

**Exercice 1** . Les sous-ensembles suivants de  $\mathbf{C}^4$  sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1.  $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x - y + z + t = 0\}$ .
3.  $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x = 0 \text{ et } y = 0\}$ .
2.  $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x - y + z + t = 1\}$ .
4.  $E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ .

**Exercice 2** . Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$ .  
Le cas échéant, en donner une base.

1.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, |x| = |z|\}$
4.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = y \text{ ou } x = 2y\}$ .
2.  $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = -y = 2z\}$ .
5.  $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$ .
3.  $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ .
6.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = 0\}$ .

**Exercice 3** . Dans  $\mathbf{R}^5$ , on considère l'ensemble :

$$F = \{(x, y, z, t, u), x + 2y + 3z + t - u = 0 \text{ et } x + 2y + z + t + u = 0\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^5$ .
2. Quelle est la dimension de  $F$  ? En donner une base.

**Exercice 4** . Dans  $\mathbf{C}^4$ , on considère l'ensemble :  $E = \{(a + 2b, -a + 3b, a, b), a, b \in \mathbf{C}\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}^4$ .
2. En donner une base.
3. Donner un système d'équations cartésiennes de  $E$ .

**Exercice 5**

1. La famille  $(u, v, w)$  avec  $u = (1, 0, 1)$ ,  $v = (2, 0, 1)$  et  $w = (0, -1, 2)$  est-elle libre dans  $\mathbf{R}^3$  ?
2. La famille  $(u, v, w)$  avec  $u = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,  $v = (1, \pi)$  et  $w = (\sqrt{2 - \sqrt{2}}, e^{-1})$  est-elle libre dans  $\mathbf{R}^2$  ?

**Exercice 6** . Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une famille libre de  $\mathbf{K}^n$ .

Montrer que  $(e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$  est aussi une famille libre de  $\mathbf{K}^n$ .

**Exercice 7** . Dans l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^3$ , on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 1, -1), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad \text{et} \quad u_3 = (1, 1, 0).$$

1. Montrer que ces vecteurs forment une base de  $\mathbf{R}^3$ .
2. Soit  $v = (1, 2, 1)$ . Donner les coordonnées de  $v$  dans cette base.

**Exercice 8** . Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère la famille de vecteurs donnée par :

$$\mathcal{F} = ((1, 1, -1), (1, 2, 1)).$$

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $\mathbf{R}^3$ .
2. Compléter cette famille pour former une base de  $\mathbf{R}^3$ .

**Exercice 9** . Dans l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^3$ , on considère les vecteurs :

$$u_1 = (2, 3, -1), \quad u_2 = (1, -1, -2) \quad \text{et} \quad v_1 = (3, 7, 0), \quad v_2 = (5, 0, -7).$$

Montrer que  $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

**Exercice 10** . Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère les vecteurs :  $u = (1, 2, 1)$ ,  $v = (-1, 8, 1)$  et  $w = (-2, 1, -1)$ .  
On pose  $F = \text{Vect}(u, v, w)$ . Déterminer la dimension de  $F$  ainsi qu'une base de  $F$ .

**Exercice 11** . Dans  $\mathbf{R}^4$ , on considère les vecteurs :

$$u = (1, 1, 0, -1), \quad v = (1, 0, 0, -1) \quad \text{et} \quad w = (1, 0, -1, 0)$$

1. La famille  $(u, v, w)$  est-elle une base de  $\mathbf{R}^4$  ?
2. On note  $E = \text{Vect}(u, v, w)$ .  
Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $x, y, z, t$  pour que  $(x, y, z, t) \in E$ .
3. Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y - z + t = 0\}$ .  
Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ .
4. Donner une base de  $E \cap F$ .

**Exercice 12** . Soient  $m \in \mathbf{R}$  et les vecteurs suivants de  $\mathbf{R}^4$  :

$$u_1 = (m, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, m, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, m, 1) \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 1, 1, m).$$

1. Pour quelles valeurs de  $m$  les vecteurs  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sont-ils linéairement indépendants ?
2. Quand ces vecteurs sont liés, calculer la dimension de  $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ .

**Exercice 13** . Dans  $\mathbf{R}^4$ , on considère les cinq vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, 1, -1), \quad u_2 = (1, -1, 2, 0), \quad u_3 = (-1, 2, 1, -2), \quad u_4 = (-2, 3, 1, 0) \quad \text{et} \quad u_5 = (-1, 3, 5, 3).$$

Montrer que ces cinq vecteurs forment une partie liée.

**Exercice 14** . Dans  $\mathbf{R}^3$ , soient les vecteurs :  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, -2, 1)$  et  $w = (1, 3, 0)$ .

1. Soit  $F = \text{Vect}(u, v)$ . Déterminer la dimension de  $F$ .
2. Soit  $G = \text{Vect}(v, w)$ . Déterminer la dimension de  $G$ .
3. Montrer que :  $\text{Vect}(v) \subset F \cap G \subset F$ .
4. En déduire les valeurs possibles pour la dimension de  $F \cap G$ .
5. Montrer que  $u$  n'appartient pas à  $G$ .
6. Conclure sur la dimension de  $F \cap G$ . En déduire une base de  $F \cap G$ .

**Exercice 15**

1. Soit  $F = \text{Vect}((-3, 2, 1), (-5, 3, 2)) \subset \mathbf{R}^3$ .
  - a. Montrer que :  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$ .
  - b. Déterminer  $a$  de manière à ce que  $u = (a, 1, 1)$  appartienne à  $F$ .
2. Soit  $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - y + 5z = 0\}$  et  $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + 3z = 0\}$ .  
On admet que  $G$  et  $H$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$ .
  - a. Vérifier que  $u$  appartient à  $G$  et à  $H$ .
  - b. Résoudre le système :
$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$
  - c. En déduire que  $F \cap G \cap H$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  engendré par  $u$ .