Correction du sujet 6

Question de cours :
Soit E et F deux espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.
Pour f une application linéaire de E dans F, $\quad \text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

– –

Exercice préparé :

1. U est à valeurs dans $]0,1[$ donc U^2 aussi et pour $x \in]0,1[$,

$$\begin{array}{rcll} F_{U^2}(x) & = & P(U^2 \leqslant x) & \\ & = & P(U \leqslant \sqrt{x}) & \textit{car } x \geqslant 0 \textit{ et } U \geqslant 0 \\ & = & F_U(\sqrt{x}) & \\ & = & \sqrt{x} & \textit{car } 0 < \sqrt{x} < 1 \textit{ et } U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[) \end{array}$$

La fonction de répartition de U^2 est : $\begin{cases} x \longmapsto 0 & si \quad x \in]-\infty; 0] \\ x \longmapsto \sqrt{x} & si \quad x \in]0,1[\\ x \longmapsto 1 & si \quad x \in [1; +\infty[\end{cases}$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (tout entier) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et 1 donc U^2 est une variable à densité, et $\boxed{U^2 \text{ est de densité : } f \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}$ (même densité pour V^2)

2. U^2 et V^2 sont indépendantes, U^2 de densité f et V^2 de densité f
donc *(Théorème rappelé au début du sujet)* $\boxed{\text{la variable aléatoire } Z = U^2 + V^2 \text{ admet une densité de probabilité}}$.

3.
```
def simul_Z():
    x = rd.random()
    y = rd.random()
    return x**2 + y**2

N = 10000
s = 0
for k in range(N):
    if simul_Z() <= 1:
        s += 1
print(s/N)
```

4. (a) Soit x tel que $0 < x \leq 1$,

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbb{1}_{]0,1[}(t) \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}}\mathbb{1}_{]0,1[}(x-t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-t}}\mathbb{1}_{]x-1,x[}(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-t}}\mathbb{1}_{]x-1,x[}(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

quand $t \in]0,1[$, on a : $\mathbb{1}_{]x-1,x[}(t) = 1 \iff t \in]0,x[$ donc $\boxed{h(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt}$.

(b) $t = xy$ *(changement de variable affine)*

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-xy}}\,x\mathrm{d}y \end{array}$$

on a bien pour $0 < x \leq 1$, on a : $\boxed{h(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}dy}$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$

$(t = \sin^2(u))$ $\qquad \varphi : u \mapsto \sin^2(u)$ est de classe C^1 sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u)}} 2\sin(u)\cos(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(d) $P(Z \leqslant 1) = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

L'expérience peut être vu comme : "On prend un point M au hasard dans le carré $[0,1]^2$, l'événement $Z \leqslant 1$ est le même que l'événement $OM \leqslant 1$.

La probabilité de cet événement est $\dfrac{\text{L'aire du quart de cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}{\text{L'aire du carré } [0,1]^2}$ qui vaut $\frac{\pi}{4}$

5. (a) Calculs classiques : $E(Y_n) = \frac{\pi}{4}$ $\ V(Y_n) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

Pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\boxed{P\left(\left|S_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$

(b) En prenant $\varepsilon = 0{,}01$, on obtient : $P\left(\frac{\pi}{4} \in \left]Y_n - \frac{1}{100}; Y_n + \frac{1}{100}\right[\right) \geqslant 1 - \frac{10^4}{n}\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

Il suffit de trouver l'entier n tel que $1 - \frac{10^4}{n}\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0{,}05$

On obtient : $\boxed{\text{pour } n \geqslant 33\,700}$

$$\left]Y_n - \tfrac{1}{100}; Y_n + \tfrac{1}{100}\right[\text{ est un intervalle de confiance de niveau de confiance } 0,95 \text{ de } \frac{\pi}{4}.$$

(c)
```
N = 33700
s = 0
for k in range(N):
    if simul_Z() <= 1:
        s += 1
print(s/N -0.01)
print(s/N +0.01)
```

donne l'affichage :

```
0.7735905044510386
0.7935905044510386
```

Correction du sujet 8

Question de cours :
Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E.

$$(u_1, ..., u_n) \text{ est libre signifie que : } \forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \quad \lambda_i = 0$$

– –

Exercice préparé :

1. • Sur $\mathbb{R}^*$ f est le quotient de fonction C^0 donc elle est C^0.
   • En 0, $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $f(0) = 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$ (f continue en 0)
   En conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$
2. (a)
```
def f(x):
    if x== 0:
        return 1
    return sin(x)/x                  # on a importé from math import sin
```
   (b)
```
def rectangle(f, a, b):
    S = 0
    d = (b-a)/N                      # N une variable globale
    for k in range(N):
        S += f(a+k*d)
    return S*d                       # Somme de Riemann
```
3. C'est un simple changement de variable affine ($x = (2n+1)t$ dans une intégrale continue sur un exemple.
$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t)\,(2n+1)\mathrm{d}t$$
4. (a) g est de classe C^1 sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle.
   (b)
$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} \\ &\underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \\ &\underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t}{6} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \tilde{g}(0) = 0}$$
   (c) Il suffit de montrer que $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et que : $\lim\limits_{t\to 0} g'(t) = \tilde{g}'(0)$
   • En 0, le calcul précédent montre $\frac{\tilde{g}(t)-\tilde{g}(0)}{t-0} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$ donc $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = \frac{1}{6}$.
   • Pour $t > 0$,
$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{t^2\cos(t) - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)} \end{aligned}$$
   Or $t^2\cos(t) - \sin^2(t) \underset{t\to 0}{=} t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^2 - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^4}{6} + o(t^4)$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g'(t) = -\frac{1}{6}$
   En conclusion $\boxed{\tilde{g} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]}$.
5. (a) $\tilde{g}$ et $t \longmapsto -\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on peut donc faire l'intégration par parties :
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt &= \left[-\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)\tilde{g}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t).\tilde{g}'(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t).\tilde{g}'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t).\tilde{g}'(t)dt}$$

(b)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt\right| &\leqslant \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos((2n+1)t).\tilde{g}'(t)\right| dt \\ &\leqslant \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\tilde{g}'(t)\right| dt\end{aligned}$$

donc *(théorème des gendarmes)* $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt = 0}$

6. (a) On sait que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ donc

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))}$$

(b) On raisonne par récurrence sur n.
Pour $n = 0$ c'est immédiat et si pour un n c'est vrai il vient :

$$\begin{aligned}1 + 2\sum_{k=1}^{n+1}\cos(2kt) &= \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} + 2\cos(2(n+1)t) \\ &= \frac{\sin((2n+1)t) + 2\sin(t)\cos(2(n+1)t)}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t) + \sin((2n+3)t) + \sin(-(2n+1)t)}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin((2n+3)t)}{\sin(t)} \qquad \textit{(ce qui achève la récurrence)}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t))dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}((2n+1)\frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t} - \sin((2n+1)t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}\right)) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kt)dt \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + 0\end{aligned}$$

7. On vient de montrer que $u_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}}((2n+1)\sin((2n+1)t)\tilde{g}(t))dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

et on a vu que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t).\tilde{g}(t)dt = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}}$

– –

Correction du sujet 9

Question de cours :
Pour $x=(x_1,...,x_n)$ on appelle norme euclidienne le réel $||x||=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

– –

Exercice préparé :

1. On reconnait la loi uniforme sur $\left[-\frac12;\frac12\right]$

```
def simul_X():
    u = rd.random()
    return u - 1/2
```

2.

```
def F_X(x):
    if x < -1/2 :
        return 0
    elif x < 1/2 :
        return x + \frac 12
    return 1
```

3. $E(X)=\frac{a+b}{2}$ $\boxed{E(X)=0}$, $E(|X|)=\int_{-\frac12}^{\frac12}|t|dt=2\int_0^{\frac12}t\,dt$ $\boxed{E(|X|)=\frac14}$
   et $E(X^2)=\int_{-\frac12}^{\frac12}t^2dt=2\int_0^{\frac12}t^2\,dt$ $\boxed{E(X^2)=\frac{1}{12}}$

4. (a) M_n à valeurs dans $\left[-\frac12;\frac12\right]$ et pour x dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} P(M_n\leqslant x) &= P\left((X_1\leqslant x)\cap\cdots\cap(X_n\leqslant x)\right)\\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k\leqslant x) \qquad \textit{(indépendance des } X_k\textit{)}\\ &= \left(x+\frac12\right)^n \end{aligned}$$

La fonction de répartition de M_n est : $\begin{cases} x\longmapsto 0 & si \quad x\in]-\infty;-\frac12[\\ x\longmapsto \left(x+\frac12\right)^n & si \quad x\in[-\frac12,\frac12[\\ x\longmapsto 1 & si \quad x\in]\frac12;+\infty[\end{cases}$

(b) La fonction de répartition de M_n est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en $-\frac12$ et $\frac12$, donc M_n est à densité

et M_n de densité : $\begin{cases} x\longmapsto 0 & si \quad x\in]-\infty;-\frac12[\\ x\longmapsto n\left(x+\frac12\right)^{n-1} & si \quad x\in[-\frac12,\frac12[\\ x\longmapsto 0 & si \quad x\in]\frac12;+\infty[\end{cases}$

M_n admet une espérance car cette densité est nulle en dehors de $\left[-\frac12;\frac12\right]$ et continue sur ce segment et

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_{-\frac12}^{\frac12} nx\left(x+\frac12\right)^{n-1}\mathrm{d}x\\ &=\\ &= \frac12-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

(c) m_n à valeurs dans $\left[-\frac12;\frac12\right]$ et pour x dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} P(m_n\leqslant x) &= 1-P\left((X_1>x)\cap\cdots\cap(X_n>x)\right)\\ &= 1-\prod_{k=1}^n P(X_k>x) \qquad \textit{(indépendance des } X_k\textit{)}\\ &= 1-\left(1-\left(x+\frac12\right)\right)^n \end{aligned}$$

La fonction de répartition de m_n est : $\begin{cases} x\longmapsto 0 & si \quad x\in]-\infty;-\frac12[\\ x\longmapsto 1-\left(\frac12-x\right)^n & si \quad x\in[-\frac12,\frac12[\\ x\longmapsto 1 & si \quad x\in]\frac12;+\infty[\end{cases}$

(d) $P((m_n \geqslant 0) \cap (M_n \leqslant 0)) = 0$ or $P((m_n \geqslant 0) \neq 0$ et $P(M_n \leqslant 0)) \neq 0$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } m_n \text{ et } M_n \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

(e) Linéarité de $E(.)$: $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$

5. (a) $e^{\lambda S_n} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda X_i}$ *(on justifiera l'existence des espérances à la fin)*

$$\begin{aligned} E\left(e^{\lambda S_n}\right) &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\lambda X_i}\right) \qquad \textit{(indépendance)} \\ &= \left(E\left(e^{\lambda X_i}\right)\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \begin{aligned} E\left(e^{\lambda X_i}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \quad E\left(e^{\lambda S_n}\right) = \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda}\right)^n}$$

(b) L'inégalité de Markov donne : $P\left(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda t}\right) \leqslant \frac{E\left(e^{\lambda S_n}\right)}{e^{\lambda t}}$

donc $P\left(\lambda S_n \geqslant \lambda t\right) \leqslant e^{-\lambda t}\left(\frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda}\right)^n$

Pour $\lambda = 1$ il vient :$P\left(S_n \geqslant t\right) \leqslant e^{-t}\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right)^n \leqslant e^{-t+\frac{n}{2}}\left(1 - e^{-1}\right)^n$

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad P(S_n \geqslant t) \leqslant e^{-t+\frac{n}{2}}}$$

6. (a)

```
def simul_M(n):
    m = 0
    for k in range(n):
        a = simul_X()
        if a > m:
            m = a
    return m
```

(b) La fonction de répartition de M_n est : $\begin{cases} x \longmapsto 0 & si \quad x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\\ x \longmapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^n & si \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ x \longmapsto 1 & si \quad x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

La fonction de répartition d'une variable certaine égale à $\dfrac{1}{2}$ est F : $\begin{cases} x \longmapsto 0 & si \quad x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\\ x \longmapsto 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

On a bien pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{M_n}(x) = F(x)$

$$\boxed{M_n \text{ converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à } \tfrac{1}{2}}$$

7. (a)

```
def simul_Z(n):
    return  n*(1/2-simul_M(n))
```

(b)

```
N = 10000
n = 10

E = [ simul_Z(n) for k in range(N)]
x = sorted(E)
y = [(k+1)/N for k in range(N)]
plt.plot(x,y,'k')
plt.show()
```

(c) Z_n à valeurs dans $[0, n]$ et pour $x \in [0, n]$,

$$
\begin{aligned}
P(Z_n \leqslant x) &= P\left(n\left(\frac{1}{2} - M_n\right) \leqslant x\right) \\
&= P\left(M_n \geqslant \frac{1}{2} - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - P\left(M_n \leqslant \frac{1}{2} - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{n} + \frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-x}
\end{aligned}
$$

donc $\boxed{Z_n \text{ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.}}$