

Gala-Anne GUINAUDEAU

Couplage 11.**Exercice 1**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = [X]$ (partie entière de X) et $Z = X - [X]$ (partie fractionnaire de X).

- 1) Déterminer la loi de Y et reconnaître une loi usuelle. Calculer $E(Y)$.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$, calculer $P((Y = n) \cap (Z \leq t))$.
- 3) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi de Z .

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$

Résoudre (E) et déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

Indication : On cherchera une solution particulière polynomiale.

Sonia TEP SALY

Couplage 12.**Exercice 1**

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi exponentielle de paramètre λ . Soit $M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- 1) Déterminer $P(M_n > t)$. En déduire la loi de M_n . Donner son espérance et sa variance.
- 2) Deux candidats passant un oral de mathématiques entrent au même instant dans la salle de leurs jurys respectifs. La durée d'un tel oral est une variable aléatoire d'espérance 20 minutes, suivant une loi exponentielle.
 - a) En moyenne, au bout de combien de temps sortira le 1er candidat à avoir fini ?
 - b) En moyenne, au bout de combien de temps sortira le second candidat ?

Exercice 2

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

- 1) Justifier que f est bien définie et dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer sa parité.
- 2) Déterminer f' . Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f .
- 3) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
- 4) Donner l'allure de C_f et tracer sa tangente en 0.

Couplage 15.**Exercice 1**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Justifier que A et B sont diagonalisables.
- 2) Diagonaliser A . En déduire la diagonalisation de B .
- 3) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2

Lorsque X est une variable aléatoire discrète prenant des valeurs dans \mathbb{N} , on définit la fonction génératrice de X $g_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$$

- 1) Justifier que g_X est bien définie sur $[0, 1]$, puis calculer $g_X(1)$.
- 2) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique. Jusqu'à la fin de l'exercice X est une variable finie à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.
- 3) Prouver que g_X est de classe C^∞ sur $[0, 1]$, exprimer l'espérance de X en fonction de g'_X puis donner une relation entre $V(X)$, $g''_X(1)$, $g'_X(1)$.
- 4) Déterminer la fonction génératrice de X lorsque X suit une loi binomiale. Retrouver alors les formules d'espérance et de variance d'une variable binomiale.

Allan CABARET.

Couplage 34.**Exercice 1**

- 1) Diagonaliser si possible les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

- 2) Donner, M^n , $n \in \mathbb{N}$, la puissance n ème de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

- 1) Prouver que Z^2 est une variable aléatoire de densité $f_{Z^2} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)$.

- 2) Déterminer l'espérance de Z^2 .

- 3) On considère la fonction $h : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$.

On admet que h est correctement définie sur \mathbb{R}^{+*} . Prouver que h est constante sur \mathbb{R}^{+*} . On notera C cette constante. On pourra utiliser le changement de variable $t = xu$.

- 4) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

On rappelle que, si deux variables aléatoires réelles U_1 et U_2 sont indépendantes de densité respectives f_{U_1} et f_{U_2} , alors $U_1 + U_2$ est une variable aléatoire de densité

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_{U_1}(x-t) f_{U_2}(t) dt$$

Déterminer en fonction de C la loi de $Z_1^2 + Z_2^2$.

Couplage 39.**Exercice 1.**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et $Y = X^2$. On note Φ sa fonction de répartition et φ sa densité.

- 1) Déterminer la fonction de répartition de Y , puis montrer que Y est à densité et en donner une densité.
- 2) Calculer $E(Y)$.
- 3) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $E(X^4) = 3$. En déduire $V(Y)$.

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer le rang de A . En déduire $\dim \text{Ker } f$ et $\dim \text{Im } f$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$.
- 3) Justifier que A est diagonalisable, puis déterminer ses valeurs propres.

Mathis LOEFFLER

Couplage 40.**Exercice 1.**

Soit (X_0, \dots, X_{p-1}) , avec $p \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k X_k.$$

- 1) a) Calculer l'espérance de S_p .
- b) Trouver une relation entre S_{p+1} et S_p , puis montrer par récurrence que S_p prend ses valeurs dans $\llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$.
- 2) On souhaite montrer que S_p suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$.
 - a) Vérifier que c'est vrai pour $p = 1$.
 - b) Établir l'hérédité en utilisant le système complet d'événements $\{(X_p = 0), (X_p = 1)\}$.

Exercice 2.

On munit \mathbb{R}^3 de son produit scalaire canonique. On considère le plan

$$\mathcal{P} : x + 2y - z = 0,$$

ainsi que les deux vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{e}_2 = (-1, 1, 1)$.

- 1) a) Montrer que $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ et que \vec{e}_1 et \vec{e}_2 appartiennent à \mathcal{P} .
- b) Déterminer un vecteur \vec{e}_3 orthogonal à \mathcal{P} , puis en déduire que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

est orthogonale (c'est-à-dire que son inverse est égale à sa transposée).

- 2) Calculer la distance au plan \mathcal{P} de chacun des vecteurs colonnes de la matrice P .

Couplage 41.**Exercice 1.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, soit I la matrice identité d'ordre 3, et l'on pose $J = A - I$.

- 1) a) Montrer par récurrence qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + u_n J$.
b) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) Calculer le rang de A . La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 2.

Une machine est constituée de n composants (avec $n \geq 1$). Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement du i -ème composant (l'instant où il tombe en panne). On suppose les variables T_1, \dots, T_n indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $t \geq 0$, on note N_t le nombre de composants en panne à l'instant t .

- 1) Déterminer la loi de N_t , puis justifier que $E(N_t) = n(1 - e^{-\lambda t})$.
- 2) Déterminer le réel $t_0 \geq 0$ à partir duquel $E(N_t)$ est supérieure ou égale à la moitié du nombre de composants.
- 3) On note S la variable aléatoire égale à l'instant où le premier composant tombe en panne. Déterminer la fonction de répartition de S , puis justifier que S est à densité.