

## Sujet 1

## Question de cours :

Loi de  $X$  suivant une loi normale centrée réduite.

-----

## Exercice préparé :

On s'intéresse dans cet exercice à la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 (1-t)^n \exp\left(\frac{-1}{t}\right) dt$$

1. Soit  $g$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $g(0) = 0$  et pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $g(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ .

- (a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et déterminer  $g'(0)$ .  
 (b) Montrer que, pour chaque entier  $n$ ,  $u_n$  est bien défini.

2. (a) Ecrire une fonction Python évaluant  $u_n$  par une méthode d'approximation d'intégrale.

(b) Rédiger une fonction prenant en entrée  $n$  et  $p$  et retournant la valeur de  $u_n \times n^p$ .

(c) A l'aide de la fonction précédente, émettre une conjecture sur la limite de  $(u_n \times n^p)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , pour différentes valeurs de  $p$  (on pourra se restreindre à  $p$  entre 1 et 10).

(Remarque : pour  $p = 10$ , il est nécessaire d'observer les termes de la suite autour de  $n = 2000$ ).

Cette conjecture sera étudiée la question 5).

3. On considère une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$  et on note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(f) = \int_0^1 f(t)(1-t)^n dt$$

(a) Justifier qu'il existe un réel  $M$  tel que :  $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$ .

(b) Grâce à l'inégalité triangulaire, montrer que :  $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(c) Montrer que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 f'(t)(1-t)^{n+1} dt$$

(d)  $n$  étant fixé dans  $\mathbb{N}$ , montrer que pour chaque entier naturel  $k$ ,

$$I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1) \cdots (n+k+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k+1)} I_{n+k+1}(f^{(k+1)})$$

(e) Montrer que pour chaque entier naturel  $k$ , il existe une suite  $(\varepsilon_{k,n})_n$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{k,n} = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(f) = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(n+1) \cdots (n+k+1)} + \frac{1}{n^{k+1}} \varepsilon_{k,n}$$

4. Déterminer un équivalent, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\int_0^1 t \sin(t)(1-t)^n dt$ .

5. On admet que la fonction  $g$  de la question 1) est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ .

Revenir sur la conjecture faite à la question 2)c).

## Sujet 2

### Question de cours :

Enoncé le théorème central limite.

-----

### Exercice préparé :

On note  $F$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\Psi$  l'application définie sur  $F$  par :

$$\forall y \in F, \quad \Psi(y) = y'' + 2y'$$

1. (a) Montrer que  $\Psi$  est un endomorphisme de  $F$ .
- (b) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + 2y' = 0$  ; en déduire une base du noyau de  $\Psi$ .
2. On s'intéresse au problème différentiel :

$$(E) : \begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = -te^{-t} & t \in [0, 5] \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

En posant  $z(t) = y'(t)$ , (E) peut s'écrire :

$$\text{sur}[0, 5], \quad \begin{cases} y'(t) = z(t) & y(0) = 0 \\ z'(t) = -2z(t) - te^{-t} & z(0) = 1 \end{cases}$$

- (a) Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement (E) avec la méthode d'Euler.
  - (b) Tracer la solution de la question précédente et la fonction  $t \mapsto te^{-t}$  dans le même repère.
  - (c) Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs propres de  $\Psi$  ?
  3. Déterminer les valeurs propres de  $\Psi$ .
  4. On note  $\mathcal{B}$  la famille  $(\exp, \cos, \sin)$  et  $G = \text{Vect}(\mathcal{B})$ .
    - (a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $G$ .
    - (b) Justifier qu'on peut définir un endomorphisme de  $G$  en posant  $\forall f \in G, \varphi(f) = \Psi(f)$
    - (c) Donner la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ .
    - (d) Justifier que  $\varphi$  n'est pas diagonalisable.
  5. Reprendre la matrice  $M$  précédente et diagonaliser  $M$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .
-