

**Exercice 13 : Racines  $n$ -èmes dans  $\mathbf{C}$**

1. Soit l'équation  $(E) : z^4 = i$ .

On la résout en utilisant la forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$  avec  $r \in \mathbf{R}_+^*$  étant donné que 0 n'est pas solution de  $(E)$ , et  $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ .

Il vient alors :  $(E) \Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow r^4 e^{4i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{d'après Moivre}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{cases} \quad \text{par identification des modules et arguments}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble solution de  $(E)$  est :  $\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{i\pi}{8}}, e^{\frac{5i\pi}{8}}, e^{\frac{9i\pi}{8}}, e^{\frac{13i\pi}{8}} \right\}$

Remarque : on a choisi 4 entiers consécutifs  $k = 0, 1, 2, 3$  pour décrire l'ensemble des solutions.

Pour  $k = 4$ , on retrouve  $e^{\frac{17i\pi}{8}} = e^{\frac{i\pi}{8} + 2i\pi} = e^{\frac{i\pi}{8}}$

2. Soit l'équation  $(E') : z^5 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^3}$

On procède de la même manière :  $1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$  et  $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

donc  $(1 + i\sqrt{3})^4 = 16e^{\frac{4i\pi}{3}}$  et  $(1 + i)^3 = 2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ , et finalement :  $\frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^3} = 4\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$

En écrivant  $z = re^{i\theta}$ , il vient :

$$(E') \Leftrightarrow (re^{i\theta})^5 = 4\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$$

$$\Leftrightarrow r^5 e^{5i\theta} = 4\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}} \\ 5\theta = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{7\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble solution de  $(E')$  est :  $\mathcal{S}' = \left\{ \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{60}}, \sqrt{2}e^{\frac{31i\pi}{60}}, \sqrt{2}e^{\frac{55i\pi}{60}}, \sqrt{2}e^{\frac{79i\pi}{60}}, \sqrt{2}e^{\frac{103i\pi}{60}} \right\}$

**Exercice 14 : Équation "bi-carrée" dans  $\mathbf{C}$**

Soit l'équation  $(E_a) : z^4 - 2z^2 \cos(2a) + 1 = 0$  où  $a$  est un réel fixé.

C'est une équation "bi-carrée", c'est-à-dire une équation du second degré dégénérée : l'inconnue  $z$  n'apparaît que sous la forme  $z^2$  et  $z^4$ .

On pose  $X = z^2$ , l'équation devient  $(E') : X^2 - 2X \cos(2a) + 1 = 0$ .

Son discriminant  $\Delta$  vaut :  $\Delta = 4 \cos^2(2a) - 4 = -4 \sin^2(2a) \leq 0$

Premier cas :  $\sin(2a) = 0$  donc  $\Delta = 0$ . On trouve la solution-double :  $X = \cos(2a)$ .

Mais  $\sin(2a) = 0 \Leftrightarrow 2a = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , et :

\* si  $k$  est pair,  $\cos(2a) = 1$  et  $X = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$  ou  $z = -1$

\* si  $k$  est impair,  $\cos(2a) = -1$  et  $X = -1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = i$  ou  $z = -i$

Second cas :  $\sin(2a) \neq 0$  donc  $\Delta < 0$ .

On a pour  $X$  deux solutions complexes conjuguées : 
$$X = \frac{2 \cos(2a) \pm i\sqrt{4 \sin^2(2a)}}{2} = \cos(2a) \pm i|\sin(2a)| = e^{\pm 2ia}$$

On a alors :  $(E_a) \Leftrightarrow z^2 = e^{\pm 2ia} \Leftrightarrow z = \pm e^{\pm ia}$

Conclusion : 
$$\begin{cases} \bullet \text{ si } 2a = k\pi \ (k \in \mathbf{Z}, \text{ pair}), \text{ alors } \mathcal{S}_a = \{1, -1\} \\ \bullet \text{ si } 2a = k\pi \ (k \in \mathbf{Z}, \text{ impair}), \text{ alors } \mathcal{S}_a = \{i, -i\} \\ \bullet \text{ sinon, } \mathcal{S}_a = \{e^{ia}, -e^{ia}, e^{-ia}, -e^{-ia}\} \end{cases}$$

### Exercice 15 : Équation trigonométrique

$$\text{Soit } (E) : \sqrt{3} \sin(x) \cos(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

- Utilisation de formules de trigonométrie pour se ramener à  $2x$  :

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a : } \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\text{donc en remplaçant et après simplification : } (E) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Transformation de Fresnel : on pose  $z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{\pi}{3}}$

$$\text{On a : } (E) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{24} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

### Exercice 16 : Avec la tangente de l'angle moitié

1) Expression en fonction de  $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

$$\text{Soit } a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[. \text{ Alors } \tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2 \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}} = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

2) Valeur de  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\text{On utilise la relation précédente avec } a = \frac{\pi}{4} : \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1.$$

En posant  $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ , on obtient l'équation :  $\frac{2t}{1-t^2} = 1$  qu'on peut résoudre (second degré).

$$2t = 1 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Puisque  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ , on ne conserve que la solution positive :  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$ .

3) Une équation On pose  $(E) : (\sqrt{2} - 1) \cos(x) + \sin(x) = -1$

En se servant de la question précédente :

$$(E) \Leftrightarrow \cos(x) \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{en multipliant par } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{par symétries}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{S} = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

### Exercice 17 : Technique de l'angle moitié

1) Forme exponentielle de  $1 + u$  et  $1 - u$  pour un complexe  $u$  de module 1

C'est deux fois la même question, en changeant  $-u = -e^{i\theta}$  en  $-u = e^{i(\theta+\pi)} = e^{i(\theta-\pi)}$  et en choisissant entre  $\theta + \pi$  et  $\theta - \pi$  l'argument compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

$$1 + u = e^0 + e^{i\theta} = e^{i \frac{\theta}{2}} \left( e^{i \frac{\theta}{2}} + e^{-i \frac{\theta}{2}} \right) \quad \text{TECHNIQUE DE L'ARC MÉDIAN}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i \frac{\theta}{2}} \quad \text{d'après la première formule d'Euler}$$

Si  $\theta = \pi$ , alors  $1 + u = 0$ , et sinon  $\frac{\theta}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  donc  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

et la forme exponentielle cherchée est  $1 + u = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Simplification de  $(1 + u)^n$

D'après la question précédente :  $(1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{ni\frac{\theta}{2}}$

3) Formule de Moivre

$$\left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}\right)^n = \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}\right)^n = \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\right)^n = (e^{2i\theta})^n = e^{2ni\theta}$$

**Exercice 18 : Manipulations d'une somme**

On pose pour  $n \in \mathbf{N}$  :  $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$ .

1)  $S_n$  est réel

On pose  $z = (1 + i)^n$ . Alors  $\bar{z} = (1 - i)^n$  d'après les propriétés du conjugué donc  $S_n = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$  et  $S_n \in \mathbf{R}$ .

2) Forme développée de  $S_n$

On utilise la formule du binôme de Newton :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i^k + (-i)^k) \quad \text{par linéarité}$$

Si  $k$  est pair :  $k = 2m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ) et  $i^k + (-i)^k = 2(-1)^m$

Si  $k$  est impair :  $k = 2m + 1$  ( $m \in \mathbf{N}$ ) et  $i^k + (-i)^k = 0$

Conclusion :  $S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n 2 \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} = 2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m$

3) Forme exponentielle de  $S_n$

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } S_n &= (1 + i)^n + (1 - i)^n = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^n + (\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n \times (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}) \quad \text{d'après Moivre} \\ &= (\sqrt{2})^n \times 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{d'après la première formule d'Euler} \end{aligned}$$

Conclusion :  $S_n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

4) Une formule de somme de coefficients binomiaux

On identifie les résultats des questions 2) et 3) :  $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} (-1)^m = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$