Correction du sujet 11

Question de cours :
il suffit que F_X soit continue sur $\mathbb{R}$ en entier et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de point.
Pour déterminer une densité on dérive F_X là où elle est dérivable. *(on complète comme on veut)*

$- -$

Exercice préparé :

1. (a) $f_n'(x) = n\,\dfrac{(x^n - 1/n)}{x}$.

   Pour les limites : pas de difficulté en 0 et en $+\infty$, une Crois.Compar. donne $f_n(x) \sim x^n$

x	0		u_n		$n^{-\frac{1}{n}}$		v_n		$+\infty$
$f_n'(x)$			$+$		0		$-$		
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_n\left(-n^{\frac{1}{n}}\right) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (b)
$$
\begin{aligned}
f_n\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln(n) - n \\
&= \frac{1}{n}(\ln(n) + 1) - n \\
&\leqslant \frac{1}{n}(n - 1 + 1) - n \\
&\leqslant 1 - n \\
&< 0 \qquad\qquad \text{car } n \geqslant 2
\end{aligned}
$$
   Avec le tableau de varaitions et le théorème de la bijection on en déduit :
   Pour $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n \in]\,0, n^{-\frac{1}{n}}\,[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]\,n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\,[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

2. (a)
$$
\begin{aligned}
f_n\left((2n)^{1/n}\right) &= 2n - \frac{1}{n}\ln(2n) - n \\
&\geqslant n - \frac{1}{n}(2n - 1) \\
&\geqslant n - 2 + \frac{1}{n} \qquad \geqslant 0 \qquad\qquad \text{car } n \geqslant 2.
\end{aligned}
$$
   donc $f_n\left((2n)^{1/n}\right) \geqslant f(v_n)$
   or $\quad v_n \in]\,n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\,[\ ,\ (2n)^{\frac{1}{n}} \in \left]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\right[\quad$ donc $\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.

   (b)
```
from matplotlib.pyplot import *
from math import *

def f(n,x):
    return x**n - log(x) - n

def v(n):
    a = n**(-1/n)
    b = (2*n)**(1/n)
    while b-a > 0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(n,m) > 0:
            b = m
        else:
```

```
            a = m
    return (a+b)/2
figure('vn')
x = [ k for k in range(2, 30) ]
y = [ v(k) for k in range(2, 30) ]
plot(x,y,'x')
show()
```

Conjecture : (u_n) semble converger vers 1.

(c)

$$n^{-1/n} \leqslant v_n \leqslant (2n)^{1/n} \text{ donc } \quad -\frac{\ln n}{n} \leqslant \ln(v_n) \leqslant \frac{\ln(2n)}{n}$$

On en déduit que : $(\ln(v_n))$ converge vers 0 puis que (v_n) converge vers 1

(d)

$$\begin{aligned} v_n^n &= \ln(v_n) + n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n \end{aligned}$$

donc avec l'indication, $n\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

de plus $v_n \to 1$ douc $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n - 1$ donc $\boxed{v_n - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}}$

3. (a)

```
def u(n):
    a = 0.0001
    b = n**(-1/n)
    while b-a > 0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(n,m) > 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a+b)/2

figure('un')
x = [ k for k in range(2, 30) ]
y = [ u(k) for k in range(2, 30) ]
plot(x,y,'x')
show()
```

(b) $u_{n+1}^{n+1} = \ln(u_{n+1}) - (n+1) = 0$ et $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - \ln(u_{n+1}) - n$ donc

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + 1 \\ &= u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) + 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ puis que $u_{n+1} < u_n$ (u_n) est décroissante.

(c) $0 \leqslant u_n \leqslant n^{-\frac{1}{n}}$ donc $0 \leqslant u_n^n \leqslant \frac{1}{n}$ donc *(gendarmes)* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.

$un^n - \ln(u_n) - n = 0$ donc $\ln(u_n e^n) = u_n^n \to 0$ donc $\boxed{u_n \sim e^{-n}}$

Correction du sujet 22

1.

```
import random as rd

A, B, C, D =  0, 1, 2, 3

def position(n):
    X = A
    for _ in range(n):
        if X == A:
            X = rd.choice([B, C, D])
        elif X == B:
            X = rd.choice([A, C])
        elif X == C:
            X = rd.choice([A, B, D])
        else:
            X = rd.choice([A, C])
    return X

def probabilite_ CD     dA(n):
    c = 0
    N = 1000
    for k in range(N):
        if position(n) == A:
            c += 1
    return c/N

for n in [10,30,100,1000]:
    print(probabilite_A(n))
```

Le programme affiche 0.3032, 0.3015, 0.3009, 0.2967.
Ce qui laisse penser que a_n est proche de $0,3$ lorsque n est grand.

2. A_n, B_n, C_n et D_n formant un système complet, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n)$$

Étant donné les conditions de déplacements de la particule, on a :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,\ \ P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{D_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

Donc $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n}$. On trouve de même : $\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n}$, $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n}$ et $\boxed{d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n}$.

3. (a) Comme $b_0 = d_0 = 0$ et $b_{n+1} = d_{n+1}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n$.

Ainsi on a : $\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}c_n & (L_1) \\ c_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}a_n & (L_2) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n) & (L_3) \end{cases}$

D'où :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{3}(a_{n+1} + c_{n+1}) \quad \text{d'après } L_3 \\ &= \frac{1}{3}\left(2b_n + \frac{1}{3}(a_n + c_n)\right) \quad \text{d'après } L_1 + L_2 \\ &= \frac{1}{3}\left(2b_n + b_{n+1}\right) \quad \text{d'après } L_3 \end{aligned}$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$\boxed{b_{n+2} - \frac{1}{3}b_{n+1} - \frac{2}{3}b_n = 0}.$$

L'équation caractéristique associée est : $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$. Ses racines sont 1 et $\frac{-2}{3}$.

Conclusion : $\boxed{b_n = \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}$.

(b) On a vu que $a_{n+1} + c_{n+1} = 3b_{n+2}$. Autrement dit, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\boxed{a_n + c_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n}.$$

Ce qui est encore vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 + c_0 = 1$.

(c) On a $a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{-1}{3}(a_n - c_n)$: la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{-1}{3}$.

Il en résulte que $a_n - c_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n (a_0 - c_0)$ soit $\boxed{a_n - c_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n}$.

(d) $$\boxed{\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n + \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right) \\ b_n = d_n = \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right) \end{cases}}$$

4. (a) $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$: les variables X_n et Y_n sont des variables de Bernoulli.
$X_n = 1$ signifie que l'abscisse de la particule à l'instant n est égale à 1, autrement dit la particule est positionnée en B ou C à l'instant n.
Donc $(X_n = 1) = B_n \cup C_n$ et $P(X_n = 1) = P(B_n) + P(C_n)$ puisque les deux événements B_n et C_n sont incompatibles.
Ainsi $P(X_n = 1) = b_n + c_n = \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)$ ce qui donne :

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)}$$

X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)$.
De même $(Y_n = 1) = D_n \cup C_n$ et $P(Y_n = 1) = d_n + c_n = b_n + c_n$: Y_n a même loi que X_n.

$$\boxed{P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$;

- Cas $n = 0$: $X_0 = Y_0 = 0$ donc $P((X_0 = 0) \cap (Y_0 = 0)) = 1 = P(X_0 = 0) \times P(Y_0 = 0)$.

  $\boxed{X_0 \text{ et } Y_0 \text{ sont indépendantes}}$.
- Cas $n \geq 1$: nous allons montrer que X_n et Y_n ne sont pas indépendantes en montrant que $P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) \neq P(X_n = 1) \times P(Y_n = 1)$.
  Comme X_n et Y_n sont des variables de Bernoulli, cela revient à montrer que leur covariance est non nulle.
  En effet, X_nY_n est également une variable de Bernoulli (car $(X_nY_n)(\Omega) = \{0, 1\}$) donc

  $$E(X_nY_n) = P(X_nY_n = 1) = P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)).$$

  D'autre part, $E(X_n) \times E(Y_n) = P(X_n = 1) \times P(Y_n = 1)$.
  Montrer que $P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) \neq P(X_n = 1) \times P(Y_n = 1)$ revient à montrer que $E(X_nY_n) \neq E(X_n) \times E(Y_n)$ i.e. $\text{Cov}(X_n, Y_n) \neq 0$.
  On anticipe donc sur la question suivante en calculant $\text{Cov}(X_n, Y_n)$.

$$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = E(X_nY_n) - E(X_n)E(Y_n).$$

$E(X_n) = E(Y_n) = p_n = b_n + c_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right)$.

Par ailleurs, $E(X_nY_n) = P(X_nY_n = 1) = P((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) = P(C_n) = c_n$.

Donc $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = c_n - (b_n + c_n)^2$; on obtient après simplification

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = 0 &\iff \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n = 0 \\
&\iff 9^n + 4 \times \frac{(-2)^n}{3^n} \times 9^n - 5 = 0 \qquad \textit{(on a multiplié par } 20 \times 9^n\textit{)} \\
&\iff 5 = 9^n + 4 \times (-2)^n \times 3^n
\end{aligned}$$

Impossible car 5 n'est pas divisible par 3. En conclusion : $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) \neq 0$.

$$\boxed{X_n \text{ et } Y_n \text{ ne sont pas indépendantes}}.$$

(c) Calcul de la covariance : voir question précédente

5. Pour tout entier naturel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

(a) D'après 2., pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$ ainsi $U_{n+1} = MU_n$ avec

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}.$$

(b) On admet que $M^4 - \dfrac{7}{9}M^2 - \dfrac{2}{9}M = 0$. Soit λ une valeur propre de M. Alors il existe une matrice colonne X non nulle telle que $MX = \lambda X$.

Il est alors simple de vérifier que l'on a : $M^2X = \lambda^2X$, $M^3X = \lambda^3X$ et $M^4X = \lambda^4X$.

On a donc : $\left(M^4 - \dfrac{7}{9}M^2 - \dfrac{2}{9}M\right)X = \lambda^4X - \dfrac{7}{9}\lambda^2X - \dfrac{2}{9}\lambda X = \left(\lambda^4 - \dfrac{7}{9}\lambda^2 - \dfrac{2}{9}\lambda\right)X$.

On a aussi $\left(M^4 - \dfrac{7}{9}M^2 - \dfrac{2}{9}M\right)X = 0X = 0$ donc $\left(\lambda^4 - \dfrac{7}{9}\lambda^2 - \dfrac{2}{9}\lambda\right)X = 0$ et comme $X \neq 0$, on en déduit que λ vérifie $\boxed{\lambda^4 - \dfrac{7}{9}\lambda^2 - \dfrac{2}{9}\lambda = 0}$.

(c) En factorisant par $x(x-1)$ on obtient : $x^4 - \dfrac{7}{9}x^2 - \dfrac{2}{9}x = x(x-1)\left(x^2 + x + \dfrac{2}{9}\right)$.

On en déduit $x^4 - \dfrac{7}{9}x^2 - \dfrac{2}{9}x = 0 \iff x \in \left\{0, 1, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-2}{3}\right\}$.

Ainsi les seules valeurs propres possibles de M sont : $0, 1, \dfrac{-1}{3}$ et $\dfrac{-2}{3}$.

- Cas $\lambda = 0$:

$$MX = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y + 2z + 3t = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = 0 \\ t = -y \end{cases}$$

Le système admet d'autre solutions que la solution nulle donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } M}$ et le sous-espace propre associé est $\boxed{E_0(M) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$.

- Cas $\lambda = 1$:

$$MX = X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = t \end{cases} \iff \begin{cases} -6x + 3y + 2z + 3t = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - 6z + 3t = 0 \\ x + z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

Le système admet d'autre solutions que la solution nulle donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$ et le sous-espace propre associé est $\boxed{E_1(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$.

- Cas $\lambda = \dfrac{-1}{3}$: de même on vérifie que $MX = \dfrac{-1}{3}X \iff \begin{cases} z = -x \\ y = t = 0 \end{cases}$.

Donc $\boxed{-1/3 \text{ est valeur propre de } M}$ et $\boxed{E_{-1/3}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

- Cas $\lambda = \dfrac{-2}{3}$: de même on vérifie que $MX = \dfrac{-2}{3}X \iff \begin{cases} x = z = -t \\ y = t \end{cases}$.

Donc $\boxed{-2/3 \text{ est valeur propre de } M}$ et $\boxed{E_{-2/3}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$.

Conclusion : $\boxed{\text{sp}(M) = \left\{0, 1, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-2}{3}\right\}}$.

$\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ car elle admet quatre valeurs propres distinctes.

$$M = PDP^{-1} \text{ avec } \boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}}.$$

(d) $U_{n+1} = MU_n$ pour tout entier naturel n.

On en déduit par récurrence que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel n.

Or $M = PDP^{-1}$ donc $M^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2/3)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

De plus, comme $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ alors $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il suffit alors de calculer la première colonne de PD^nP^{-1} pour déterminer U_n.

Correction du sujet 44

Exercice préparé :

1. f est continue et à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
(Calcul à présenter soigneusement au tableau)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t && \textit{(intégrale convergente)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2(u)}\,2\cos(u)\mathrm{d}u && \textit{Changement de variable } t=\sin(u)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\mathrm{d}u\\
&= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\mathrm{d}u\\
&= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1+\cos(2u)\right)\mathrm{d}u = 1
\end{aligned}$$

$\boxed{f \text{ est bien une densité}}$

2. (a) $x \longmapsto x^n f(x)$ est nulle en dehors de $[-2,2]$ et continue sur $[-2,2]$
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc *(théorème de transfert)*

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ que } X^n \text{ admet une espérance}}$$

(b) $x \longmapsto x^n f(x)$ est impaire et $E(X^{2k+1})$ existe donc $\boxed{E(X^{2k+1}) = 0}$

3. (a) Le programme suivant permet d'estimer les 10 premières valeurs de U_k.

```
from math import pi, sqrt
import scipy.integrate as sc
for k in range (11):
    def g(x):
        return x**(2*k)*sqrt(4-x**2)/(2*pi)
    print(sc.quad(g, -2, 2))
```

qui donne l'affichage suivant : *La deuxième valeur est une majoration de l'erreur.*

```
(1.0000000000000002, 6.36773078710462e-10)
(1.0000000000000002, 3.4132388027074967e-09)
(1.9999999999999873, 2.5540261017198418e-08)
(4.999999999999991, 6.793205997723817e-10)
...
(4861.999999998512, 5.90583485973184e-05)
(16795.999999999945, 1.4916062355041504e-05)
```

(b) Pour f une fonction continue sur $[a,b]$,

$$\text{En posant}\quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut remplacer la fonction `scipy.quad` par la fonction suivante :

```
def integrale(f, a, b):
    N = 1000
    S = 0
    for k in range(N):
        S += f(a+k*(b-a)/N)
    return S*(b-a)/N
```

4. (a) • $g : x \longmapsto x\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\left]0,1\right]$ *(fonction usuelle $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$).*

et pour tout $x \in \left]0,1\right]$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

• en 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0

$$\boxed{\text{la fonction } g : x \longmapsto x\sqrt{x} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]}$$

Remarque : cette propriété nous sert dans l'intégration par parties de la question suivante.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
4U_k - U_{k+1} &= 4\int_{-2}^{2} \frac{x^{2k}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{x^{2k+2}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2k}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right] - \int_{-2}^{2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \times \frac{3}{2}(-2x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\quad 0 \quad + \frac{3}{2k+1}\int_{-2}^{2} x^{2k+2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{3}{2k+1}U_{k+1}
\end{aligned}$$

on obtient bien : $\boxed{U_{k+1} = \dfrac{2(2k+1)}{k+2}U_k}$

(c)

```
u = 1
for k in range(100):
    if (2*(2*k+1)*u)%(k+2) != 0:
        print("stop")
    u=(2*(2*k+1)*u)//(k+2)
    print('u('+str(k+1)+')=',u)
```

Le programme n'affiche aucun "stop" donc les valeurs sont toutes entières.
Les 6 derniers chiffres de U_{100} sont `909320`.
`u(100)= 896519947090131496687170070074100632420837521538745909320`

(d) On parvient de proche en proche à la relation : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_k = \dfrac{(2k)!}{k!(k+1)!}}$ *à démontrer par récurrence.*

(e)

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \\
&\sim \frac{(2k)^{2k}}{k^k(k+1)^{k+1}} \times \frac{e^k e^{k+1}}{e^{2k}} \times \sqrt{\frac{2\pi(2k)}{2\pi k \times 2\pi(k+1)}} \\
&\sim 2^{2k} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \times \frac{1}{k+1} \times e \times \sqrt{\frac{1}{\pi(k+1)}} \qquad \text{donc } \boxed{U_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}}
\end{aligned}$$