1. On applique la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée de l'intégrale $F(x)$:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return np.exp(1/x)

def F(x,n=100): # par défaut n = 100 rectangles
    h = (x-1)/n
    S = 0
    for k in range(n):
        S+= h*f(1+k*h)
    return S
```

2. Soit $f : t \mapsto e^{1/t}$, et notons I l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$. Par définition de la notation intégrale, F est *la* primitive de $f \in \mathscr{C}^0(I)$ qui s'annule en $x = 1$. Ainsi, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I \quad F'(x) = e^{1/x} > 0$. Comme F' est strictement positive sur I, F est strictement croissante sur I.

3. **a)** Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+$, on pose $\varphi(\alpha) = e^{\alpha} - \alpha$. La fonction φ est dérivable en tant que somme de telles fonctions et : $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+ \quad \varphi'(\alpha) = e^{\alpha} - 1 \geq 0$. Il suit que φ est croissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme $\varphi(0) = 1$: $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+ \quad \varphi(\alpha) \geq \varphi(0) \geq 0$, ce qui donne l'inégalité cherchée.

b) Soit $x \in]0, 1]$ fixé, et soit $t \in [x, 1]$. Comme $\alpha = 1/t$ est défini et positif, on peut utiliser le résultat de la question précédente, ce qui donne : $\forall t \in [x, 1] \quad e^{1/t} \geq \dfrac{1}{t}$. Par croissance de l'intégrale, puisque l'on a bien $x \leq 1$: $F(x) \leq \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [-\ln t]_x^1 = \ln x$.

c) On peut donc utiliser le théorème de majoration sur les limites à partir du résultat de **3)b.** : $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = -\infty$.

4. **a)** Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [1, x]$, le réel $1/t$ est défini et positif donc $e^{1/t} \geq 1$. Encore par croissance de l'intégrale, puisque $x \geq 1$: $F(x) \geq \displaystyle\int_1^x 1\,dt = x - 1$. Par théorème de minoration sur les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

b) Soit $x > 1$. On pose le changement de variable $s = \dfrac{1}{t}$. Cette relation définit bien un changement de variables bijectif décroissant de classe $\mathscr{C}^1$ de $t \in [1, x]$ sur $s \in \left[\dfrac{1}{x}; 1\right]$.

Comme $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = -1/t^2 = -s^2$, il vient : $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{e^s}{s^2}\,ds$.

c) Soit $x > 1$. Considérons les fonctions u, v définies par : $u(s) = -\dfrac{1}{s}$, $v(s) = e^s$. Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, x]$ et que $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^1 = u'(s)v(s)\mathrm{d}s$, il vient par intégration par parties :

$$F(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^s}{s}\right]_{1/x}^1 + \int_{1/x}^1 \frac{\mathrm{e}^s}{s}\,ds = x\mathrm{e}^{1/x} - \mathrm{e} + R(x) \quad \text{où} \quad R(x) = \int_{1/x}^1 \frac{\mathrm{e}^s}{s}\,ds.$$

d) Soit $x \geq 1$. Par croissance de la fonction exponentielle $[1/x; 1]$, l'intégrande définissant $R(x)$ se majore sur$[1/x; 1]$ par $\dfrac{\mathrm{e}}{s}$, il vient encore par croissance de l'intégrale : $0 \leq R(x) \leq \displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{\mathrm{e}}{s}\,ds = \mathrm{e}\ln(x)$.

e) L'encadrement obtenu de la fonction R et le résultat de l'IPP nous donnent :
$\forall x \geq 1 \quad xe^{1/x} - e \leq F(x) \leq xe^{1/x} - e + \mathrm{e}\ln(x)$ donc $\dfrac{e^{1/x} - e}{x} \leq \dfrac{F(x)}{x} \leq \dfrac{e^{1/x} - e}{x} + \dfrac{e\ln(x)}{x}$. Par

croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et par opérations sur les limites $\frac{e^{1/x} - e}{x} = o(1)$. Enfin par théorème des gendarmes : $\frac{F(x)}{x} = 1 + o(1)$: c'est la définition de $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

5. **a)** L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. D'après le cours, les solutions s'obtiennent par ajout à une solution particulière y_p n'importe solution de l'équation homogène (H) associée.

Équation homogène associée. On considère $(H) \quad xy' + 2y = 0$. On trouve avec les formules du cours les solutions. Ce sont les fonctions : $x \mapsto z_k(x) = \frac{k}{x^2}$, $k \in \mathbf{R}$ variable libre.

Recherche d'une solution particulière. Par variation de la constante : on pose pour cela $y_p(x) = k(x)z_1(x)$, où k est ici une *fonction* dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ à déterminer. Alors par définition :
y_p est solution de (E) $\Leftrightarrow xy_p' + 2y_p = e^{1/x} \Leftrightarrow k'(x) = e^{1/x}$ par un calcul classique.

Ainsi, il suffit de choisir : $k(x) = F(x)$ d'après **2.** Finalement $y_p(x) = \frac{F(x)}{x^2}$ est une solution particulière de (E), et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y = y_p + z_k$.

Résolution de (E). La condition initiale $y(1) = 0$ détermine la valeur du paramètre k dans la fonction z_k. Comme $F(1) = 0$, on trouve finalement que $z_k(1) = 0$, donc $k = 0$. Ainsi $w = y_p + z_0 = y_p$.

Conclusion. la solution de (E) est la fonction w donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad w(x) = \frac{F(x)}{x^2}.$$

b) D'après la majoration de **3.b)** : $\forall x \in]0,1], \quad w(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$, et d'après l'équivalent de **4.e)**, il vient par quotient d'équivalents : $w(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. On en conclut deux choses : $\lim_{x\to 0} w(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} w(x) = 0$.

c) La tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de w a pour équation :
$T : y = w'(1)(x-1) + w(1)$. La fonction w étant solution de (E) : $w'(1) = 2w(1) + \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Donc l'équation de T est : $T : y = \mathrm{e}(x-1)$.

6. Programme proposé et graphique (tracé des flèches non exigible !)

```python
# Tracé de la solution w

X = np.linspace(0.5,5)
Y = [F(x)/x**2 for x in X]
plt.plot(X,Y)

# Tracé de la tangente (abscisse x=1)
e = np.exp(1) # pente
h=0.5 # longueur de la demi-tangente
plt.arrow(1,0,1*h,e*h,width=0.02,
                    length_includes_head=True,
                          color='black')
plt.arrow(1,0,-1*h,-e*h,width=0.02,
                    length_includes_head=True,
                          color='black')
plt.grid('on')
plt.show()
```