I Logique et quantificateurs

Exercice 1 : Écrire avec les quantificateurs les assertions suivantes ainsi que leur négation.
Préciser le cas échéant les propositions fausses.

1. Il existe un entier naturel inférieur ou égal à tous les autres.
2. Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif.

Exercice 2 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- Traduire en langage courant les expressions avec quantificateurs,
- Formaliser avec les quantificateurs la négation de l'expression.

1. $\exists\,(m,M)\in\mathbf{R}^2,\ \forall\,x\in I,\ m\leqslant f(x)\leqslant M.$
2. $\forall\,(x,x')\in I^2,\ x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$.
3. $\forall\,y\in\mathbf{R}_+^\star,\ \exists\,x\in I,\ f(x)=y.$

Exercice 3 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\exists\,M\in\mathbf{R},\forall\,n\in\mathbf{N}^\star,\ \ln(n)\leqslant M.$
2. $\forall\,n\in\mathbf{N}^\star,\exists\,M\in\mathbf{R},\ \ln(n)\leqslant M.$

Y-a-t-il une différence entre les deux ?

Exercice 4 : Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.
Écrire mathématiquement les propriétés suivantes :

1. f prend la valeur 1.
2. f prend ses valeurs entre -2 et 3.
3. f ne prend que des valeurs entières.
4. f s'annule sur l'intervalle $[-1,1[$.
5. f est majorée.
6. f est constante.
7. f est infective.
8. f s'annule au plus une fois.

Exercice 5 : Comparer logiquement ($i.e$ du point de vue de l'implication) les assertions suivantes.
On pourra s'aider en prenant comme exemple les élèves d'une classe E et en considérant : $P(x)$: "l'élève x fait de la guitare" et $Q(x)$: "l'élève x fait du volley".

1. « $\exists\,x\in E,\ P(x)$ et $Q(x)$ » et « $\exists\,x\in E,\ P(x)$ et $\exists\,x\in E,\ Q(x)$ ».
2. Même chose en remplaçant et par ou.
3. « $\forall\,x\in E,\ P(x)$ et $Q(x)$ » et « $\forall\,x\in E,P(x)$ et $\forall\,x\in E,\ Q(x)$ ».
4. Même chose en remplaçant et par ou.

Exercice 6 : Donner la contraposée et la négation des implications suivantes :

1. $\forall\,x\in\mathbf{R},\ x\geqslant A\ \Rightarrow\ f(x)\geqslant B,$
2. $\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x\neq y\ \Rightarrow\ f(x)\neq f(y).$

II Ensembles

Exercice 7 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que : $A\subset B\ \Leftrightarrow\ A\cap\overline{B}=\varnothing$.

Exercice 8 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A\cup B=A\cap B$.
Montrer que $A=B$.

Exercice 9 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que les assertions : $(P)\quad A\cup B=A\cap C$ et $(Q)\quad B\subset A\subset C$ sont équivalentes.

Exercice 10 : Soient A,B,C,D quatre parties d'un même ensemble E.
On suppose que : $A\subset C,\quad B\subset D,\quad A\cup B=C\cup D$ et $C\cap D=\varnothing$.
Montrer que $A=C$ et $B=D$.

Exercice 11 : Soit A et B deux ensembles.
On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble : $A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$.

1. Représenter $A\Delta B$ sur un dessin.
2. Montrer que, si A, B et C sont trois ensembles, on a l'équivalence : $A\Delta B=A\Delta C\quad\Leftrightarrow\quad B=C$.