

Devoir Maison n°3

Suite implicite

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée a_n .
 (b) Déterminer a_1 .
 (c) Montrer que : $\forall n \geq 2, 0 < a_n < 1$.
2. (a) Écrire en langage *Python* une fonction `suite(n)` prenant en entrée un entier $n \geq 1$ et renvoyant une valeur approchée de a_n à 10^{-6} près.
On pourra utiliser la dichotomie.
 (b) Tester cette fonction pour $n = 2$ et donner une valeur approchée de a_2 .
3. (a) Pour tout $n \geq 1$, déterminer le signe de $f_{n+1}(a_n)$.
 En déduire les variations de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$
 (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge, et déterminer sa limite.
4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $u_n = n^2 a_n$.
 (a) Représenter à l'aide d'un script *Python* les termes de la suite (u_n) pour $n \in \llbracket 1, 40 \rrbracket$.
 On utilisera la fonction `plt.ylim(1.8, 2.1)` importée du module `matplotlib.pyplot`, pour limiter les ordonnées entre les valeurs 1,8 et 2,1.
 (b) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?
 (c) Déterminer un équivalent de a_n .
5. On pose : $g(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.
 (a) Montrer que la fonction g est croissante sur $[a_2, 1]$.
 (b) On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$
 Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.