Exemples de couplages de l'oral de mathématiques de G2E.

Extraits des rapports 2025-2024-... de cette épreuve :

L'épreuve orale dure 40 minutes : 20 minutes de préparation, suivies de 20 minutes d'exposé devant l'examinateur (ces 20 minutes de préparation incluent l'installation du candidat, la vérification des documents, la vérification du portable..il est donc indispensable que le candidat ait déjà préparé ses documents et éteint son portable - ce qui est très rarement le cas).

Le jury est conscient que ce temps est très court : le candidat ne doit pas se sentir agressé s'il est interrompu - c'est tout simplement que l'oral est terminé.

Lorsque l'oral commence et qu'en même temps on installe le candidat suivant, **il faut vraiment que le candidat au tableau commence, sinon il perd du temps** pour son oral.
Trop souvent, les candidats attendent qu'on soit complètement disponible et perdent une ou deux minutes.
Le jury connait l'exercice donc inutile de relire le texte ou de rappeler les notations.
Le sujet comporte toujours deux exercices dont un portant sur les probabilités (le candidat peut commencer par l'exercice de son choix mais les deux exercices restent obligatoires).
Les sujets couvrent l'ensemble du programme de première année et de deuxième année : en particulier, les candidats doivent pouvoir prouver si une fonction est continue -ou dérivable-en un point donné.
(...)
Le jury conseille vivement aux candidats, pendant le temps de préparation, de consacrer le même temps de travail aux deux exercices plutôt que de s'acharner sur le premier et de n'avoir rien à dire sur le second. Le jury rappelle que les deux exercices sont obligatoires.
(...)
De manière générale, on peut aussi déplorer que le cours soit très mal appris (énoncé de théorèmes avec des hypothèses précises, définitions..).
(...)
Il s'agit d'un oral donc inutile de recopier l'énoncé au tableau ou de détailler excessivement ses réponses en les écrivant avec trop de détails. Enfin, il faut rappeler qu'un oral n'est pas une "colle" et qu'en aucun cas le jury n'a le temps d'expliquer au candidat comment il aurait dû faire-surtout en 20 minutes d'oral ! Le jury évalue, outre une bonne connaissance du cours, le réactivité et la vivacité du candidat.

Listes des compétences évaluées :

1) Engager une recherche, définir une stratégie.
2) Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique, en probabilités.
3) Représenter, changer de registre.
4) Raisonner, démontrer, argumenter.
5) Calculer, maîtriser le formalisme mathématique.
6) Communiquer à l'écrit et à l'oral.
7) Identifier un problème sous différents aspects.
8) Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes.
9) Critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Le but de l'examinateur n'est pas de troubler le candidat mais de vérifier ses connaissances et ses capacités d'initiative et de réaction lors d'un dialogue s'appuyant sur la résolution des deux exercices proposés.
Il faut souligner que les candidats l'ont bien compris et que, dans l'immense majorité des cas, l'oral se déroule sereinement dans une ambiance propice à l'atteinte des objectifs cités.
Si certains candidats n'ont pas atteint le niveau attendu à ce niveau de formation, le jury a aussi pu entendre d'excellentes prestations qui ont été justement récompensées.

Couplage 1.

Exercice 1.

On note pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad$ et $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-(xu)^2}\,du.$

1) Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\forall x \neq 0 \quad F(x) = x\,G(x)$.

2) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \neq 0, \quad G'(x) = \dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2}$, où $f(x) = e^{-x^2}$.

4) En déduire les variations de G.

Exercice 2.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad X_k(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } P(X_k = 1) = p, \text{ où } p \in]0,1[.$$

On note, pour n entier naturel non nul, $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ ainsi que $p_n = P(Y_n = 1)$

1) Donner la loi de Y_2 et la loi de Y_3.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$.

3) En déduire p_n en fonction de n.

– –

Couplage 2.

Exercice 1.

Soient x et y deux réels, on note M la matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur y et x pour que cette matrice soit inversible.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé . On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur cet espace probabilisé et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour tout ω de Ω on définit la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que cette matrice soit inversible ?

Exercice 2.

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence : $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2) Montrer que $\forall x \geqslant 0 \quad \sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

4) Montrer que $\dfrac{u_{n-1}}{n^2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puis que $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Couplage 3.

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f telle que $\begin{cases} f(x) = 0 & si \quad x < 0 \\ f(x) > 0 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$.

On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et on note F la fonction de répartition de X.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - F(x) > 0$.

2) On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x)\,\ln(1 - F(x))$.
Montrer que g est une fonction de densité. (*Indication : on pourra faire une intégration par parties.*)

3) *Cas particulier.*

Soit U suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$ et λ un réel strictement positif, on pose $Y = \dfrac{-\ln(U)}{\lambda}$.

Déterminer la loi de Y.
Y vérifie-t-elle les conditions énoncées dans le préambule de l'exercice ?

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n, on note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1 - X^2)^k X^{n-2k}$.

1) Montrer que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et déterminer P_2 et P_3.

2) Etudier, en fonction de la valeur de l'entier n, la parité du polynôme P_n.

3) Montrer que P_n est de degré n et donner son coefficient dominant.

Couplage 4.

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.

On pose $Z = \sup(X, Y)$.

1) Montrer que Z est à densité et donner sa fonction de densité g en fonction de la densité f et de la fonction de répartition Φ communes à X et Y.

2) Montrer que Z admet une espérance et la déterminer à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2.

On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ et $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

On considère l'application T de E dans $\mathbb{R}^n$ définie par $T(P) = (P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n))$.

1) Montrer que T est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On note L_i l'unique antécédent de e_i par T.
Donner $L_i(a_j)$, pour tout j dans $[\![1; n]\!]$.

3) En déduire $L_i(X)$.

4) Justifier que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base en fonction des $P(a_i)$.

Couplage 5.

Exercice 1

A tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on associe le polynôme $F(P)$ défini par $F(P) = Q$ où

$$Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$$

1) Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2) Pour k entier entre 1 et n, on pose $P_k = X^{n-k}$ et $Q_k = F(P_k)$ et $P_{n+1} = 0$.
Exprimer Q_k en fonction de P_k et P_{k+1}.

3) Donner la matrice de F relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

4) F est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Soit T une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ, a un réel, et $X = |T| + a$

1) Donner la fonction de répartition de X en fonction de Φ.

2) X est-elle à densité ? Si oui, en donner une densité .

3) X a-t-elle une espérance ? Si oui, la donner .

Couplage 6.

Exercice 1
On lance une pièce, la probabilité d'obtenir PILE est égale à p.
On lance plusieurs fois la pièce jusqu'à l'obtention du second PILE.
Soit X le nombre de FACE obtenus quand on a obtenu le second PILE.

1) Trouver la loi de X.

2) Calculer $E(X)$.

Exercice 2

On note pour n un entier naturel, $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

2) Exprimer I_n en fonction de n.

Couplage 7.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on note ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi(A) = A^T$.
Déterminer les éléments propres de ϕ.

Exercice 2
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = P(Y = n) = \frac{1}{4} \times \frac{1 + an}{n!}$$

1) Déterminez le réel a

2) Calculez l'espérance de X

3) Déterminez la loi de $S = X + Y$

Couplage 8.

Exercice 1
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
on pose $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$; on note $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$

1) Montrer que (f_1, f_2) est une base de F

2) soit ϕ l'application définie sur E par $\forall f \in E, \phi(f) = f'$ montrer que ϕ est un endomorphisme de F et donner la matrice M de cet endomorphisme dans la base (f_1, f_2).

3) calculer M^n en fonction de n.

Exercice 2

Un conducteur fait un raid de 12000 km dans le désert et prend trois roues de secours. Sachant que la probabilité de crever sur une portion de 100 km est de $0,02$, ce conducteur est-il trop prudent ?

– –

Couplage 9.

Exercice 1 Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(\exp(-|x|))$

1) Montrez que f est une densité de probabilité

2) Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f. Calculez $E(X)$.

3) Soit une variable aléatoire Y de même loi que X, on suppose que X et Y sont indépendantes. Donnez une densité de la variable $X + Y$

Exercice 2 Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

1) Ecrire f sous la forme d'une somme.

2) Calculez la somme de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p}$.

3) Calculez la somme de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{2n}{2p}$.

4) Calculez la somme de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p^2\binom{2n}{2p}$.

– –

Couplage 10.

Exercice 1 X_1 et X_2 sont 2 variables aléatoires indépendantes de fonctions de répartition F_1 et F_2.
On pose $S = \sup(X_1, X_2)$ et $I = \inf(X_1, X_2)$

1) donner les fonctions de répartition de S et de I. En déduire les fonctions de répartitions du sup et de l'inf de n variables aléatoires de fonction de répartition F_i.

2) appliquer le résultat précédent pour 2 variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectivement λ et μ.

Exercice 2 :
Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1) Montrer que $a_n \geqslant 0$ et déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \to +\infty$.

2) En déduire que la série $\sum a_n$ converge.

3) Pour $N \geqslant 1$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ à l'aide de $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et de $\ln(N+1)$.

– –

Couplage 11.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X) et $Z = X - \lfloor X \rfloor$ (partie fractionnaire de X).

1) Déterminer la loi de Y et reconnaître une loi usuelle. Calculer $E(Y)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$, calculer $P\big((Y = n) \cap (Z \leqslant t)\big)$.

3) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi de Z.

Exercice 2

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$

Résoudre (E) et déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

Indication : On cherchera une solution particulière polynomiale.

– –

Couplage 12.

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, .., X_n, \ldots.$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi exponentielle de paramètre λ. Soit $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots. X_n)$.

1) Déterminer $P(M_n > t)$. En déduire la loi de M_n. Donner son espérance et sa variance.

2) Deux candidats passant un oral de mathématiques entrent au même instant dans la salle de leurs jurys respectifs. La durée d'un tel oral est une variable aléatoire d'espérance 20 minutes, suivant une loi exponentielle.

a) En moyenne, au bout de combien de temps sortira le 1er candidat à avoir fini ?

b) En moyenne, au bout de combien de temps sortira le second candidat ?

Exercice 2

Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

1) Justifer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa parité.

2) Déterminer f'. Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f.

3) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0 .

4) Donner l'allure de C_f et tracer sa tangente en 0 .

Couplage 13.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1) Donner, sans le démontrer, la valeur de l'espérance de X et de Y.

2) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

a) Démontrer que $E(Z) = \sum_{k=1}^{n} P(Z \geqslant k)$.

b) En déduire $E(\min(X,Y))$, puis donner $E(\max(X,Y))$.

3) Deux personnes lancent un dé équilibré.

Quel est, en moyenne, l'écart entre les nombres obtenus ?

Exercice 2

Soit $u = (u_1, ..., u_n)$ un vecteur unitaire *(de norme 1)* et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour coefficients $u_i u_j$, où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Calculer $f(x) - \langle u|x\rangle u$. *($\langle u|x\rangle$ est le produit scalaire de u et x).*

b) Quelle est la nature de f.

c) En déduire le spectre de f.

Couplage 14.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

Un lycée possède trois classes appelées A, B, C, d'effectifs respectifs a, b, c.
On apprend à la fin de l'année que, sur l'ensemble du lycée, n élèves sont admis à l'Ecole Normale Transcendante.
On suppose $n \leqslant \min(a,b,c)$ et que cette école choisit au hasard les n élèves.
On appelle X (respectivement Y) le nombre d'admis de la classe A (respectivement la classe B).

1) Quelles lois les variables aléatoires réelles X et Y suivent-elles ?

2) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

3) Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Quelle loi suit la variable aléatoire réelle $X+Y$?

5) On suppose ici $a=b=c$. En calculant de deux manières $V(X+Y)$, calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient $f \circ g = g \circ f$.

1) Prouver que tout sous-espace propre de f est stable par g.

2) On suppose de plus que E est de dimension n et que f possède n valeurs propres distinctes. Prouver qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g.

3) Déterminer toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 = M$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

on pourra commencer par déterminer les éléments propres de M.

Couplage 15.

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Justifier que A et B sont diagonalisables.

2) Diagonaliser A. En déduire la diagonalisation de B.

3) Calculer B^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2

Lorsque X est une variable aléatoire discrète prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$,
on définit la fonction génératrice de X $g_X : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0,1], \quad g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k.$$

1) Justifier que g_X est bien définie sur $[0,1]$, puis calculer $g_X(1)$.

2) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Jusqu'à la fin de l'exercice X est une variable finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

3) Prouver que g_X est de classe C^∞ sur $[0,1]$, exprimer l'espérance de X en fonction de g_X' puis donner une relation entre $V(X), g_X''(1), g_X'(1)$.

4) Déterminer la fonction génératrice de X lorsque X suit une loi binomiale. Retrouver alors les formules d'espérance et de variance d'une variable binomiale.

– –

Couplage 16.

Exercice 1

Soit k un entier supérieur ou égal à 3 . Des électrons, au nombre de k, arrivent à des instants aléatoires sur une plaque de détection. L'instant d'impact de chaque électron suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et est indépendant des autres électrons. On note V_k la variable aléatoire correspondant au temps du premier électron détecté, W_k celle qui représente le temps du dernier.

1) Donner la loi de V_k et son espérance.

2) Déterminer la loi de W_k et sa variance.

3) Pour $x \in]0,1[$, on note Z_x le nombre d'électrons arrivés avant l'instant x. Déterminer la loi de Z_x.

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$g(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

L'objectif de l'exercice est de prouver que g n'a aucun extremum local sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

1) Donner les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$$

puis résoudre l'équation $f(t) = 0$.

2) Calculer les dérivées partielles de g et montrer que g a un unique point critique qui est $A(e,e)$.

3) En étudiant $x \mapsto g(x,e)$ et $x \mapsto g(e,x)$, démontrer que g n'a pas d'extremum local en ce point A. Conclure.

Couplage 17.

Exercice 1

On fixe deux réels strictement positifs u_0 et v_0 puis on définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ en posant pour $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_n + v_n\right] \quad ; \quad \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right].$$

1) Montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

2) *Nous allons prouver que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.*

a) Démontrer par récurrence que $0 < v_n \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

c) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ puis conclure.

3) Calculer la limite commune de ces deux suites.

Exercice 2

Soient p dans $]0,1[$ (on note $q = 1-p$), n un entier strictement supérieur à 2 , X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, $Y(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$ et pour tout (j,k) de $[\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!]$:

$$P((X=j)\cap(Y=k)) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad \text{si } j=k,$$

$$P((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{q^n}{n} \qquad \text{si } j=0,$$

$$P((X=j)\cap(Y=k)) = 0 \qquad \text{sinon.}$$

1) Déterminer les lois marginales : la loi de X et celle de Y.

2) Calculer l'espérance de Y.

3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

– –

Couplage 18.

Exercice 1

On étudie un composant électronique qui peut tomber et retomber en panne plusieurs fois.
Soit $\lambda > 0$.
Pour $t > 0$ on note N_t le nombre de fois que le composant tombe en panne entre l'instant 0 et l'instant t et on suppose que la variable aléatoire N_t suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda t)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*, T_n$ désigne le temps d'attente pour que survienne la n-ième panne du composant.

1) Comparer les événements $[T_1 > t]$ et $[N_t = 0]$. En déduire la loi suivie par T_1.

2) Écrire $P(T_n > t)$ sous forme de somme.

3) Montrer que T_n est une variable à densité puis donner une expression simple d'une densité de T_n.

4) Calculer $E(T_n)$.

Exercice 2

Considérons la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $f : x \mapsto x - x^2$

1) Démontrer que f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle à déterminer.

2) On note $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$x_0 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad x_n - x_n^2 = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n \leqslant 0$$

Justifier que la suite (x_n) est bien définie.
Calculer x_1, puis prouver que la suite $(x_n)_n$ est croissante et converge vers 0 .

3) On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1+u_n)$.
Prouver la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$.
La série $\sum v_n$ est-elle convergente ?

Couplage 19.

Exercice 1

On considère deux variables aléatoires U et V indépendantes qui suivent une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1) Montrer que U^2 et V^2 admettent une densité et la calculer.

2) Prouver que $Z = U^2 + V^2$ est une variable à densité et que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_Z(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t.$$

3) Calculer cette intégrale (on pourra pour $x \neq 0$ faire le changement de variable $t = x\sin^2(u)$).

4) Calculer $P(Z \leqslant 1)$ en utilisant la densité obtenue précédemment
Interpréter cette probabilité en terme d'aire.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ derivables qui vérifient :

$$\text{(E)} \ : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1) Soit f une solution de (E), on définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(t) = f\left(e^t\right)$.
Prouver que g est solution de l'équation differentielle : $(E_1) \quad g'' - g' + g = 0$

2) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3) En déduire toutes les fonctions f vérifiant (E).

Couplage 20.

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer qu'un complexe λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $\frac{1}{8} - \lambda^2 + \lambda^3 = 0$.

2) Sachant que $\frac{1}{2}$ est une valeur propre de A, montrer qu'il existe deux valeurs propres (a et b) différentes de $\frac{1}{2}$ et telles que : $a + b = \frac{1}{2}$ et $ab = -\frac{1}{4}$.

3) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Une urne contient des boules noires (notées N) et des boules blanches (notées B) avec une proportion $p \in]0,1[$ de boules noires. On note $q = 1 - p$.

On réalise dans cette urne des tirages successifs avec remise.

On note X la longueur de la première suite de boules de la même couleur et Y la longueur de la deuxième. Ainsi par exemple, l'événement $[(X,Y) = (2,3)]$ est réalisé par une suite de tirages qui commence par $N, N, B, B, B, N, \ldots$. ou par $B, B, N, N, N, B, \ldots$

1) Montrer que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad P(X = i, Y = j) = q^{i+1}p^j + p^{i+1}q^j$

2) Donner la loi de X, puis celle de Y.

3) Donner les trois lois précédentes *(la loi conjointe et les deux lois marginales)* quand $p = \frac{1}{2}$

4) Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $p = \frac{1}{2}$.

Couplage 21.

Exercice 1

Soient N un entier supérieur ou égal à 3 et n un entier de $[\![2, N-1]\!]$.
On dispose d'une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement n boules sans remise.
On note X la variable aléatoire correspondant au plus grand numéro tiré et Y celle qui représente le plus petit numéro obtenu.

1) Prouver que $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$ et que pour tout k de $[\![n, N]\!]$: $P(X = k) = \dfrac{n(k-1)!(N-n)!}{N!(k-n)!}$

2) Déterminer la loi de Y.

3) Montrer que $\forall p \leqslant n, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

4) Calculer l'espérance de X puis, en comparant les lois de Y et de $N - X + 1$, donner l'espérance de Y.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 , la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est sa norme euclidienne, et f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que f conserve la norme, c'est-à-dire : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(u)\| = \|u\|$.
On dit aussi que f est une isométrie.

1) Montrer que pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$: $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$

En déduire que f conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

2) Prouver que les valeurs propres réelles de f sont incluses dans $\{-1, 1\}$.
L'application f est-elle bijective ?

3) Déterminer le(s) réel(s) α pour que $f : (x, y, z) \mapsto \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \alpha z, -y, \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)$ soit une isométrie.

Couplage 22.

Exercice 1

On considère Z une variable normale centrée réduite, ainsi qu'une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes et identiquement distribuées, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\{-1,1\}).$$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad ; \quad G_n : t \mapsto G_n(t) = E\left(e^{\frac{tS_n}{\sqrt{n}}}\right).$$

1) Pour tout réel t fixé, prouver que : $E\left(e^{tZ}\right) = e^{\frac{t^2}{2}}$

2) Donner l'espérance et la variance de S_n.

3) Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right)^n$, puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(t) = E\left(e^{tZ}\right)$.

Exercice 2

Pour n un entier supérieur ou égal à 2 , on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\|a\| = \|b\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle a, b\rangle = 0.$$

On définit l'application f sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a.$$

1) Pour cette question uniquement, $n = 2$.
Écrire la matrice associée à f dans une base bien choisie, en déduire le noyau de f, son image, et ses valeurs propres réelles.

Dorénavant $n \geqslant 3$. On souhaite déterminer les valeurs propres réelles de f.

2) Déterminer le rang et l'image de f, justifier que 0 est une valeur propre de f puis déterminer le sous-espace propre $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$.

3) Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle λ.
Prouver que $x \in \mathrm{Vect}(a, b)$, puis que $\lambda^2 = -1$. Conclure.

Couplage 23.

Exercice 1

Un jardinier possède n graines d'une plante rare. Il plante une graine et attend de voir si elle germe, sinon il en plante une autre et ainsi de suite. Chaque graine a une même probabilité p $(0 < p < 1)$ de germer.

1) Quelle est la probabilité p_1 que le jardinier observe une plante qui germe ?

2) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité p_2 qu'il ait planté exactement k graines ?

3) Quelle est la probabilité p_3 qu'il ait planté exactement k graines sachant qu'une graine a germé ?

4) Quel est le nombre moyen de graines qu'il va planter ?

Exercice 2

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \int_0^x (x-t) f(2t)\,\mathrm{d}t \ + \ 1 \qquad (1)$$

1) Montrer que si f est solution du problème, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) En déduire que f est alors solution d'une équation différentielle du second ordre.

3) En déduire les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (1).

Couplage 24.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Pour tout réel $x \geqslant 0$ on pose $q(x) = \mathbb{P}(x \leqslant X \leqslant 2x)$

1) Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \quad q(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

2) Montrer que q est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée q'.

3) Montrer que q admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$ et préciser l'antécédent de ce maximum.

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = k^k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

1) Montrer que (S_n) est croissante.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = S_n - n^n$.
Montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant w_n \leqslant (n-2)^{n-1} + (n-1)^{n-1}$

3) Déterminer la limite de $\dfrac{w_n}{n^n}$.

4) En déduire un équivalent de S_n.

Couplage 25.

Exercice 1

Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules dont une proportion p de boules rouges. On tire au hasard une boule dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro tiré. On tire ensuite autant de boules dans l'urne U_2 (avec remise) que le numéro obtenu pour X. On note Y le nombre total de boules rouges obtenues.

1) Donner la loi de X et son espérance.

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de Y sachant $\{X = i\}$.

3) Donner une expression de la loi de Y à l'aide d'un symbole somme.
En déduire l'espérance de Y.

4) Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} J_n$. *On pourra utiliser l'inégalité de convexité :* $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

b) En déduire la limite de I_n

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} I_n$

b) Expliciter I_n en fonction de n.

Couplage 26.

Exercice 1

On pêche des crevettes. On note N la variable aléatoire égale au nombre de crevettes pêchées. Chaque crevette, indépendamment, a la probabilité 1/2 d'être comestible.

1) Dans cette question on suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Calculer la probabilité que toutes les crevettes pêchées soient comestibles.

b) Calculer la probabilité qu'exactement une des crevettes pêchées soit non comestible.

2) Mêmes questions si on suppose que N suit la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0; 1[$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

2) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$. Montrer à l'aide d'une majoration simple que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3) En déduire la limite de S_n quand $n \to \infty$.

Couplage 27.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On souhaite montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'aucun endomorphisme f de E ne vérifie $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = -\mathrm{id}_E$, et u un vecteur de E non nul.
Montrer que $(\ u, f(u)\ )$ est une famille libre.

2) Justifier alors l'existence d'un vecteur $v \in E$ tel que $(u, f(u), v)$ soit une base de E.

3) Soit α, β, γ les coordonnées de $f(\nu)$ dans cette base, de sorte que $f(\nu) = \alpha u + \beta f(u) + \gamma \nu$. Calculer $f(f(\nu))$ puis trouver une contradiction. Conclure.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité, et tracer l'allure du graphe de f.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f.
Montrer X possède une espérance et donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

3) Calculer la variance de X.

4) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Montrer que

$$\mathbb{P}\left(|M_n| \geq 1\right) \leq \frac{2}{n}$$

Couplage 28.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul, et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P - (X+1)P' \end{array}$$

1) Vérifier que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.φ est-elle diagonalisable ?

3) Déterminer le noyau de φ.

4) Justifier que φ n'est pas surjective, puis donner un exemple de vecteur P n'ayant pas d'antécédent par φ.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

1) Justifier que X est une variable aléatoire à densité et donner une densité f de X.

2) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Montrer que u réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty; +\infty[$ vers $]-1; 1[$,

3) Montrer que la variable aléatoire $Y = u(X)$ suit la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Couplage 29.

Exercice 1

Soit $p \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ le projecteur orthogonal sur le plan P d'équation $x - y + 2z = 0$.

1) Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (-1,1,1)$ sont orthogonaux et forment une base de P.

2) En déduire une base orthonormée de P.

3) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le vecteur $p(u)$.
En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4) Déterminer la distance du vecteur $(1,1,1)$ au plan P.

Exercice 2

Rappel. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes possédant des densités f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}$, alors $X_1 + X_2$ a pour densité la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1(t) f_2(x-t)\mathrm{d}t$.
Soit X une variable aléatoire réelle de densité f donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Dessiner le graphe de f.

2) Calculer l'espérance et la variance de X.

3) On pose $Y = -\ln(X)$. Déterminer la loi de Y.

4) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On pose $S = X_1 + X_2$. Donner une densité de S.

Couplage 30.

Exercice 1

Soit $\lambda > 0$ et $p \in \,]0,1[$. On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ vérifiant $Y \leqslant X$ et tel que, pour tout couple (n,k) d'entiers vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P\big((X=n)\cap(Y=k)\big) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

1) Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

2) Déterminer la loi de X et reconnaître une loi usuelle.

3) Déterminer la loi de Y (on reconnaîtra également une loi usuelle).

4) On pose $Z = X - Y$. Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

3) En déduire la limite de (I_n), puis un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Couplage 31.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer le réel c pour que f soit une densité de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3) La variable X admet-elle une variance ? Justifier.

4) Déterminer la loi de la variable $Y = \ln(X)$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. On note J la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1) Exprimer A à l'aide de I_3 et de J. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit inversible.

3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Couplage 32.

Exercice 1

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $S = U + V$.

1) À l'aide du produit de convolution, montrer que S est une variable à densité et en déterminer une densité.

2) En déduire la fonction de répartition de S.

3) Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

4) On pose $M = \max(U, V)$. Déterminer la fonction de répartition de M, puis en déduire une densité de M.

Exercice 2

Soit $u_0 \in]0, 1[$ et (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1[$, puis que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{u_n} + 1$, et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{u_0}{1 + n\, u_0}$.

3) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge et déterminer sa somme.

Couplage 33.

Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$. On range au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n cases numérotées de 1 à n, à raison d'une boule par case ; le rangement correspond donc à une permutation σ choisie uniformément parmi les $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$. On dit qu'il y a un *point fixe* en i lorsque $\sigma(i) = i$, et on note X le nombre de points fixes.

1) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_i = \mathbb{1}_{(\sigma(i)=i)}$. Donner la loi de X_i.

2) Calculer $E(X)$.

3) Pour $i \neq j$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$. En déduire $V(X)$.

Exercice 2

1) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ converge et donner sa valeur.

2) À l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{2}$, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

3) Justifier la convergence, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,dt$.

4) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt$, puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

Couplage 34.

Exercice 1

1) Diagonaliser si possible les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Donner, M^n, $n \in \mathbb{N}$, la puissance $n$ième de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

1) Prouver que Z^2 est une variable aléatoire de densité $f_{Z^2} : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)$.

2) Déterminer l'espérance de Z^2.

3) On considère la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{d}t$.

On admet que h est correctement définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Prouver que h est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On notera C cette constante. On pourra utiliser le changement de variable $t = xu$.

4) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

On rappelle que, si deux variables aléatoires réelles U_1 et U_2 sont indépendantes de densité respectives f_{U_1} et f_{U_2}, alors $U_1 + U_2$ est une variable aléatoire de densité

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_{U_1}(x-t) f_{U_2}(t) \mathrm{d}t$$

Déterminer en fonction de C la loi de $Z_1^2 + Z_2^2$.

Couplage 35.

Exercice 1.

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\dfrac{\lambda}{n} \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

1) Donner $E(X_n)$ et $V(X_n)$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n)$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

3) En déduire la loi vers laquelle (X_n) converge en loi. Interpréter.

Exercice 2.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1) Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

2) Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

3) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et, en cas de convergence, calculer sa somme.

Couplage 36.

Exercice 1.

On lance deux dés équilibrés à six faces, discernables ; on note D_1 et D_2 les deux résultats, puis $X = \min(D_1, D_2)$ et $Y = \max(D_1, D_2)$.

1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

2) En déduire les lois marginales de X et de Y.

3) Justifier que $X + Y = D_1 + D_2$ et $XY = D_1 D_2$. En déduire $E(XY)$.

4) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

Soit $n \geqslant 2$ et $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1) Vérifier que 1 est racine de P.

2) Calculer P' et montrer que $P' = n(n+1)\,X^{n-1}(X-1)$.

3) En déduire la multiplicité exacte de la racine 1 de P.

Couplage 37.

Exercice 1.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S = X_1 + X_2$.

1) Rappeler une densité de X_1.

2) À l'aide du produit de convolution, montrer que S est à densité et déterminer une densité f_S de S.

3) Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

4) Déterminer le point où f_S atteint son maximum.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle autonome (E) : $y' = y(1-y)$ et l'on cherche la solution y vérifiant $y(0) = y_0$, avec $y_0 \in]0,1[$.

1) Vérifier que les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont solutions de (E).

2) On admet que la solution cherchée reste à valeurs dans $]0,1[$. Résoudre (E) (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$, ou décomposer $\dfrac{1}{y(1-y)}$).

3) Étudier les variations de y et déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Donner l'allure de la courbe.

– –

Couplage 38.

Exercice 1.

On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si le k-ième lancer donne PILE et 0 sinon ; ainsi X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On pose $F_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ (fréquence d'apparition de PILE).

1) Donner $E(F_n)$ et $V(F_n)$.

2) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P\left(\left|F_n - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \dfrac{1}{10}\right)$.

3) Déterminer un entier n à partir duquel cette probabilité est inférieure à 0,05.

4) Énoncer ce qu'affirme la loi faible des grands nombres pour la suite (F_n).

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

1) Justifier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Calculer I_0, puis montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)\, I_n$.

3) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

– –

Couplage 39.

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X^2$. On note Φ sa fonction de répartition et φ sa densité.

1) Déterminer la fonction de répartition de Y, puis montrer que Y est à densité et en donner une densité.

2) Calculer $E(Y)$.

3) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $E(X^4) = 3$. En déduire $V(Y)$.

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le rang de A. En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

3) Justifier que A est diagonalisable, puis déterminer ses valeurs propres.

Couplage 40.

Exercice 1.

Soit $(X_0, \ldots, X_{p-1})$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k X_k.$$

1) a) Calculer l'espérance de S_p.

b) Trouver une relation entre S_{p+1} et S_p, puis montrer par récurrence que S_p prend ses valeurs dans $[\![0, 2^p - 1]\!]$.

2) On souhaite montrer que S_p suit la loi uniforme sur $[\![0, 2^p - 1]\!]$.

a) Vérifier que c'est vrai pour $p = 1$.

b) Établir l'hérédité en utilisant le système complet d'événements $\big\{(X_p = 0)\,,\ (X_p = 1)\big\}$.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. On considère le plan

$$\mathcal{P} :\ x + 2y - z = 0,$$

ainsi que les deux vecteurs $\vec{e_1} = (1,0,1)$ et $\vec{e_2} = (-1,1,1)$.

1) a) Montrer que $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ et que $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ appartiennent à $\mathcal{P}$.

b) Déterminer un vecteur $\vec{e_3}$ orthogonal à $\mathcal{P}$, puis en déduire que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

est orthogonale (c'est-à-dire que son inverse est égale à sa transposée).

2) Calculer la distance au plan $\mathcal{P}$ de chacun des vecteurs colonnes de la matrice P.

Couplage 41.

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, soit I la matrice identité d'ordre 3, et l'on pose $J = A - I$.

1) a) Montrer par récurrence qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + u_n\, J$.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

2) Calculer le rang de A. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 2.

Une machine est constituée de n composants (avec $n \geqslant 1$). Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement du i-ème composant (l'instant où il tombe en panne). On suppose les variables $T_1, \ldots, T_n$ indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $t \geqslant 0$, on note N_t le nombre de composants en panne à l'instant t.

1) Déterminer la loi de N_t, puis justifier que $E(N_t) = n\,(1 - e^{-\lambda t})$.

2) Déterminer le réel $t_0 \geqslant 0$ à partir duquel $E(N_t)$ est supérieure ou égale à la moitié du nombre de composants.

3) On note S la variable aléatoire égale à l'instant où le premier composant tombe en panne. Déterminer la fonction de répartition de S, puis justifier que S est à densité.