18h00-18h40-19h20
Emma MOUTARDIER **sujet 42** Marie FAKHOURI
Sans préparation : sujet 10

Question de cours :
Définition d'une matrice diagonalisable.

– –

Exercice préparé :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2,
pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$.

1. Montrer que Φ définie un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Calculer pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\Phi(X^k)$
   (b) Donner une base de l'image de Φ.
   (c) Donner une base du noyau de Φ.
3. Montrer que Φ est diagonalisable. *(on pourra utiliser le résultat de la question 2.(a))*
4. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note : $S_N = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} \binom{N+1}{2k+1}$ et $T_N = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant N+1} \binom{N+1}{2k}$
   (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un entier naturel N et renvoyant la valeur de S_N . On pourra utiliser `comb(N, j)` de la bibliothèque `math` qui calcule $\binom{N}{j}$.
   (b) Déterminer S_4 et S_5.
   (c) Calculer $S_N + T_N$. Et montrer que $S_N - T_N = 0$
5. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ le polynôme :
$$P_N = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1 - X^2)^k X^{N-2k}$$
   (a) Donner les polynômes P_0, P_1 et P_2.
   (b) Déterminer le monôme dominant de P_N.
   (c) Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Montrer que $\sin((N + 1)t) = \sin(t)P_N(\cos(t))$. *On pourra développer* $(\cos(t) + i\sin(t))^{N+1}$
   (e) En dérivant deux fois l'égalité précédente montrer que :
$$(N^2 + 2N)P_N - 3XP_N' - (X^2 - 1)P_N'' = 0$$
   (f) Diagonaliser Φ. *(Autrement dit : Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ)*

16h40-17h20-18h00
Iliès DUBEAU **sujet 42**
Sans préparation : sujet 10

Question de cours :
Définition d'une matrice diagonalisable.

– –

Exercice préparé :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2,
pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P) = 3XP' + (X^2-1)P''$.

1. Montrer que Φ définie un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Calculer pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\Phi(X^k)$
   (b) Donner une base de l'image de Φ.
   (c) Donner une base du noyau de Φ.
3. Montrer que Φ est diagonalisable. *(on pourra utiliser le résultat de la question 2.(a))*
4. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note : $S_N = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} \binom{N+1}{2k+1}$ et $T_N = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant N+1} \binom{N+1}{2k}$
   (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un entier naturel N et renvoyant la valeur de S_N . On pourra utiliser `comb(N, j)` de la bibliothèque `math` qui calcule $\binom{N}{j}$.
   (b) Déterminer S_4 et S_5.
   (c) Calculer $S_N + T_N$. Et montrer que $S_N - T_N = 0$
5. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ le polynôme :
$$P_N = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1-X^2)^k X^{N-2k}$$
   (a) Donner les polynômes P_0, P_1 et P_2.
   (b) Déterminer le monôme dominant de P_N.
   (c) Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Montrer que $\sin((N+1)t) = \sin(t)P_N(\cos(t))$. *On pourra développer* $(\cos(t) + i\sin(t))^{N+1}$
   (e) En dérivant deux fois l'égalité précédente montrer que :
$$(N^2+2N)P_N - 3XP_N' - (X^2-1)P_N'' = 0$$
   (f) Diagonaliser Φ. *(Autrement dit : Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ)*

16h00-16h40-17h20.
Nokomie BOUROUF **sujet 45** Tiberghien Emma
Sans préparation : sujet 5

Question de cours :

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

– –

Exercice préparé :

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.
Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.

On note r_n (resp. b_n) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au n-ième tirage

1. (a) Déterminez r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n
   (b) En déduire r_n et b_n en fonction de n

On note Z_n le nombre de boules bleues tirées au cours des n tirages

2. (a) Ecrire une fonction Python `simul_Z(n)` qui permet de simuler la réalisation de Z_n.
   (b) Trouver une valeur approchée de l'espérance de Z_n pour n allant de 2 à 10.
3. Donner les lois de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 et calculer leur espérance.
4. Quelles sont les valeurs prises par Z_n en fonction de n ? *(On pourra faire des cas suivant la parité de n)*
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \left[\!\left[0; \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor \right]\!\right]$:
$$P(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2}P(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2}P(Z_n = k-1)$$
   (b) En déduire une relation donnant $E(Z_{n+2})$ en fonction de $E(Z_{n+1})$ et $E(Z_n)$,
   puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E(Z_n) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{n}{3}$
6. (a) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus petite valeur.
   (b) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus grande valeur.
   (c) Pour $k \in [\![0; n]\!]$, déterminer $P(Z_n = k)$.

– –

17h20-18h00-18h40
Héléna ROBERT **sujet 45** Erwan DIA
Sans préparation : sujet 5

Question de cours :

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

– –

Exercice préparé :

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.
Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.

On note r_n (resp. b_n) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au n-ième tirage

1. (a) Déterminez r_{n+1} et b_{n+1} en fonction de r_n et b_n
   (b) En déduire r_n et b_n en fonction de n

On note Z_n le nombre de boules bleues tirées au cours des n tirages

2. (a) Ecrire une fonction Python `simul_Z(n)` qui permet de simuler la réalisation de Z_n.
   (b) Trouver une valeur approchée de l'espérance de Z_n pour n allant de 2 à 10.
3. Donner les lois de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 et calculer leur espérance.
4. Quelles sont les valeurs prises par Z_n en fonction de n ? *(On pourra faire des cas suivant la parité de n)*
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \left[\!\left[0; \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor \right]\!\right]$:
$$P(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2}P(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2}P(Z_n = k-1)$$
   (b) En déduire une relation donnant $E(Z_{n+2})$ en fonction de $E(Z_{n+1})$ et $E(Z_n)$,
   puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E(Z_n) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{n}{3}$
6. (a) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus petite valeur.
   (b) Déterminer la probabilité que Z_n prenne sa plus grande valeur.
   (c) Pour $k \in [\![0; n]\!]$, déterminer $P(Z_n = k)$.