Correction du sujet 42

Question de cours :
Soient A est B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Dire que A et B sont semblables signifie que : il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

− −

Exercice préparé :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2,
pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$.

1. • on remarque : $\deg(\Phi(P)) \leqslant \deg(P)$ donc $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
   • $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\quad \Phi(\alpha P + \beta Q) = \cdots = \alpha\Phi(P) + \beta\Phi(Q)$.

   $\boxed{\Phi \text{ définie un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

2. (a) $\Phi(1) = 0$, $\quad \Phi(X) = 3X$ et
   pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $\Phi(X^k) = 3kX^k + k(k-1)X^{k-2}(X^2 - 1)$ $\quad \boxed{\Phi(X^k) = (k^2 + 2k)X^k - k(k-1)X^{k-2}}$

   (b) $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(\left(\Phi(X^k)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}) = \mathrm{Vect}(\left(\Phi(X^k)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}) = n$
   (Famille de polynômes non nuls de degrés différents)

   $\boxed{\left(\Phi(X^k)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n} \text{ est une base de } \mathrm{Im}(\Phi).}$

   (c) Le théorème du rang donne : $\dim(\ker(\Phi)) = 1$ et comme $\Phi(1) = 0$, $\boxed{(1) \text{ est une base de } \ker(\Phi)}$

3. Le résultat de 2.(a) permet d'affirmer que la matrice de Φ dans la base canonique est triangulaire supérieure donc le spectre se lit sur la diagonale ; ainsi $\mathrm{Sp}\ (\Phi) = \left\{k^2 + k \mid k \in [\![0; n]\!]\ \right\}$: $n + 1$ valeurs propres distinctes donc $\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable.}}$

4. (a)
```
def S(n):
    s = 0
    for k in range(0, N//2 +1):
        s += comb(N+1, 2*k+1)
    return s
```
   (b) $S_4 = 5 + 10 + 1 = 16$ et $S_5 = 6 + 20 + 6032$.

   (c) $S_N + T_N = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{n}{k} = (1+1)^{N+1}$ donc $\boxed{S_N + T_N = 2^{N+1}}$
   $S_N - T_N = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{n}{k}(-1)^{k+1} = -(1-1)^{N+1}$ donc $\boxed{S_N - T_N = 0}$
   On en déduit que $\boxed{S_N = T_N = 2^N}$

5. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ le polynôme :

$$P_N = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1 - X^2)^k X^{N-2k}$$

   (a) $P_0 = (-1)^0 \binom{1}{1}(1 - X^2)^0 X^0$ donc $\boxed{P_0 = 1}$ $P_1 = (-1)^0 \binom{2}{1}(1 - X^2)^0 X^1$ donc $\boxed{P_1 = 2X}$
   et $P_2 = (-1)^0 \binom{3}{1}(1 - X^2)^0 X^2 + (_1)^1(1 - X^2)^1 X^0$ donc $\boxed{P_2 = 4X^2 - 1}$

   (b) P_N est la somme de polynômes de degré N et des coefficients dominants est :

$$\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (-1)^k = S_N$$

   $\boxed{\text{Le monôme dominant de } P_N \text{ est } 2^N\, X^N}$

   (c) Cette famille contient $n + 1$ vecteurs et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n + 1$ donc il suffit de montrer que la famille est libre.
   or c'est une famille de polynômes non nuls de degrés différents donc elle est libre.

   $\boxed{(P_0, \cdots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

(d) $\sin((N+1)t) = \mathrm{Im}((\cos(t) + i\sin(t))^{N+1})$
or la formule du binôme donne : $(\cos(t) + i\sin(t))^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (i\sin(t))^k (\cos(t))^{N+1-k}$
donc

$$\begin{aligned} \sin((N+1)t) &= \frac{1}{i} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} \binom{N+1}{2k+1} (i\sin(t))^{2k+1} (\cos(t))^{N-2k} \\ &= \sin(t) \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1-\cos^2(t))^k (\cos(t))^{N-2k} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\boxed{\sin((N+1)t) = \sin(t) P_N(\cos(t))}$$

(e) En dérivant deux fois l'égalité précédente on obtient successivement :

$$(N+1)\cos((N+1)t) = \cos(t) P_N(\cos(t)) - \sin^2(t) P_N'(\cos(t))$$

$$-(N+1)^2 \sin((N+1)t) = -\sin(t) P_N(\cos(t)) - \cos(t)\sin(t) P_N'(\cos(t)) - 2\sin(t)\cos(t) P_N'(\cos(t)) + \sin^3(t) P_N''(\cos(t))$$

Ce qui donne après simplification :

$$(N^2+2N) P_N(\cos(t)) - 3\cos(t) P_N'(\cos(t)) - (\cos^2(t)^2 - 1) P_N''(\cos(t)) = 0$$

donc $\boxed{(N^2+2N)P_N - 3XP_N' - (X^2-1)P_N'' = 0}$ *(En effet : ce polynôme a une infinité de racines)*

(f) On vient de montrer que $\Phi(P_N) = (N^2+2N)P_N$ donc $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ

– –

Exercice non préparé :

1. Écrire une fonction `est_mixte` prenant en argument une liste composée de 0 et/ou 1 qui renvoie `False` si la liste est composée uniquement de 0 ou uniquement de 1 et `True` sinon.
2. Écrire une fonction `plus_longue_suite` prenant en argument une liste composée de 0 et de 1 qui renvoie la plus longue suite de 1 de la liste.
   Exemple : si $L = [0,1,1,1,0,1,1,0,0,0,0]$, la fonction renvoie 3.

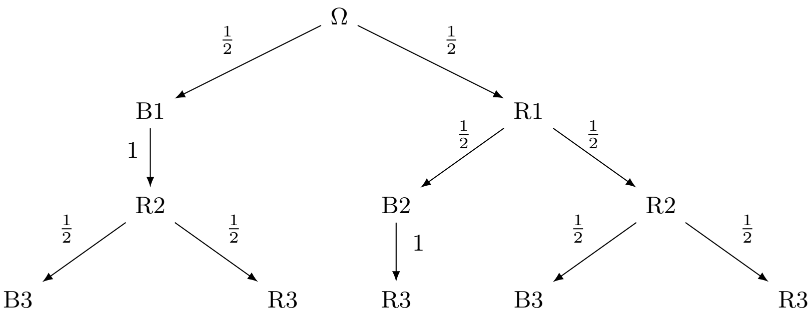
Correction du sujet 45

Question de cours :

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$: $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ | < u|v > | \leqslant ||u||.||v||$

– –

Exercice préparé : *On peut illustrer l'expérience par l'arbre pondéré suivant :*



1. (a) La formule des probabilités totales avec le système complet (R_n, B_n) donne :
   $P(R_{n+1} = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(R_{n+1})$ donc $\boxed{r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + b_n}$
   $P(B_{n+1} = P(R_n)P_{R_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})$ donc $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{2}r_n}$

   (b) $b_n = 1 - r_n$ donc $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + 1 - r_n$ ou encore : $r_{n+1} = -\frac{1}{2}r_n + 1$
   Il suffit de traiter cette suite arithmético-géométrique avec $r_1 = \frac{1}{2}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad r_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$
   et $b_n = 1 - r_n$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

2. (a)

```
def simul_Z(n):
    L = [rd.randint(0, 1)]        # 1 : bleue et 0 : rouge
    while len(L) < n:
        if L[-1] == 1:
            L.append(0)
        else:
            L.append(rd.randint(0, 1))
    return sum(L)
```

   (b)

```
for n in range(2,11):
    N = 100000
    S = 0
    for k in range(N):
        x = simul_Z(n)
        S += x
    print(n, ' : ', S/N)
```

   Avec l'affichage :

```
2  :  0.74796
3  :  1.12432
4  :  1.43653
5  :  1.78314
6  :  2.10866
7  :  2.44148
8  :  2.77436
9  :  3.11501
10  :  3.44171
```

3. $Z_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Z_1 = 1) = P(B_1)$ donc $\boxed{Z_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$ et $\boxed{E(Z_1) = \frac{1}{2}}$
   $Z_2(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Z_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2)$ donc $\boxed{Z_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{3}{4}\right)}$ et $\boxed{E(Z_2) = \frac{3}{4}}$
   $Z_3(\Omega) = \{0,1,2\}$, $P(Z_3 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{8}$ et $P(Z_3 = 2) = P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{1}{4}$
   donc $\boxed{P(Z_3 = 0) = \frac{1}{8} \quad P(Z_3 = 1) = \frac{5}{8} \text{ et } P(Z_3 = 2) = \frac{1}{4}}$ et $\boxed{E(Z_3) = \frac{9}{8}}$
   $Z_4(\Omega) = \{0,1,2\}$, $P(Z_4 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$ et

$P(Z_4=1)=P(B_1\cap R_2\cap R_3\cap R_4)+P(R_1\cap B_2\cap R_3\cap R_4)+P(R_1\cap R_2\cap B_3\cap R_4)+P(R_1\cap R_2\cap R_3\cap B_4)$
donc $\boxed{P(Z_4=0)=\frac{1}{16}\quad P(Z_4=1)=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}\text{ et }\ P(Z_4=2)=\frac{1}{2}}$ et $\boxed{E(Z_4)=\frac{23}{16}}$

4. • Dans le cas n pair : $n=2m$,
Dans ce cas on ne peut pas avoir plus de m boules bleues avec $m+1$ boules bleues on aurait nécessairement deux boules bleues consécutives.
• Dans le cas n pair : $n=2m+1$,
Dans ce cas on ne peut pas avoir plus de $m+1$ boules bleues avec $m+2$ boules bleues on aurait nécessairement deux boules bleues consécutives.
On peut alors conclure par : Z_n prend toutes les valeurs entières entre 0 et $\boxed{[\![0;\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor]\!]}$

5. (a) R_1, $B_1\cap R_2$ est un système complet car $B_1\cap B_2$ est impossible donc
$$P(Z_{n+2}=k)=P(R_1)P_{R_1}(P(Z_{n+2}=k)+P(B_1\cap R_2)P_{B_1\cap R_2}(P(Z_{n+2}=k)$$
• si R_1 est réalisé alors on se retrouve dans la situation du début avec un décalage d'un tirage donc
$$P_{R_1}(P(Z_{n+2}=k)=P(Z_{n+1}=k)$$
• si $B_1\cap R_2$ est réalisé alors on se retrouve dans la situation du début avec un décalage de 2 tirages et une boule bleue déjà tirée donc
$$P_{B_1\cap R_2}(P(Z_{n+2}=k)=P(Z_n=k-1)$$
on obtient bien : $\boxed{P(Z_{n+2}=k)=\frac{1}{2}P(Z_{n+1}=k)+\frac{1}{2}P(Z_n=k-1)}$
(b) En multipliant par k et en sommant la relation précédente sur $[\![0;\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor]\!]$ il vient :
$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor}kP(Z_{n+2}=k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}kP(Z_{n+1}=k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor}kP(Z_n=k-1)$$
ou encore
$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor}kP(Z_{n+2}=k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}kP(Z_{n+1}=k)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(k+1)P(Z_n=k)$$
donc $\boxed{E(Z_{n+2})=\frac{1}{2}E(Z_{n+1})+\frac{1}{2}E(Z_n)+\frac{1}{2}}$,

Il reste à montrer par exemple par récurrence d'ordre 2 la relation :
$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\quad E(Z_n)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}}$$

6. (a) $P(Z_n=0)=P(R_1\cap...\cap R_n)$ donc $P(Z_n=0)=\frac{1}{2^n}$.
(b) • Si n est impair : $n=2m+1$ alors ... donc $P(Z_n=m+1)=\frac{1}{2^{m+1}}$.
Dans ce cas il n'y a qu'une configuration : $BRBR...RBRB$
• Si n est pair : $n=2m$ alors ... donc $P(Z_n=m)=(m+2)\dfrac{1}{2^{m+1}}\quad\left(=\dfrac{1}{2^m}+\dfrac{m}{2^{m+1}}\right)$.
Dans ce cas il y a plusieurs configurations :
• une qui finit par R : $BRBR...BRBRBR$
• m qui finissent par B :
$$\boxed{R}BRBR...BRBRB,\quad BR\boxed{R}BR...BRBRB\ ,\quad ...\quad ,\ BRBR...BRBR\boxed{R}B$$
(c) En dehors de $k\in[\![0;\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor]\!]$ la probabilité est nulle.
Distinguons deux types de séquences :
• La derniére boule est bleue.
Ces séquences sont entièrement caractérisées par la place des $k-1$ blocs "BR" et $n-2k+1$ "R" avant cette dernière boule "B".
Elles sont au nombre de $\binom{n-k}{k-1}$ et elles ont chacunes pour probabilité $\frac{1}{2^{n+1-k}}$
• La derniére boule est rouge.
Ces séquences sont entièrement caractérisées par la place des k blocs "BR" et $n-2k$ "R".
Elles sont au nombre de $\binom{n-k}{k}$ et elles ont chacunes pour probabilité $\frac{1}{2^{n-k}}$
Ces deux cas forment une partition de $(Z_n=k)$ donc
$$P(Z_n=k)=\binom{n-k}{k-1}\frac{1}{2^{n+1-k}}+\binom{n-k}{k}\frac{1}{2^{n-k}}$$