

Par manque de temps cette correction a été dans un premier temps écrite par le modèle Opus 4.8 de Claude, puis a été relue et corrigée par votre professeur. Elle ne respecte pas la rédaction rigoureuse travaillée toute l'année en préparation des écrits.

Gala-Anne GUINAUDEAU

Couplage 11.

Exercice 1

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(Y = n)$ est $(n \leq X < n + 1)$, donc

$$P(Y = n) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}).$$

Posons $q = e^{-\lambda} \in]0, 1[$ et $p = 1 - q = 1 - e^{-\lambda}$. Alors $P(Y = n) = p q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on reconnaît une **loi géométrique décalée**, c'est-à-dire que Y prend ses valeurs dans \mathbb{N} et que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - e^{-\lambda}$.

On en déduit

$$E(Y) = E(Y + 1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^\lambda - 1}.$$

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$. Sur l'événement $(Y = n) = (n \leq X < n + 1)$, on a $Z = X - n$, donc $(Z \leq t) = (X \leq n + t)$. Comme $t < 1$, on a $n + t < n + 1$, d'où

$$P((Y = n) \cap (Z \leq t)) = P(n \leq X \leq n + t) = \int_n^{n+t} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda t}).$$

- 3) **Loi de Z .** Pour $t \in [0, 1[$, la famille $((Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements,

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y = n) \cap (Z \leq t)) = (1 - e^{-\lambda t}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

De plus $F_Z(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F_Z(t) = 1$ pour $t \geq 1$. La fonction F_Z est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux : Z est à densité, de densité

$$f_Z(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} \mathbf{1}_{[0,1[}(t).$$

Indépendance. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1[$,

$$P(Y = n)P(Z \leq t) = p q^n \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda t}) = P((Y = n) \cap (Z \leq t)).$$

Les événements $(Y = n)$ et $(Z \leq t)$ étant indépendants pour tous n et t , les variables Y et Z sont **indépendantes**.

Exercice 2

Équation homogène. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$ et pour racines $r = 1 + i$ et $\bar{r} = 1 - i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^x (A \cos x + B \sin x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution particulière. On cherche $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Alors

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) = 2ax^2 + (2b - 4a)x + (2a - 2b + 2c).$$

L'identification avec $2x^2$ donne $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, soit $y_p = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

Solution générale et conditions initiales. On a $y(x) = e^x (A \cos x + B \sin x) + (x + 1)^2$. La condition $f(0) = 1$ donne $A + 1 = 1$, soit $A = 0$. Puis

$$y'(x) = e^x [(A + B) \cos x + (B - A) \sin x] + 2(x + 1),$$

donc $f'(0) = A + B + 2 = 3$ donne $B = 1$ (avec $A = 0$). Finalement :

$$f(x) = e^x \sin x + (x + 1)^2$$

Couplage 12.

Exercice 1

- 1) Pour $t \geq 0$, les variables X_1, \dots, X_n étant indépendantes,

$$P(M_n > t) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > t)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t},$$

et $P(M_n > t) = 1$ pour $t < 0$. Ainsi $F_{M_n}(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$ pour $t \geq 0$ (et 0 sinon) : on reconnaît $M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$. Par conséquent

$$E(M_n) = \frac{1}{n\lambda}, \quad V(M_n) = \frac{1}{(n\lambda)^2} = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

- 2) La durée X_i d'un oral suit $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = 20$, soit $\lambda = \frac{1}{20}$.

a) Le premier candidat à finir sort à l'instant $\min(X_1, X_2) \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$, d'espérance $\frac{1}{2\lambda} = 10$ minutes.

b) Le second sort à l'instant $\max(X_1, X_2)$. Comme $\max + \min = X_1 + X_2$,

$$E(\max) = E(X_1) + E(X_2) - E(\min) = 20 + 20 - 10 = 30 \text{ minutes.}$$

Exercice 2

- 1) L'application $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est continue sur \mathbb{R} ; donc $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ est bien définie et de classe C^1 (et même C^∞) sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = e^{-x^2/2}$ (théorème fondamental de l'analyse). **Parité** : par le changement de variable $u = -t$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2/2} dt = - \int_0^x e^{-u^2/2} du = -f(x),$$

donc f est **impair**.

- 2) $f'(x) = e^{-x^2/2}$, d'où $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. La tangente en 0 a pour équation $\boxed{y = x}$.
- 3) Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g'(x) = e^{-x^2/2} - 1$. Pour $x \neq 0$, $-x^2/2 < 0$ donc $e^{-x^2/2} < 1$ et $g'(x) < 0$; et $g'(0) = 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur \mathbb{R} , avec $g(0) = 0$. On en déduit :
 — pour $x > 0$: $g(x) < 0$, i.e. $f(x) < x$: C_f est *sous* sa tangente ;
 — pour $x < 0$: $g(x) > 0$, i.e. $f(x) > x$: C_f est *au-dessus* de sa tangente.
 La tangente traverse C_f en 0 : l'origine est un point d'inflexion.
- 4) f est impaire, strictement croissante ($f' > 0$), avec

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Allure : courbe en « S » croissante, symétrique par rapport à l'origine, de point d'inflexion O , comprise entre les asymptotes horizontales $y = \sqrt{\pi/2}$ et $y = -\sqrt{\pi/2}$, et de tangente $y = x$ en O (située au-dessus de C_f pour $x > 0$, en dessous pour $x < 0$).

Couplage 15.

Exercice 1

1) A et B sont des matrices **symétriques réelles**, donc diagonalisables (en base orthonormée) d'après le théorème spectral.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{sp}(A) = \{0, 2\}$.

— $E_0(A) = \text{Ker}A$: l'équation $x + y = 0$ donne la droite dirigée par $\vec{u} = (1, -1)$.

— $E_2(A) : (A - 2I)v = 0$ donne $x = y$, droite dirigée par $\vec{v} = (1, 1)$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \Delta$.

Lien avec B : $B = 4I - A = 4I - P\Delta P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = D$.

3) Comme $B = PDP^{-1}$, on a $B^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Or $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$B^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 2^n - 4^n \\ 2^n - 4^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) Pour $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq P(X = k)t^k \leq P(X = k)$, et $\sum_k P(X = k) = 1$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série définissant $g_X(t)$ converge (absolument) ; g_X est donc bien définie sur $[0, 1]$. De plus

$$g_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (valeurs dans \mathbb{N}^* , $P(X = k) = q^{k-1}p$ avec $q = 1 - p$) :

$$g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p t^k = pt \sum_{k=1}^{+\infty} (qt)^{k-1} = \frac{pt}{1 - qt}, \quad t \in [0, 1]$$

(la série géométrique converge car $qt \leq q < 1$).

3) X étant à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $g_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k$ est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

On dérive :

$$g'_X(t) = \sum_{k=1}^n k P(X = k)t^{k-1} \implies g'_X(1) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = E(X).$$

$$g''_X(t) = \sum_{k=2}^n k(k-1)P(X = k)t^{k-2} \implies g''_X(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X).$$

On en déduit la relation

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.$$

4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, par la formule du binôme :

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1-p + pt)^n.$$

Alors $g'_X(t) = np(1-p + pt)^{n-1}$ donne $E(X) = g'_X(1) = np$, et $g''_X(t) = n(n-1)p^2(1-p + pt)^{n-2}$ donne $g''_X(1) = n(n-1)p^2$. D'où

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p).$$

On retrouve bien $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Couplage 34.

Exercice 1

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire, $\text{sp}(A) = \{1\}$. Or $E_1(A) = \text{Ker}(A - I)$: l'équation $y = 0$ donne une droite, donc $\dim E_1 = 1 < 2$. A n'est pas diagonalisable.

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$: $\det(B - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Deux valeurs propres distinctes : B est diagonalisable.

— E_2 : $(B - 2I)v = 0$ donne $y = 2x$, vecteur $(1, 2)$;

— E_{-1} : $(B + I)v = 0$ donne $x = y$, vecteur $(1, 1)$.

Avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 2) M est diagonale par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donc $M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$.

Bloc A : $A = I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$, donc $A^n = I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bloc B : $B^n = Q \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (car $\det Q = -1$), soit

$$B^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(-1)^n - 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 0 & 0 & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

- 1) Pour $t \leq 0$, $(Z^2 \leq t) = \emptyset$ donc $F_{Z^2}(t) = 0$. Pour $t > 0$:

$$F_{Z^2}(t) = P(Z^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq Z \leq \sqrt{t}) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1.$$

F_{Z^2} est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} : Z^2 est à densité, et pour $t > 0$,

$$f_{Z^2}(t) = \frac{d}{dt}(2\Phi(\sqrt{t})) = 2\varphi(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\varphi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2},$$

car $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$. D'où $f_{Z^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)$.

- 2) $E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = 1 + 0 = 1$.

- 3) Changement de variable $t = xu$ ($x > 0$ fixé), $dt = x du$, u allant de 0 à 1. Comme $t(x - t) = xu \cdot x(1 - u) = x^2 u(1 - u)$,

$$h(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \int_0^1 \frac{x du}{x\sqrt{u(1-u)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = C,$$

indépendant de x . Donc h est constante sur \mathbb{R}^{+*} . (On peut calculer $C = \pi$ via $u = \sin^2 \theta$, mais ce n'est pas demandé.)

- 4) Z_1^2 et Z_2^2 sont indépendantes, de même densité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbf{1}_{t>0}$. Une densité de $Z_1^2 + Z_2^2$ est, pour $x > 0$ (le support impose $0 < s < x$),

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)f(s) ds = \int_0^x \frac{e^{-(x-s)/2}}{\sqrt{2\pi(x-s)}} \cdot \frac{e^{-s/2}}{\sqrt{2\pi s}} ds = \frac{e^{-x/2}}{2\pi} \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{s(x-s)}} = \frac{C}{2\pi} e^{-x/2},$$

et $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Donc $Z_1^2 + Z_2^2$ admet la densité $\frac{C}{2\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$. La condition $\int_0^{+\infty} g = 1$ impose $\frac{C}{2\pi} \times 2 = 1$, soit $C = \pi$, et alors

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \mathbb{1}_{x>0} \quad : \quad Z_1^2 + Z_2^2 \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$$

(loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, c'est le χ^2 à 2 degrés de liberté).

Melvin FANTIN

Couplage 39.

Exercice 1.

1) Pour $t \leq 0$, $F_Y(t) = 0$. Pour $t > 0$, comme ci-dessus,

$$F_Y(t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1,$$

et $Y = X^2$ est à densité

$$f_Y(t) = \frac{\varphi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t).$$

2) $E(Y) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$.

3) Intégration par parties sur $\int_{\mathbb{R}} x^4 \varphi(x) dx$: on pose $u(x) = x^3$ et $v'(x) = x e^{-x^2/2}$, soit $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = -e^{-x^2/2}$. Alors (*Rédaction à revoir*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx = \underbrace{\left[-x^3 e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx.$$

En divisant par $\sqrt{2\pi}$: $E(X^4) = 3E(X^2) = 3 \times 1 = 3$. On en déduit

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(X^4) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Exercice 2.

1) Les lignes (et colonnes) de A sont proportionnelles à $(1, 2, 3)$ (ligne 2 = $2 \times$ ligne 1, ligne 3 = $3 \times$ ligne 1) : $\text{rg} A = 1$. Par le théorème du rang, $\dim \text{Im} f = \text{rg} A = 1$ et $\dim \text{Ker} f = 3 - 1 = 2$.

2) $\text{Im} f = \text{Vect}((1, 2, 3))$, dont une base est $((1, 2, 3))$.

$\text{Ker} f = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 0\}$ (une seule équation indépendante) : une base est $((2, -1, 0), (3, 0, -1))$ (deux vecteurs non colinéaires de ce plan).

3) A est symétrique réelle, donc **diagonalisable**. Elle est de rang 1, donc 0 est valeur propre d'espace propre $\text{Ker} f$ de dimension 2; la dernière valeur propre μ vérifie $0 + 0 + \mu = \text{tr}(A) = 1 + 4 + 9 = 14$ (*hors programme*). Ainsi

$$\text{sp}(A) = \{0, 14\}$$

Mathis LOEFFLER

Couplage 40.

Exercice 1.

1) a) $E(S_p) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k E(X_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = \frac{1}{2} (2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2}$.

b) On a $S_{p+1} = \sum_{k=0}^p 2^k X_k = S_p + 2^p X_p$.

Récurrance sur p pour la propriété « $S_p \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ » :

- $p = 1 : S_1 = X_0 \in \{0, 1\} = \llbracket 0, 1 \rrbracket$.
- Hérité : si $S_p \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$, alors selon $X_p \in \{0, 1\}$, $S_{p+1} = S_p$ ou $S_p + 2^p$, donc

$$S_{p+1} \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket \cup \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket = \llbracket 0, 2^{p+1} - 1 \rrbracket.$$

2) a) $P(S_1 = 0) = P(X_0 = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(S_1 = 1) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{2} : S_1$ est uniforme sur $\llbracket 0, 1 \rrbracket$.

b) La variable X_p est indépendante de S_p (qui ne dépend que de X_0, \dots, X_{p-1}). Avec le système complet $\{(X_p = 0), (X_p = 1)\}$, pour $m \in \llbracket 0, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(S_{p+1} = m) &= P(S_p = m)P(X_p = 0) + P(S_p = m - 2^p)P(X_p = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(S_p = m) + \frac{1}{2}P(S_p = m - 2^p). \end{aligned}$$

— Si $m \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket : P(S_p = m) = \frac{1}{2^p}$ et $P(S_p = m - 2^p) = 0$, donc $P(S_{p+1} = m) = \frac{1}{2^{p+1}}$.

— Si $m \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} - 1 \rrbracket : P(S_p = m) = 0$ et $P(S_p = m - 2^p) = \frac{1}{2^p}$, donc $P(S_{p+1} = m) = \frac{1}{2^{p+1}}$.

Dans tous les cas $P(S_{p+1} = m) = \frac{1}{2^{p+1}} : S_{p+1}$ est uniforme sur $\llbracket 0, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$.

Remarque : Avec du temps on peut faire le lien avec l'écriture en base 2.

Exercice 2.

1) a) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = (1)(-1) + (0)(1) + (1)(1) = 0 : \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. De plus $1 + 2(0) - 1 = 0$ et $-1 + 2(1) - 1 = 0$, donc $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathcal{P}$.

b) Un vecteur normal à $\mathcal{P} : x + 2y - z = 0$ est $\vec{e}_3 = (1, 2, -1)$ (coefficients de l'équation), donc orthogonal à \mathcal{P} .

Les trois vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{e}_2 = (-1, 1, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 2, -1)$ sont deux à deux orthogonaux : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ (vu), et $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$ (car $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathcal{P}$ et $\vec{e}_3 \perp \mathcal{P}$). Leurs normes sont $\|\vec{e}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{e}_3\| = \sqrt{6}$. Les colonnes de P sont exactement $\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{3}}, \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{6}}$: elles forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , donc P est orthogonale et $P^{-1} = P^\top$.

2) La distance d'un vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ au plan \mathcal{P} vaut $d(\vec{v}, \mathcal{P}) = \|p_{F^\perp}(v)\|$

or le vecteur normal unitaire est $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ donc $d(\vec{v}, \mathcal{P}) = \frac{|x + 2y - z|}{\sqrt{6}}$.

— Colonne 1 = $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) : x + 2y - z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 0 - 1) = 0$, distance $\mathbf{0}$.

— Colonne 2 = $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) : x + 2y - z = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1 + 2 - 1) = 0$, distance $\mathbf{0}$.

— Colonne 3 = $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) : x + 2y - z = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 + 4 + 1) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, distance $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \mathbf{1}$.

(Les deux premières colonnes sont dans \mathcal{P} ; la troisième est le vecteur normal unitaire, à distance 1 du plan.)

S'entraîner à dessiner un plan de l'espace.

Owen NEDJAR

Couplage 41.

Exercice 1.

On pose $J = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque d'abord que $J^2 = 3J$ (chaque coefficient de J^2 vaut

$$\sum_{k=1}^3 1 = 3).$$

- 1) a) $A = I + J$. Montrons par récurrence « $\exists u_n \in \mathbb{R}, A^n = I + u_n J$ » :
- $n = 0$: $A^0 = I = I + 0 \cdot J$, donc $u_0 = 0$.
 - Hérédité : si $A^n = I + u_n J$, alors, comme I et J commutent,

$$A^{n+1} = (I + J)(I + u_n J) = I + u_n J + J + u_n J^2 = I + (u_n + 1 + 3u_n)J = I + (4u_n + 1)J.$$

La propriété est donc héréditaire, avec $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

- b) La suite vérifie $u_{n+1} = 4u_n + 1$, $u_0 = 0$. Le point fixe est $\ell = -\frac{1}{3}$, et $u_n + \frac{1}{3} = 4^n(u_0 + \frac{1}{3}) = \frac{4^n}{3}$, d'où

$$u_n = \frac{4^n - 1}{3}$$

- 2) $\det A = 4 \neq 0$ (calcul direct), donc $\text{rg} A = 3$ et A est inversible. On cherche A^{-1} sous la forme $aI + bJ$:

$$(I+J)(aI+bJ) = aI+(a+b+3b)J = aI+(a+4b)J = I \iff a = 1 \text{ et } a+4b = 0 \iff a = 1, b = -\frac{1}{4}.$$

Donc

$$A^{-1} = I - \frac{1}{4}J = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

- 1) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le composant i est en panne à l'instant t si et seulement si $T_i \leq t$, de probabilité $p = P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (pour $t \geq 0$). Les T_i étant indépendantes, $N_t = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(T_i \leq t)}$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p :

$$N_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - e^{-\lambda t}), \quad E(N_t) = np = n(1 - e^{-\lambda t}).$$

- 2) $E(N_t) \geq \frac{n}{2} \iff 1 - e^{-\lambda t} \geq \frac{1}{2} \iff e^{-\lambda t} \leq \frac{1}{2} \iff \lambda t \geq \ln 2 \iff t \geq \frac{\ln 2}{\lambda}$.

La fonction $t \mapsto E(N_t)$ étant croissante, le seuil cherché est $t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

- 3) $S = \min(T_1, \dots, T_n)$. Pour $t \geq 0$, par indépendance,

$$P(S > t) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t) = e^{-n\lambda t}, \quad \text{donc } F_S(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$$

(et $F_S(t) = 0$ pour $t < 0$). F_S est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: S est à densité $f_S(t) = n\lambda e^{-n\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$, c'est-à-dire $S \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.