une fonction prenant en entrée un nombre x et renvoyant $f(x)$.
 (b) Ecrire une fonction permettant de calculer $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode des rectangles, pour tout a, b réels tels que $a \leq b$.
 (c) A l'aide de ces fonctions faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n) .
3. Montrer que $\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t) dt$.
4. On note g la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.
 (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
 (b) Montrer qu'il existe un unique prolongement de g continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, noté \tilde{g} .
 (c) Montrer que \tilde{g} est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. (a) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t) dt$.
 (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = 0$.
6. (a) Montrer que pour tous réels a et b , $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
 (b) Montrer que pour tout entier n , pour tout réel t différent de 0 ,

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$$
- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t)) dt = \frac{\pi}{2}$.
7. Quelle est la limite de u_n ?

10h40-11h20-12h00

Aïcha BA sujet 8 Jade Souprayen

Sans préparation : sujet 6

Question de cours :Donner la définition de la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

Exercice préparé :Soit X une variable aléatoire de densité f :

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

1. Ecrire une fonction qui simule la réalisation de la variable X .
2. Ecrire une fonction qui pour x donné en argument renvoie $F_X(x)$ où F_X est la fonction de répartition de X .
3. Calculer si elles existent $E(X)$, $E(|X|)$ et $E(X^2)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) une liste de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X .

$$\text{On note : } M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad m_n = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

4. (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n .
- (b) Déterminer une densité de M_n et son espérance si elles existent.
- (c) Déterminer la fonction de répartition de m_n .
- (d) Les variables aléatoires m_n et M_n sont elles indépendantes ?
- (e) Déterminer $E(S_n)$ si elle existe.

$$5. (a) \text{ Prouver que pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \quad E(e^{\lambda S_n}) = \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} \right)^n$$

$$(b) \text{ Montrer que pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad P(S_n \geq t) \leq e^{-t + \frac{n}{2}}$$

Rappel sur la convergence en loi :

Soient Y une variable aléatoire réelle et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.On note F_Y la fonction de répartition de Y et D l'ensemble des réels où F_Y est continue.

$$(Y_n) \text{ converge en loi vers } Y \text{ signifie que : } \forall x \in D, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x) = F_Y(x)$$

6. (a) Ecrire une fonction permettant de simuler la réalisation de la variable M_n , n étant passé en argument.
- (b) Montrer que M_n converge en loi vers une variable aléatoire certaine à préciser.

$$7. \text{ On note } Z_n = n \left(\frac{1}{2} - M_n \right).$$

- (a) Ecrire une fonction permettant de simuler la réalisation de la variable Z_n , n étant passé en argument.
- (b) Ecrire un programme traçant une approximation de la fonction de répartition de Z_n avec un longue série de simulations.
- (c) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi usuelle à préciser.