

Mathis LOEFFLER Lucas BONNEFOY Gilda MARTIN-HANIER Nina PININGRE

On rappelle que si  $S$  et  $T$  sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives  $f_S$  et  $f_T$  et indépendantes, alors  $S + T$  est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)f_T(t-s)ds$$

On considère deux variables aléatoires indépendantes :  $U$  et  $V$  suivant, chacune, la loi uniforme sur  $]0; 1[$ .

1. Justifier son existence, puis déterminer une densité  $f$  des variables aléatoires  $U^2$  et  $V^2$ .
2. On considère la variable aléatoire  $Z = U^2 + V^2$ . Justifier que  $Z$  admet une densité de probabilité, notée  $h$ .
3. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire  $Z$  et d'estimer  $P(Z \leq 1)$ .
4. (a) Montrer que, pour  $0 < x \leq 1$ , on a :  $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ .  
 (b) Montrer que, pour  $0 < x \leq 1$ , on a :  $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$ .  
 (c) Montrer que, sur  $]0; 1[$ , on a :  $h(x) = \frac{\pi}{4}$ . (On pourra utiliser le changement de variable  $y = \sin^2(u)$ ).  
 (d) Calculer  $P(Z \leq 1)$  et interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.
5. On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli  $(Y_n)_{n \geq 1}$  mutuellement indépendantes et de même paramètre  $\frac{\pi}{4}$ , et on note  $S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$  pour tout entier  $n \geq 1$ .  
 (a) Soit  $\varepsilon > 0$ , à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer, en fonction de  $n$  et  $\varepsilon$ , une majoration de  $P\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$ .  
 (b) En déduire, à partir de quelle valeur de  $n$ , il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de  $\frac{\pi}{4}$  et d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$ .  
 (c) À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de  $\frac{\pi}{4}$  et d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$ .

-----

Alan CABARET Alexandre TABBAGH Suwaraka KALAMENDRA Gala-Anne GUINAUDEAU

On note  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$  et  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $u_n$  est bien définie.
2. (a) Ecrire une fonction prenant en entrée un nombre  $x$  et renvoyant  $f(x)$ .  
 (b) Ecrire une fonction permettant de calculer  $\int_a^b f(x)dx$  par la méthode des rectangles, pour tout  $a, b$  réels tels que  $a \leq b$ .  
 (c) A l'aide de ces fonctions faire une conjecture sur la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que  $\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)dx = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t)dt$ .
4. On note  $g$  la fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ .  
 (a) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .  
 (b) Montrer qu'il existe un unique prolongement de  $g$  continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , noté  $\tilde{g}$ .  
 (c) Montrer que  $\tilde{g}$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

5. (a) Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \cdot \tilde{g}'(t) dt$ .

(b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \cdot \tilde{g}(t) dt = 0$ .

6. (a) Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

(b) Montrer que pour tout entier  $n$ , pour tout réel  $t$  différent de 0 ,

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$$

(c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t)) dt = \frac{\pi}{2}$ .

7. Quelle est la limite de  $u_n$  ?

-----

Aïcha BA Jade SOUPRAYEN

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  :

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

1. Ecrire une fonction qui simule la réalisation de la variable  $X$ .
2. Ecrire une fonction qui pour  $x$  donné en argument renvoie  $F_X(x)$  où  $F_X$  est la fonction de répartition de  $X$ .
3. Calculer si elles existent  $E(X)$ ,  $E(|X|)$  et  $E(X^2)$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  une liste de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de  $X$ .

On note :  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ ,  $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$  et  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

4. (a) Déterminer la fonction de répartition de  $M_n$ .
- (b) Déterminer une densité de  $M_n$  et son espérance si elles existent.
- (c) Déterminer la fonction de répartition de  $m_n$ .
- (d) Les variables aléatoires  $m_n$  et  $M_n$  sont elles indépendantes ?
- (e) Déterminer  $E(S_n)$  si elle existe.

5. (a) Prouver que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $E(e^{\lambda S_n}) = \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda}\right)^n$

(b) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P(S_n \geq t) \leq e^{-t + \frac{n}{2}}$

Rappel sur la convergence en loi :

Soient  $Y$  une variable aléatoire réelle et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles.  
 On note  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$  et  $D$  l'ensemble des réels où  $F_Y$  est continue.  
 $(Y_n)$  converge en loi vers  $Y$  signifie que :  $\forall x \in D, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x) = F_Y(x)$

6. (a) Ecrire une fonction permettant de simuler la réalisation de la variable  $M_n$ ,  $n$  étant passé en argument.
- (b) Montrer que  $M_n$  converge en loi vers une variable aléatoire certaine à préciser.

7. On note  $Z_n = n \left(\frac{1}{2} - M_n\right)$ .

- (a) Ecrire une fonction permettant de simuler la réalisation de la variable  $Z_n$ ,  $n$  étant passé en argument.
- (b) Ecrire un programme traçant une approximation de la fonction de répartition de  $Z_n$  avec un longue série de simulations.
- (c) Montrer que  $Z_n$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi usuelle à préciser.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  
 pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on note  $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$ .

1. Montrer que  $\Phi$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Calculer pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\Phi(X^k)$   
 (b) Donner une base de l'image de  $\Phi$ .  
 (c) Donner une base du noyau de  $\Phi$ .
3. Montrer que  $\Phi$  est diagonalisable. (*on pourra utiliser le résultat de la question 2.(a)*)

4. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on note :  $S_N = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} \binom{N+1}{2k+1}$  et  $T_N = \sum_{0 \leq 2k \leq N+1} \binom{N+1}{2k}$

- (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un entier naturel  $N$  et renvoyant la valeur de  $S_N$ . On pourra utiliser `comb(N, j)` de la bibliothèque `math` qui calcule  $\binom{N}{j}$ .
- (b) Déterminer  $S_4$  et  $S_5$ .
- (c) Calculer  $S_N + T_N$ . Et montrer que  $S_N - T_N = 0$
5. On définit pour  $N \in \mathbb{N}$  le polynôme :

$$P_N = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} (-1)^k \binom{N+1}{2k+1} (1 - X^2)^k X^{N-2k}$$

- (a) Donner les polynômes  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .
- (b) Déterminer le monôme dominant de  $P_N$ .
- (c) Montrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (d) Montrer que  $\sin((N+1)t) = \sin(t)P_N(\cos(t))$ . *On pourra développer  $(\cos(t) + i \sin(t))^{N+1}$*
- (e) En dérivant deux fois l'égalité précédente montrer que :

$$(N^2 + 2N)P_N - 3XP'_N - (X^2 - 1)P''_N = 0$$

- (f) Diagonaliser  $\Phi$ . (*Autrement dit : Donner une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  formée de vecteurs propres de  $\Phi$* )

-----

Nokomie BOUROUF Emma TIBERGHIEH Héléna ROBERT Erwan DIA

Une urne contient initialement une boule bleue et une boule rouge, si on tire la boule bleue on retire ensuite dans la même urne sans avoir remis la boule bleue, si on tire une boule rouge on refait un tirage dans une urne contenant une boule bleue et une boule rouge. On enchaîne ainsi des tirages indéfiniment.

*Après une boule bleue on a toujours une boule rouge et après une rouge on obtient de manière équiprobable une rouge ou une bleue.*

On note  $r_n$  (resp.  $b_n$ ) la probabilité de tirer une boule rouge (resp. bleue) au  $n$ -ième tirage

1. (a) Déterminez  $r_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $r_n$  et  $b_n$   
 (b) En déduire  $r_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$

On note  $Z_n$  le nombre de boules bleues tirées au cours des  $n$  tirages

2. (a) Ecrire une fonction Python `simul_Z(n)` qui permet de simuler la réalisation de  $Z_n$ .  
 (b) Trouver une valeur approchée de l'espérance de  $Z_n$  pour  $n$  allant de 2 à 10.
3. Donner les lois de  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  et calculer leur espérance.
4. Quelles sont les valeurs prises par  $Z_n$  en fonction de  $n$ ? (*On pourra faire des cas suivant la parité de  $n$* )
5. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0; \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor \rrbracket$  :

$$P(Z_{n+2} = k) = \frac{1}{2}P(Z_{n+1} = k) + \frac{1}{2}P(Z_n = k - 1)$$

- (b) En déduire une relation donnant  $E(Z_{n+2})$  en fonction de  $E(Z_{n+1})$  et  $E(Z_n)$ , puis montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(Z_n) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}$

6. (a) Déterminer la probabilité que  $Z_n$  prenne sa plus petite valeur.
- (b) Déterminer la probabilité que  $Z_n$  prenne sa plus grande valeur.
- (c) Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , déterminer  $P(Z_n = k)$ .

-----

CALDAS Eva Owen NEDJAR Célia LAVAUD-VIOLETTE Thaïs AUDOLI Ludivine RZEPIAK Héléna ROBERT

**Rappel : algorithme de dichotomie.** On considère une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$ . On suppose que  $f$  s'annule exactement une fois sur  $[a, b]$ , en un point que l'on note  $\gamma$ .

On définit les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  de la façon suivante :

-  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

- Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  et :  $\begin{cases} \text{si } f(a_k) f(c_k) \leq 0, & \text{alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k \\ \text{sinon,} & \text{on pose } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k. \end{cases}$

On sait alors que les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  convergent toutes les deux vers  $\gamma$ , en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k \leq \gamma \leq b_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier  $k$  est tel que  $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$ , alors  $a_k$  et  $b_k$  sont des valeurs approchées de  $\gamma$  à  $\varepsilon$ -près.

1. On considère pour tout entier  $n \geq 2$ , la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f_n(x) = x^n - \ln x - n$ .
  - (a) Dresser le tableau de variations de  $f_n$ .
  - (b) On rappelle et on admet l'inégalité suivante :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1 \quad (*)$ .  
En déduire que pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un unique réel  $u_n \in ]0, n^{-\frac{1}{n}}[$  tel que  $f_n(u_n) = 0$  et un unique réel  $v_n \in ]n^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$  tel que  $f_n(v_n) = 0$ .

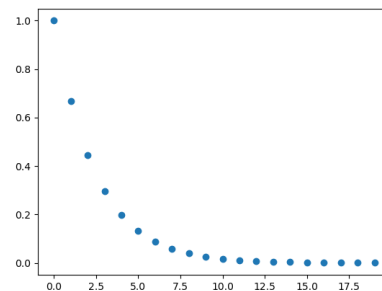
2. Étude de la suite  $(v_n)$ .

La suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  vérifie donc l'égalité :  $\forall n \geq 2, \quad v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$ .

- (a) Justifier en utilisant si besoin  $(*)$  que  $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$ , puis en déduire que :  $\forall n \geq 2, \quad v_n \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$ .
- (b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à  $10^{-3}$  près des termes  $v_n$  pour  $n$  allant de 2 à 30. Représenter la suite  $(v_n)$  graphiquement.

On rappelle que la fonction `plot` des modules `pylab` ou `matplotlib.pyplot` permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [ n for n in range (20) ]
Y = [(2/3)**k for k in X ]
plt.plot(X, Y, "o")
plt.show()
```

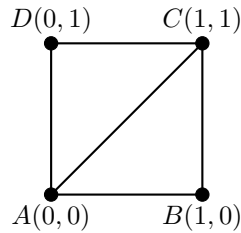


- (c) Montrer que  $(v_n)$  converge et déterminer sa limite  $\ell$ .
- (d) On admet le résultat suivant : si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ , alors  $\ln(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(b_n)$ .  
On rappelle de plus que  $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$ .  
Déterminer un équivalent de  $v_n - \ell$ .

3. Étude de la suite  $(u_n)$

- (a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à  $10^{-3}$  près des termes  $u_n$  pour  $n$  allant de 2 à 8 .
- (b) Calculer  $f_n(u_{n+1})$ . En déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .
- (c) Justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ , puis montrer que  $u_n$  est équivalent à  $e^{-n}$ .

On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-dessous délimitée par les points  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(1,1)$  et  $D(0,1)$ .



A l'instant  $n = 0$ , elle se situe en  $A$  et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.

Par exemple, du point  $A$ , la particule peut aller en  $B, C$  ou  $D$  mais du point  $D$ , elle ne peut aller qu'en  $A$  ou  $C$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note respectivement  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$  les événements :

« À l'instant  $n$ , la particule se situe en  $A$  (resp. en  $B$ , en  $C$ , en  $D$ ) ».

On note enfin pour tout entier naturel  $n : a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n)$  et  $d_n = P(D_n)$ .

1. (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle donne la position de la particule après  $n$  étape :

```
import random as rd
A, B, C, D = 0, 1, 2, 3

def position(n):
    X = A
    for _ in range(n):
        if X == A:
            X = rd.choice([B, C, D])
        elif X == B:
            ...
```

- (b) En déduire une fonction qui estime  $a_n$ . Puis estimer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  et  $d_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$ .
3. (a) En remarquant que  $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = b_n$ , démontrer que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer  $b_n$  en fonction  $n$ .
- (b) En déduire l'expression de  $a_{n+1} + c_{n+1}$  en fonction de  $n$ .
- (c) Montrer que la suite  $(a_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique et en déduire son expression en fonction de  $n$ .
- (d) En déduire les expressions de  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$  en fonction de  $n$ .
4. Soient maintenant, pour tout  $n \in \mathbb{N}, X_n$  et  $Y_n$  des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant  $n$ .
- (a) Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
- (b)  $X_n$  et  $Y_n$  sont-elles indépendantes ?
- (c) Déterminer  $\text{Cov}(X_n, Y_n)$ .
5. Pour tout entier naturel  $n$ , on note maintenant  $U_n = ( a_n \ b_n \ c_n \ d_n )^T$ .
- (a) Déterminer une matrice  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$ .
- (b) On admet que  $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$ .  
En déduire que chaque valeur propre  $\lambda$  de  $M$  vérifie  $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$
- (c) Justifier que  $M$  est diagonalisable puis la diagonaliser.
- (d) Proposer alors une démarche (*sans détailler les calculs*) pour retrouver le résultat de la question 3.

On note  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité. (on pourra utiliser le changement de variable  $x = 2 \sin(u)$ )

On considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$ .

2. (a) Justifier pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , que  $X^n$  admet une espérance.  
 (b) Que vaut  $E(X^{2k+1})$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ?

Dans la suite on étudie  $U_k = E(X^{2k})$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

3. (a) Compléter le programme suivant permettant d'estimer les 10 premières valeurs de  $U_k$ .

```
import scipy.integrate as scipy
for k in range (11):
    def g(x):
        return
    print(scipy.quad(g, -2, 2))
```

*Indication : l'instruction `scipy.quad(g, -2, 2)` renvoie une valeur approchée de  $\int_{-2}^2 g(t) dt$ .*

- (b) Rappeler le théorème des sommes de Riemann et en déduire un autre programme permettant de réaliser les estimations précédentes.
4. (a) Montrer que la fonction  $g : x \mapsto x\sqrt{x}$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .  
 (b) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$U_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2} U_k$$

*Indication : Calculer  $4U_k - U_{k+1}$  en utilisant une intégration par parties.*

- (c) Ecrire un programme Python qui permet de vérifier que les 100 premiers termes  $U_k$  sont des entiers naturels. Donner à l'aide de ce programme les 6 derniers chiffres de  $U_{100}$

*On rappelle qu'en Python, `a//b` et `a%b` désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de `a` par `b`, et renvoient des entiers.*

- (d) Exprimer  $U_k$  en fonction de  $k$  avec des factoriels.  
 (e) En utilisant la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$  montrer que :

$$U_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}$$