

I Rappels sur les systèmes linéaires

1 Théorie des systèmes linéaires

DÉFINITION

Un système d'équations linéaires est la donnée de n équations L_1, \dots, L_n à p inconnues x_1, \dots, x_p réelles ou complexes, telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i : a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i$.

Les scalaires $(a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ sont les **coefficients principaux** du système.

Les scalaires $(b_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forment le **second membre** du système.

Lorsqu'ils sont tous nuls, on dit que le système est **homogène**.

Écriture matricielle :

On pose : $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice des coefficients principaux du système,

$X = (x_j)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ la matrice-colonne des inconnues,

$B = (b_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ la matrice-colonne du second membre.

Alors le système $(S) \begin{cases} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ équivaut à l'équation matricielle : $\boxed{AX = B}$ qu'on peut noter : $(A|B)$.

DÉFINITION

Le **rang** d'un système linéaire S est le rang de la matrice A des coefficients principaux de S .

THÉORÈME ** Ensemble-solution d'un système linéaire **

Soit (S) un système de taille $n \times p$ et de rang r . On note $S \subset \mathbf{K}^p$ son ensemble-solution.

* Si $r < n$, alors (S) possède $n - r$ **équations auxiliaires**.

Si l'une d'entre elles n'est pas vérifiée, alors $S = \emptyset$. Sinon $S \neq \emptyset$ (système **compatible**).

* Si $r = n$, alors (S) est compatible, et S contient une unique, ou une infinité de solutions.

* Si $r < p$ et si (S) est compatible, alors il possède une infinité de solutions, qui s'expriment en fonction de $p - r$ **variables libres** ($p - r$ est le degré de liberté du système).

* Si $r = p$ et si (S) est compatible, alors il possède une unique solution.

* Si $r = p = n$, alors (S) est compatible et possède une unique solution (système **de Cramer**).

* Si (S) est homogène, alors il est compatible, et admet la solution (au moins) le p -uplet nul.

2 Pratique des systèmes linéaires

DÉFINITION

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire :

- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\boxed{\alpha \neq 0}$: multiplication de L_i par un scalaire α **non nul**,
- $L_i \longleftrightarrow L_k$: échange des lignes L_i et L_k ,
- $L_i \leftarrow L_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \alpha_k L_k$: ajout à L_i d'une combinaison linéaire **des autres** lignes.

PROPOSITION

On ne change pas l'ensemble-solution d'un système linéaire en procédant à un nombre quelconque d'opérations élémentaires.

THÉORÈME ** Théorème (algorithme) du pivot de Gauss **

On peut résoudre tout système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes.

Description de l'algorithme : on choisit sur une colonne de A un coefficient non nul $a_{i,j}$. On le pose comme **pivot** et on s'en sert pour annuler tous les autres coefficients de la même colonne, grâce à des opérations élémentaires du type : $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,j}}{a_{i,j}} L_i$.

On poursuit en appliquant le même procédé à la sous-matrice $A^{(i,j)}$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j , jusqu'à obtenir une sous-matrice nulle, ou vide.

On résout alors (S) **par remontée**, en utilisant les pivots dans l'ordre inverse de leur apparition.

Le nombre de pivots est égal au rang de la matrice A (et du système linéaire).

Exercice 1 : Résoudre dans \mathbf{R}^4 ou \mathbf{R}^3 les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 7t = 4 \\ 4x + y + 2z + 2t = 0 \\ 7x + 2y + 5z + 3t = 7 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 3 \\ x + 4y + 2z + 2t = 2 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 5x + 11y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \\ -3x + 7y + 3z = 3 \end{cases}$$

II Espaces vectoriels : définition et exemples

1 Définition et notations

DÉFINITION

Soient E un ensemble, $+$: $E \times E \rightarrow E$ une *addition* dans E et $.$: $\mathbf{K} \times E \rightarrow E$ un *produit externe*. Alors le triplet $(E, +, .)$ est un **K-espace vectoriel** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

Propriétés de l'addition :

- L'addition dans E est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
- E contient un **élément-neutre** noté 0_E vérifiant : $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
- Tout élément x de E possède un **symétrique** : $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0_E$
- L'addition dans E est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$

Propriétés du produit externe :

- 1 est l'**élément-neutre** du produit externe : $\forall x \in E, 1.x = x$
- Distributivité sur l'addition vectorielle : $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
- Distributivité sur l'addition scalaire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- Associativité : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

On note alors : $(E, +, .)$ est un **K-ev**, ou encore : E est un **K-ev** (les lois $+$ et $.$ sont alors sous-entendues). Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** de E , les éléments de \mathbf{K} sont les **scalaires**.

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on dit aussi que E est un *espace vectoriel réel* ; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on parle d'*espace vectoriel complexe*. L'élément-neutre 0_E est appelé le **vecteur-nul** de E , parfois noté $\vec{0}$.

Le symétrique d'un vecteur $x \in E$ est noté $-x$.

2 Exemples

a L'ensemble \mathbf{K}^n

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors \mathbf{K}^n est le produit cartésien de \mathbf{K} par lui-même n fois.

C'est l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) où $x_i \in \mathbf{K}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour deux n -uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ éléments de \mathbf{K}^n , et pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on pose :

- $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{K}^n$
- $\lambda.x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbf{K}^n$

Alors $(\mathbf{K}^n, +, .)$ est un **K-ev**.

Exemples : \mathbf{R}^2 est un **R-ev**, assimilable à un plan géométrique, \mathbf{R}^3 est un **R-ev**, assimilable à l'espace. Le **couple** $(1, -2)$ est un vecteur de \mathbf{R}^2 , le **triplet** $(2, 1, 5)$ est un vecteur de \mathbf{R}^3 .

b Ensemble de polynômes

L'addition de deux polynômes et la multiplication d'un polynôme par une constante munissent $\mathbf{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Le vecteur nul de $\mathbf{K}[X]$ est le polynôme nul.

preuve :

c Ensemble des applications de I dans \mathbf{R}

Soit I un intervalle réel. Alors $E = \mathcal{F}(I, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^I$ muni de l'addition de deux applications, et du produit d'une application par un réel est un espace vectoriel réel. Le vecteur nul de \mathbf{R}^I est la fonction nulle.

preuve :

d Ensemble de matrices

Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans \mathbf{K} , muni de l'addition matricielle et du produit d'un scalaire par une matrice, est un **K-ev**.

La matrice nulle $0_{n,p}$ est le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

preuve :

e Ensemble de VAR définies sur un univers Ω

L'ensemble des VAR définies sur le même univers Ω forme un \mathbf{R} -ev.

f Ensemble des suites réelles ou complexes

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Pour deux suites $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$ et pour un réel λ , on pose :

- $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbf{N}}$
- $\lambda.u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

Alors $(\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}), +, \cdot)$ est un \mathbf{R} -ev. Le vecteur nul de $\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ est la suite nulle.

De façon similaire, l'ensemble $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des suites complexes est un \mathbf{C} -ev.

3 Calculs dans un espace vectoriel

Soit E un \mathbf{K} -ev. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, pour tous vecteurs $x, y \in E$:

- $x - y = x + (-y)$
- $\lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda(-y) = -\lambda.y$
- $(-\mu).x = -\mu.x$
- $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$
- $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

preuves :

4 Combinaisons linéaires

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient x_1, \dots, x_n des vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires.
 $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i.x_i$ est un vecteur appelé **combinaison linéaire** des vecteurs x_1, \dots, x_n .

Exercice 2 : Dans \mathbf{R}^3 , on pose $u = (3, 8, 2)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (0, 5, 5)$.

Montrer que w est combinaison linéaire de u et v .

III Sous-espaces vectoriels

1 Définition

DÉFINITION

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbf{K} -ev et soit F une partie de E . Alors F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est **non vide** : $F \neq \emptyset$
- F est **stable par combinaison linéaire** : $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \lambda.x + \mu.y \in F$

On note : F est un **s-ev** de E .

Remarque : si F est un s-ev de E , alors $0_E \in F$.

2 Exemples et contre-exemples

Exemples usuels :

* Dans un \mathbf{K} -ev E quelconque :

$\{0_E\}$ (s-ev nul de E), et E sont des s-ev de E ,

$\{\lambda.x, \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}.x = \text{Vect}(x)$ est la **droite vectorielle engendrée** par $x \in E, x \neq 0_E$.

* Dans $E = \mathbf{K}^n$, soient a_1, \dots, a_n des scalaires fixés :

$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n, \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$ l'ensemble-solution d'une équation linéaire homogène.

L'ensemble solution d'un système linéaire homogène de taille $n \times p$ est un s-ev de \mathbf{K}^p .

Par exemple, les solutions (x, y, z) de l'équation $2x - y + 3z = 0$ forment un s-ev de \mathbf{R}^3 .

* Dans $\mathbf{K}[X]$, soit $n \in \mathbf{N}$:

$\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n .

* Dans $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, soient $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ fixés :

$\{f \in E, f(a) = 0\}$ l'ensemble des applications qui s'annulent en a ,

$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications infiniment dérivables,

$\mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications n fois dérivables, et de dérivée n -ème continue,
l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

* Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) :

$\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonales,

$\mathcal{T}_n^+(\mathbf{K}), \mathcal{T}_n^-(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ou inférieures,

$\mathcal{S}_n(\mathbf{K}), \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ les ensembles des matrices symétriques ou anti-symétriques.

* Dans $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles ou complexes :

l'ensemble des suites convergentes,

l'ensemble des suites bornées,

l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre p .

preuves :

Contre-exemples : les sous-ensembles suivants **ne sont pas** des s-ev

• les solutions dans \mathbf{K}^n d'une équation linéaire non homogène, ou d'une équation non linéaire.

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 2x - y = 1\}$ et $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 2x - y^2 = 0\}$ ne sont pas des s-ev de \mathbf{R}^2 .

• Dans $\mathbf{K}[X]$, l'ensemble des polynômes de degré **égal** à $n \in \mathbf{N}$.

• Dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites croissantes, l'ensemble des suites divergentes.

• Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'ensemble des fonctions positives, l'ensemble des fonctions bijectives.

• Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices inversibles.

PROPRIÉTÉ

| Soient F_1 et F_2 deux s-ev d'un même espace vectoriel E .

| Alors $F_1 \cap F_2$ est encore un s-ev de E .

Remarque : Cette propriété se généralise à toute intersection de sous-espaces vectoriels.

Attention : C'est faux en général pour la réunion !

preuve :

Exercice 3 : Dans \mathbf{R}^3 , on définit les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} d'équations $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y + 3z = 0$.

Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Exercice 4 : Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un s-ev de E si et seulement si : $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

3 Sous-espace vectoriel engendré

DÉFINITION

Soit E un \mathbf{K} -ev et soit $P \subset E$ une partie non vide de E .

Alors l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de P est un sous-espace vectoriel de E , noté $\text{Vect}(P)$, et appelé **sous-espace vectoriel engendré** par P .

Exemples :

* Soit $x \neq 0_E \in E$. Alors $\text{Vect}(\{x\}) = \mathbf{K}.x$ est la droite vectorielle engendrée par x .

* Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $\text{Vect}(\{1, X, \dots, X^n\}) = \mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 5 : Dans \mathbf{R}^3 , déterminer une équation de $\text{Vect}(u, v)$, avec $u = (0, 1, 2)$ et $v = (1, -1, 3)$.

PROPRIÉTÉ

| Soit P une partie non vide d'un \mathbf{K} -ev E .

| Alors $\text{Vect}(P)$ est le plus petit s-ev de E (au sens de l'inclusion) qui contient P .

preuve :

IV Familles particulières de vecteurs

1 Famille génératrice

DÉFINITION

Soit E un \mathbf{K} -ev, et soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E .

Alors on dit que la famille \mathcal{F} est **génératrice** si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

On retient qu'une famille est génératrice si tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

$$\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \text{ est génératrice} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i$$

Remarque : Toute famille de laquelle on peut extraire une famille génératrice est encore génératrice.

DÉFINITION

Soit $F \subset E$ un s-ev. Alors \mathcal{F} est **génératrice de F** si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$.
On dit aussi que \mathcal{F} engendre F .

Exercice 6 : Montrer que la famille $(X + 1, X^2 + 1, X^2 + X)$ est génératrice de $\mathbf{R}_2[X]$.

2 Famille liée

DÉFINITION

Soit E un \mathbf{K} -ev, et soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E .
Alors on dit que la famille \mathcal{F} est **liée** s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, **non tous nuls**, tels que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i = 0_E$$

Exemple : La famille $((3, -2), (-6, 4))$ est liée dans \mathbf{R}^2 , car $2(3, -2) + (-6, 4) = (0, 0) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

Remarques :

- * Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est toujours liée.
- * Si, à une famille liée, on ajoute des vecteurs, alors on obtient encore une famille liée.
- * La famille (x, y) est liée signifie que x et y sont **colinéaires**.
- * Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille liée. Alors l'un (au moins) des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres :

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mid x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i \cdot x_i$$

3 Famille libre

DÉFINITION

Soit E un \mathbf{K} -ev, et soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E .
Alors on dit que la famille \mathcal{F} est **libre** si elle n'est pas liée.

Dans ce cas, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$.

Vocabulaire : On dit alors que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont **linéairement indépendants**.

Exercice 7 : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (A, B, C) est libre.

PROPRIÉTÉ

| Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$ de degrés 2 à 2 distincts est libre.

preuve :

4 Base

DÉFINITION

Soit E un \mathbf{K} -ev, et soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E .
Alors on dit que la famille \mathcal{B} est une **base** de E si elle est **libre et génératrice**.
Dans ce cas, tout vecteur de E s'écrit **de façon unique** comme une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} :

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base \mathcal{B} .

Exemples : * Dans \mathbf{K}^n , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note e_i le n -uplet de \mathbf{K}^n comportant 1 en $i^{\text{ème}}$ place et 0 partout ailleurs. Alors $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la **base canonique** de \mathbf{K}^n .

* La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est $(E_{ij}, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket)$
où la matrice E_{ij} possède le coefficient 1 en position (i, j) et 0 partout ailleurs.

preuves :

DÉFINITION

Soit F un s-ev d'un espace vectoriel E . On dit qu'une famille finie d'éléments de F est une **base de F** si elle est libre et si elle engendre F .

Exemple : La base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exercice 8 : Déterminer une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - y + z = 0\}$.

V Dimension

1 Définition

DÉFINITION

Soit E un \mathbf{K} -ev possédant une base \mathcal{B} de cardinal fini $n \in \mathbf{N}^*$.
Alors pour toute base \mathcal{B}' de E , \mathcal{B}' est finie et de cardinal n .
Le cardinal commun à toute base de E s'appelle la **dimension** de E , notée : $\dim E$.

Exemples et contre-exemples :

- La base canonique de \mathbf{K}^n contient n vecteurs, donc \mathbf{K}^n est un espace vectoriel de dimension n .
- La base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ contient $(n+1)$ vecteurs, donc : $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n+1$.
A contrario, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie (il ne possède aucune base finie).
- $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ n'est pas de dimension finie.

Remarque : Par convention, on dira que $E = \{0_E\}$ est de dimension 0.

2 Lien avec les familles particulières

PROPRIÉTÉ

Soit E un \mathbf{K} -ev de dimension finie n , et soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E . Alors :

- * Si \mathcal{F} est libre, alors \mathcal{F} est de cardinal $p \leq n$, et dans ce cas on peut compléter la famille \mathcal{F} en une base de E .
- * \mathcal{F} est libre et de cardinal n si et seulement si c'est une base de E .
- * Si \mathcal{F} est génératrice, alors \mathcal{F} est de cardinal $p \geq n$, et dans ce cas on peut en extraire une base de E .
- * \mathcal{F} est génératrice et de cardinal n si et seulement si c'est une base de E .

Exercice 9 : Soient $u = (1, 3)$, $v = (0, 5)$ et $w = (-1, 4) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que (u, v, w) est liée.

Exercice 10 : Dans $E = \mathbf{R}_3[X]$, on pose $P_1 = X^2 - 2$, $P_2 = 2X^3 + X + 1$, $P_3 = 3X - 1$ et $P_4 = 5$.
Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

3 Dimension de sous-espaces vectoriels

PROPRIÉTÉ

- * Soit E un \mathbf{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}$, et soit F un s-ev de E .
Alors F est de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$.
Si $\dim F < \dim E$, on dit que F est un s-ev *strict* de E .
- * Soient F et G deux s-ev d'un \mathbf{K} -ev E de dimension finie. Alors :
 - si $F \subset G$, alors $\dim F \leq \dim G$;
 - si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

preuves :

Exercice 11 : Décrire tous les s-ev de \mathbf{R}^2 , puis ceux de \mathbf{R}^3 .

4 Rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION

Soient E un \mathbf{K} -ev et \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E . Alors on appelle **rang** de la famille \mathcal{F} la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. On note : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$.

PROPRIÉTÉ

Soit \mathcal{F} une famille finie de cardinal p d'un espace vectoriel E de dimension n .

On note $r = \text{rg}(\mathcal{F})$ le rang de la famille \mathcal{F} . Alors :

- $r \leq p$ et $r \leq n$
- $r = n$ si et seulement si la famille \mathcal{F} est génératrice, et dans ce cas $p \geq n$.
- $r = p$ si et seulement si la famille \mathcal{F} est libre, et dans ce cas $p \leq n$.
- $r = p = n$ si et seulement si la famille \mathcal{F} est une base de E .

VI Aspect matriciel

1 Définitions

Soit E un \mathbf{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E .

DÉFINITION

* Soit v un vecteur de E . Il s'écrit alors (de façon unique) : $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$,
où les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base \mathcal{B} .
Alors on dit que la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la **matrice du vecteur v dans la base \mathcal{B}** ,
et on note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.
* Soient v_1, \dots, v_p des vecteurs de E .
Alors on appelle **matrice des vecteurs v_1, \dots, v_p dans la base \mathcal{B}** la matrice :
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$
où pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{n,j})$ sont les coordonnées du vecteur v_j dans la base \mathcal{B} .
Si on note \mathcal{F} la famille de vecteurs (v_1, \dots, v_p) , on peut écrire : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Exemple : Soient $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 4, 3)$ et $v_3 = (5, 1, 6)$ trois vecteurs de \mathbf{R}^3 .

Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbf{R}^3 . Alors : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Cas particulier : Pour toute base \mathcal{B} , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

PROPRIÉTÉ

- Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E , et soit \mathcal{B} une base de E . Alors :
- * $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$
 - * \mathcal{F} est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

2 Rappels sur les changements de bases

DÉFINITION

Soient $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, \dots, u'_n)$ deux bases de E . Soit $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Alors on dit que P est la **matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'** , et on note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

PROPOSITION

- Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
Soit v un vecteur de E . On pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$.
On a alors : $X = PX'$ ou $X' = P^{-1}X$.

Exercice 12 : Soit $P = X^3 + X^2 - 1 \in \mathbf{R}_3[X]$.

Déterminer les coordonnées de P dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) de l'exercice 10.