

Feuille_oraux_7 : Des questions sorties des oraux blancs

1. Déterminer la limite de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
2. Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
3. Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels distincts,
on note Φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 qui à P associe $\Phi(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), P(\lambda_3))$.
Montrer que Φ est un isomorphisme.
4. Définition de la covariance.
5. Soient p et q deux réels tels que $p + q = 1$.
On admet que, pour tout entier naturel n , Y_n est à valeurs dans \mathbb{N} et tout entier naturel non nul k ,

$$\mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = p\mathbb{P}(Y_{n+1} = k - 1) + q\mathbb{P}(Y_n = k - 1)$$

En déduire que, pour tout entier naturel n

$$\mathbb{E}(Y_{n+2}) = p\mathbb{E}(Y_{n+1}) + q\mathbb{E}(Y_n) + 1$$

6. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, j^3 et j^4 .
7. Définition de F^\perp .
8. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable?
Montrer que $\text{Sp}(A) = \{0; 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f .
- (b) La matrice A est-elle inversible?

9. Donner le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n .
10. Soit $p \in [0, 1]$. Justifier que $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$.

11. Soit $n \geq 2$, montrer que pour tout réel u de $[0, 1]$, on a :

$$(1 - u)^n \geq 1 - nu$$

12. Soient $a \in]0, 1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

13. Soit $x \in [0, 1[$

(a) Montrer que : pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

(b) En déduire que : $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$

(c) Par encadrement, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = 0$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

14. Définition de $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, où pour tout entier naturel n , A_n est une partie d'un ensemble E .

15. Résoudre $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n . On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application D par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad D(P) = P(X+1) - P(X)$$

- (a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Déterminer $D(1)$ puis $D(X^k)$ pour tout entier naturel k de $[[1, n]]$.
- (c) Donner la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (d) Déterminer le spectre de D . D est-il diagonalisable?

17. On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et que u_n est bien définie.

18. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note : $S_N = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq N+1} \binom{N+1}{2k+1}$ et $T_N = \sum_{0 \leq 2k \leq N+1} \binom{N+1}{2k}$

Calculer $S_N + T_N$ et $S_N - T_N$ et en déduire S_N et T_N .

19. On considère deux suites (b_n) et (r_n) vérifiant $r_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + b_n \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}r_n \quad r_n + b_n = 1$$

Exprimer r_n et b_n en fonction de n .

20. On note pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^1 e^{-(xu)^2} du$.

- (a) Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\forall x \neq 0 \quad F(x) = xG(x)$.
- (b) Montrer que G est continue sur \mathbb{R} .

21. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.