14h00-14h40-15h20.
Célia LAVAUD–VIOLETTE **sujet 11** Thaïs AUDOLI
Sans préparation : sujet 1

Question de cours : Enoncer le théorème des accroissements finis.

– –

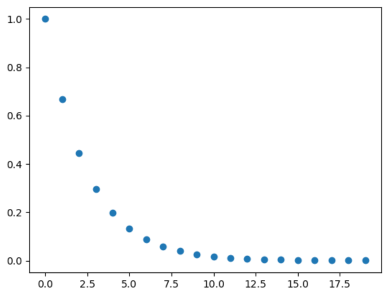
Exercice préparé :
Rappel : algorithme de dichotomie. *On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$. On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$, en un point que l'on note γ.*
On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :
- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et : $\begin{array}{l} \textit{si } f(a_k)\, f(c_k) \leqslant 0, \textit{ alors } a_{k+1} = a_k \textit{ et } b_{k+1} = c_k \\ \textit{sinon, on pose } a_{k+1} = c_k \textit{ et } b_{k+1} = b_k. \end{array}$
On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers γ, en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k \leqslant \gamma \leqslant b_k \quad \text{ et } \quad \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées de γ à ε-près.

1. On considère pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - \ln x - n$.
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (b) On rappelle et on admet l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \quad (*)$.
   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n \in]\,0, n^{-\frac{1}{n}}\,[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]\,n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\,[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.
2. Étude de la suite (v_n).
   La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.
   (a) Justifier en utilisant si besoin $(*)$ que $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.
   (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n pour n allant de 2 à 30. Représenter la suite (v_n) graphiquement.
   On rappelle que la fonction `plot` des modules `pylab` ou `matplotlib.pyplot` permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [ n for n in range (20) ]
Y = [(2/3)**k for k in X ]
plt.plot(X, Y, "o")
plt.show()
```



   (c) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
   (d) On admet le résultat suivant : si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
   On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
   Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.
3. Étude de la suite (u_n)
   (a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8 .
   (b) Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).
   (c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.

15h20-16h00-16h40.
Ludivine RZEPIAK **sujet 11**
Sans préparation : sujet 1

Question de cours : Enoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices.

_ _

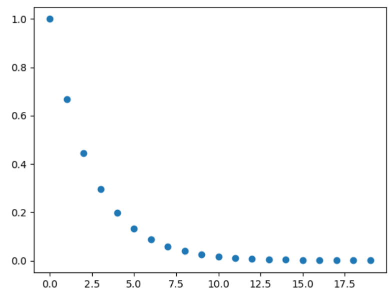
Exercice préparé :
Rappel : algorithme de dichotomie. *On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$. On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$, en un point que l'on note γ.*
On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :
- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k+b_k}{2}$ et : si $f(a_k)f(c_k) \leqslant 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$; sinon, on pose $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.
On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers γ, en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k \leqslant \gamma \leqslant b_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées de γ à ε-près.

1. On considère pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - \ln x - n$.
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (b) On rappelle et on admet l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \quad (*)$.
   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n \in]0, n^{-\frac{1}{n}}[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.
2. Étude de la suite (v_n).
   La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.
   (a) Justifier en utilisant si besoin $(*)$ que $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.
   (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n pour n allant de 2 à 30. Représenter la suite (v_n) graphiquement.
   On rappelle que la fonction `plot` *des modules* `pylab` *ou* `matplotlib.pyplot` *permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :*

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [ n for n in range (20) ]
Y = [(2/3)**k for k in X ]
plt.plot(X, Y, "o")
plt.show()
```

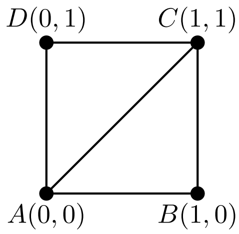


   (c) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
   (d) On admet le résultat suivant : si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
   On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
   Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.
3. Étude de la suite (u_n)
   (a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8 .
   (b) Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).
   (c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.

14h40-15h20-16h00
Alexane ECALARD **sujet 22** Jeanne PIGIER
Sans préparation : sujet 2

Question de cours : Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle quelconque.

Exercice préparé :
On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-dessous délimitée par les points $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ et $D(0,1)$.



A l'instant $n=0$, elle se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.
Par exemple, du point A, la particule peut aller en B, C ou D mais du point D, elle ne peut aller qu'en A ou C.
Pour tout entier naturel n, on note respectivement A_n, B_n, C_n et D_n les événements :

« À l'instant n, la particule se situe en A (resp. en B, en C, en D) ».

On note enfin pour tout entier naturel n : $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle donne la position de la particule après n étape :

```
import random as rd
A, B, C, D =  0, 1, 2, 3

def position(n):
    X = A
    for _ in range(n):
        if X == A:
            X = rd.choice([B, C, D])
        elif X == B:
         ....
```

   (b) En déduire une fonction qui estime a_n. Puis estimer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.

3. (a) En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = b_n$, démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer b_n en fonction n.
   (b) En déduire l'expression de $a_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de n.
   (c) Montrer que la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n.
   (d) En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.

4. Soient maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n$ et Y_n des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n.
   (a) Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
   (b) X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$.

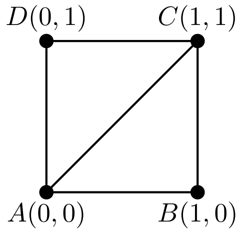
5. Pour tout entier natuel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}^T$.
   (a) Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$.
   (b) On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$.
   En déduire que chaque valeur propre λ de M vérifie $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$
   (c) Justifier que M est diagonalisable puis la diagonaliser.
   (d) Proposer alors une démarche *(sans détailler les calculs)* pour retrouver le résultat de la question 3.

16h00-16h40-17h20
Thomas DA CRUZ **sujet 22** Klervie POULIQUEN
Sans préparation : sujet 2

Question de cours : Si $(A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désignent deux matrices carrées d'ordre n, et $C = AB$, rappeler pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ l'expression de $C_{i,j}$ en fonction des coefficients de A et de B.

– –

Exercice préparé :
On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-dessous délimitée par les points $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ et $D(0,1)$.



A l'instant $n = 0$, elle se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.
Par exemple, du point A, la particule peut aller en B, C ou D mais du point D, elle ne peut aller qu'en A ou C.
Pour tout entier naturel n, on note respectivement A_n, B_n, C_n et D_n les événements :

« À l'instant n, la particule se situe en A (resp. en B, en C, en D) ».

On note enfin pour tout entier naturel n : $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle donne la position de la particule après n étape :

```
import random as rd
A, B, C, D =  0, 1, 2, 3

def position(n):
    X = A
    for _ in range(n):
        if X == A:
            X = rd.choice([B, C, D])
        elif X == B:
         ....
```

   (b) En déduire une fonction qui estime a_n. Puis estimer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.

3. (a) En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = b_n$, démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer b_n en fonction n.
   (b) En déduire l'expression de $a_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de n.
   (c) Montrer que la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n.
   (d) En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.

4. Soient maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n$ et Y_n des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n.
   (a) Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
   (b) X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$.

5. Pour tout entier natuel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}^T$.
   (a) Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$.
   (b) On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$.
   En déduire que chaque valeur propre λ de M vérifie $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$
   (c) Justifier que M est diagonalisable puis la diagonaliser.
   (d) Proposer alors une démarche *(sans détailler les calculs)* pour retrouver le résultat de la question 3.

16h40-17h20-18h00
Lorraine VALSAQUE **sujet 44** Camille MILOT
Sans préparation : sujet 4

Question de cours :

Enoncé le théorème fondamental de l'analyse.

– –

Exercice préparé :
On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *(on pourra utiliser le changement de variable $x = 2\sin(u)$)*

   On considère une variable aléatoire X de densité f.

2. (a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, que X^n admet une espérance.

   (b) Que vaut $E(X^{2k+1})$ pour $k \in \mathbb{N}$?

Dans la suite on étudie $U_k = E(X^{2k})$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. (a) Compléter le programme suivant permettant d'estimer les 10 premières valeurs de U_k.

```
import scipy.integrate as scipy
for k in range (11):
    def g(x):
        return
    print(scipy.quad(g, -2, 2))
```

   Indication : l'instruction `scipy.quad(g, -2, 2)` *renvoie une valeur approchée de* $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(t)\,dt$.

   (b) Rappeler le théorème des sommes de Riemann et en déduire un autre programme permettant de réaliser les estimations précédentes.

4. (a) Montrer que la fonction $g : x \longmapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\left[0\,,1\right]$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$U_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2}U_k$$

   Indication : Calculer $4U_k - U_{k+1}$ en utilisant une intégration par parties.

   (c) Ecrire un programme Python qui permet de vérifier que les 100 premiers termes U_k sont des entiers naturels. Donner à l'aide de ce programme les 6 derniers chiffres de U_{100}

   On rappelle qu'en Python, `a//b` *et* `a%b` *désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de* `a` *par* `b`*, et renvoient des entiers.*

   (d) Exprimer U_k en fonction de k avec des factoriels.

   (e) En utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ montrer que :

$$U_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}$$

17h20-18h00-18h40
CALDAS Eva **sujet 44** COMTESSE Oriane
Sans préparation : sujet 3

Question de cours :
Définition d'une fonction de classe C^n sur un intervalle.

– –

Exercice préparé :
Rappel : algorithme de dichotomie. O*n considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$. On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$, en un point que l'on note γ.*

On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :
- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k+b_k}{2}$ et : $\begin{array}{l} \textit{si } f(a_k)\,f(c_k) \leqslant 0, \textit{ alors } a_{k+1} = a_k \textit{ et } b_{k+1} = c_k \\ \textit{sinon, on pose } a_{k+1} = c_k \textit{ et } b_{k+1} = b_k. \end{array}$

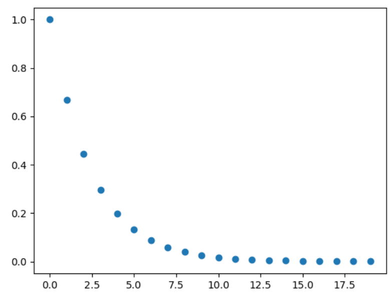
On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers γ, en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k \leqslant \gamma \leqslant b_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées de γ à ε-près.

1. On considère pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - \ln x - n$.
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (b) On rappelle et on admet l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \quad (*)$.
   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n \in]\,0, n^{-\frac{1}{n}}\,[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]\,n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\,[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.
2. Étude de la suite (v_n).
   La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.
   (a) Justifier en utilisant si besoin $(*)$ que $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.
   (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n pour n allant de 2 à 30. Représenter la suite (v_n) graphiquement.
   On rappelle que la fonction **`plot`** *des modules* **`pylab`** *ou* **`matplotlib.pyplot`** *permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :*

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [ n for n in range (20) ]
Y = [(2/3)**k for k in X ]
plt.plot(X, Y, "o")
plt.show()
```



   (c) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
   (d) On admet le résultat suivant : si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
   On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
   Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.
3. Étude de la suite (u_n)
   (a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8 .
   (b) Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).
   (c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.