Exercice 1 : Soit x un réel strictement positif.
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'inégalité de Bernoulli :

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Exercice 2 : a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.
b) Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbf{N}$ a-t-on : $2^n > n^2$?

Exercice 3 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $a_0 = 1,\ a_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad a_n = 2n+1$.

Exercice 4 : Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout entier k, on pose $a_k = 3k+1$.

1. Écrire en extension (c'est-à-dire sans le symbole Σ) puis calculer les sommes suivantes :

   a. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{6} a_{2k}$, b. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=4}^{10} a_{10-k}$, c. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k$.

2. Écrire à l'aide du signe $\sum$ la somme T suivante puis la calculer :

$$T = a_7 + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{49} + a_{51}.$$

Exercice 6 : Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2-k^2)$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\frac{j^2}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{j=3}^{n+2}(j-2)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{2n}(k+3)^2$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k^2+n+3)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^k 2^{3k} b^{-k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(3^{2k+1} - 3^{2k-1}\right)$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1}$
9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1}$

Exercice 7 : Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose, pour x dans $]0,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
En dérivant f de deux façons différentes, montrer que pour tout x dans $]0,1[$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2}.$$

Exercice 8 : Étudier la convergence de la suite de terme général en utilisant des majorations/minorations :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k} \quad (n \in \mathbf{N}^\star)$.
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ (*indication* : majorer $\frac{1}{(k+1)^2}$ par $\frac{1}{k(k+1)}$ et utiliser un télescopage).
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad (n \in \mathbf{N}^\star)$.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbf{N}$.

L'objectif de l'exercice est de proposer une autre méthode pour calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. Calculer de deux manières $\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$.
2. En déduire une expression en fonction de n de S_n ne faisant pas intervenir le symbole $\sum$.

Exercice 10 : Pour tout entier n dans $\mathbf{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k.k!$

Simplifier l'expression de S_n pour tout entier n en remarquant que $k = (k+1) - 1$.

Exercice 11 : Soit x un réel et $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifier :

1. $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
2. $B = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$
3. $C = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}$
4. $D = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
5. $E = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$
6. $F = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k$
7. $G = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$
8. $H = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1}$
9. $K = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{3+kt}, \quad t \in \mathbf{R}$.

Exercice 12 : Calculer :

1. $A = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} a^{-j}$,
2. $B = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} b^k$,
3. $C = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$,
4. $D = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=1}^{m} p(q^2+1)$,
5. $E = \sum_{0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} \frac{k}{l+1}$,
6. $F = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

Exercice 13 : Soit a un réel, n un entier naturel, t un réel. Déterminer la valeur de :

$$C(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kt) \quad \text{et} \quad S(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kt).$$

Indication : on pourra chercher à calculer $C(t) + iS(t)$.

Exercice 14 : Exprimer à l'aide des factorielles le produit

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}.$$

Que reconnaît-on ?