

Exercice 1 : Soit $x > 0$ un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln x$. Calculer f en les valeurs suivantes :

$$e, \quad \frac{1}{e}, \quad \sqrt{e}, \quad e^2, \quad e\sqrt{e}, \quad \frac{1}{e^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Exercice 2 : Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. A = \frac{\ln(81) - \ln(9)}{\ln \sqrt{3}} & 4. D = \left[\exp \left(-\frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \right) \right]^{\ln \frac{1}{x^2}} \\ 2. B = \ln((\sqrt{5} + 1)^{18}) + \ln((\sqrt{5} - 1)^{18}) & 5. E = (\ln x)^2 - \ln(x^2) + 1 \\ 3. C = \ln \sqrt{\frac{1}{e^{-x}}} & 6. F = \ln(e^{x(y+1)} - e^x) - x \end{array}$$

Exercice 3 : Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$\begin{array}{lll} 1. \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5} & 3. \sqrt[5]{3} \sqrt[3]{9} \sqrt[15]{3^2} & 5. (x^{-n+1})^2 (x^3)^{n-2} \\ 2. (\sqrt[6]{3})^3 & 4. \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt[4]{x})^6} & 6. (2^{2n})^{(2n)^{2n}} \end{array}$$

Exercice 4 : Dans chaque question, simplifier l'expression de $f(x)$ en distinguant selon la valeur de x , puis tracer la courbe représentative de la fonction f .

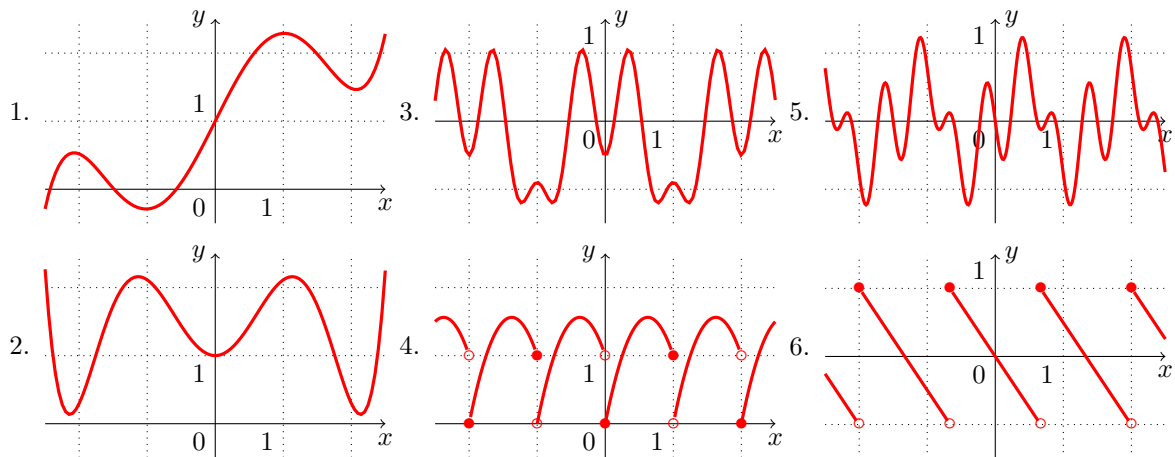
$$1. f(x) = |x - 3| - |2x + 1| \quad 2. f(x) = \lfloor x^2 \rfloor, \quad x \in [-2, 2] \quad 3. f(x) = \lfloor x \rfloor + |x|, \quad x \in [-2, 2]$$

Exercice 5 : Montrer que pour tout réel x , on a : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Exercice 6 : Déterminer pour chacune des fonctions suivantes leur ensemble de définition et leurs limites aux bornes de cet ensemble.

$$\begin{array}{lll} 1. f(x) = e^x - x^2 & 5. f(x) = \frac{e^{3x}}{x^2 + e^x} & 9. f(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^x \\ 2. f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 3x - 4} & 6. f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & 10. f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \\ 3. f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} & 7. f(x) = \sqrt{1 - \ln x} & 11. f(x) = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x - 2} \right) \\ 4. f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x & 8. f(x) = x^{\frac{1}{x}} & \end{array}$$

Exercice 7 : Pour chacun des graphes suivants, indiquer si la fonction correspondante semble être paire, impaire, périodique (et dans ce cas préciser la plus petite période apparente). Aucune justification n'est demandée.



Exercice 8 : Soient $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions.

1. Montrer que, si les fonctions f et g sont paires, alors la somme $f + g$ est une fonction paire.
Que dire si f et g sont impaires, si f est paire et g impaire ?
2. Mêmes questions avec le produit fg .
3. Mêmes questions avec le quotient f/g (en supposant que la fonction g ne s'annule pas).
4. Mêmes questions avec la composée $g \circ f$.

Exercice 9 : Donner l'ensemble de définition, et étudier la parité des fonctions suivantes

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto 3 \ln(\pi + x^2) + 1$ | 3. $x \mapsto e^{x^3+3x}$ | 5. $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ |
| 2. $x \mapsto \frac{2x^5 - 7x^3}{x^4 - x^2 + 3}$ | 4. $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ | 6. $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ |

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble de définition, le domaine d'existence de la dérivée et la dérivée des fonctions définies par :

- | | | |
|---|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ | 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ | 9. $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$ |
| 2. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ | 6. $f(x) = \sqrt{-2+x-x^2}$ | 10. $f(x) = x^x$ |
| 3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | 7. $f(x) = \ln(\ln(x))$ | 11. $f(x) = (1+x^2)^{1/x}$ |
| 4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | 8. $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ | |

Exercice 11 : Déterminer les dérivées secondes des fonctions 1. à 3. de l'exercice précédent.

Exercice 12 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse considéré :

- | | |
|--|--|
| 1. $a(x) = \ln(x^2 + 1)$, en $x = 1$; | 3. $c(x) = \ln(1 + xe^x)$, en $x = -1$; |
| 2. $b(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, en $x = 0$; | 4. $d(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$, en $x = 2$. |

Exercice 13 : En dressant leurs tableaux de variations, rechercher les extremums (maximum, minimum) des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

- | | | |
|--------------------|---------------------|-----------------------------|
| 1. $a(x) = x(1-x)$ | 2. $b(x) = x \ln x$ | 3. $c(x) = \frac{x}{x^2+1}$ |
|--------------------|---------------------|-----------------------------|

Exercice 14 : Résoudre les inéquations suivantes

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $(E_1) : e^{3x-5} \geq 12$ | 3. $(E_3) : \exp(1 + \ln(x)) \geq 2$ |
| 2. $(E_2) : 1 \leq e^{-x^2+x}$ | 4. $(E_4) : \ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$ |