**Exercice 1** . Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probablisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ dont la loi est donnée ci-dessous :

| $k$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}(X=k)$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/3$ | $1/4$ |

1. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de $X$.
2. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$, puis $\mathbf{P}(-0,5 \leqslant X < 3)$.
3. Donner, sous forme d'un tableau la loi de $Y = |X|$ et $Z = X(X^2-1)$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{V}(Y)$, $\mathbf{V}(Z)$.

**Exercice 2** . Soit $X$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ 2/3 & \text{si } -2 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de $X$, puis calculer son espérance et sa variance.

**Exercice 3** . Lors d'une enquête, on interroge un groupe de personnes composé de $n$ hommes et $p$ femmes. On choisit au hasard et sans remise les personnes interrogées une à une jusqu'à obtention d'un homme.
Soit $X$ le nombre de tirage nécessaires. Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 4** . Un sportif tente de franchir des hauteurs numérotées $1, 2, \ldots, n$.
Il n'essaie de franchir la hauteur $k$ que s'il a réussi à passer les hauteurs précédentes. De plus, la probabilité qu'il passe la hauteur $k$ avec succès sachant qu'il a réussi les sauts précédents est égale à $1/k$. Dès qu'il échoue à franchir une hauteur, il s'arrête et on note $X$ la VAR égale au numéro de la hauteur sur laquelle il a échoué. Si toutes les hauteurs sont passées avec succès, on convient d'attribuer à $X$ la valeur $(n+1)$.
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 5** . On lance simultanément $n$ dés équilibrés ($n \geqslant 2$) et on note $M$ le maximum des résultats obtenus.

1. Quand $n = 2$, déterminer la loi de $M$, puis calculer son espérance.
2. On note $X_1, \cdots, X_n$ les résultats donnés par chacun des $n$ dés.
   a. Soit $k \in [\![1, 6]\!]$. Justifier que $[M \leqslant k] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant k]$.
   b. En déduire la fonction de répartition $F_M$ de $M$, puis la loi de $M$.
   c. Montrer que l'espérance de $M$ vaut $6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n$. Quelle est sa limite quand $n \to +\infty$ ?

**Exercice 6** . Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
On effectue des tirages successifs suivant le protocole suivant :

* si on tire une boule blanche on la remet dans l'urne pour le tirage suivant,
* si on tire une boule noire, on la remplace par une boule blanche pour le tirage suivant.

Soit $X_n$ la VAR égale au nombre de boules noires obtenues au cours des $n$ premiers tirages.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$.
2. On suppose $n \geqslant 6$.
   Pour tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = k)$ et $\mathbf{P}(X_n = k-1)$.
3. En déduire que $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \dfrac{9}{10}\mathbf{E}(X_n) + \dfrac{3}{5}$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ ainsi que sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 7** . Reconnaître, pour chacune des variables aléatoires proposées, la loi usuelle qu'elle vérifie. Donner les paramètres correspondants ainsi que l'espérance et la variance.

1. Le nombre de filles dans les familles de 6 enfants (la probabilité de naissance d'une fille est $0,488$).
2. Le nombre de jours dans une année au cours desquels il y a eu un accident à un carrefour donné (la probabilité qu'il y ait un accident un jour donné est de $1/125$).
3. On lance un dé équilibré à 6 faces ; $X$ vaut 1 si le dé tombe sur un nombre pair et 0 sinon.
4. On lance 10 fois un dé équilibré ; $Y$ est le nombre de multiples de 3 obtenus.
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher.
   On pioche une boule et on note $Z$ le numéro obtenu.
6. Une urne contient 10 boules, dont 4 rouges et 6 bleues ; on tire une boule au hasard dans l'urne ; $S$ prend la valeur 1 si on a tiré une boule rouge et 0 sinon.
7. Une urne contient 10 boules, dont 4 rouges et 6 bleues ; on tire successivement et avec remise 3 boules dans l'urne ; $R$ désigne le nombre de boules rouges obtenues.
8. Dans une population constituée de 5000 individus, 500 sont atteints d'une maladie $M$ ; cent enquêteurs choisissent une personne au hasard (deux enquêteurs peuvent éventuellement sélectionner la même personne) ; soit $B$ le nombre de personnes malades parmi les personnes choisies.
9. On tire 6 cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. On note $Y$ le nombre de rois tirés.

**Exercice 8** . On considère une assemblée de $n$ personnes. Une urne contient toutes les listes non ordonnées que l'on peut écrire avec des noms de ces $n$ personnes (y compris la liste vide).

1. Combien y a-t-il de listes dans l'urne ?
2. On tire au hasard un papier et on appelle $X$ la VAR égale au nombre de personnes figurant sur la liste. Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.

**Exercice 9** . Un lot de $n$ pièces contient une pièce défectueuse. Un robot les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse. Il effectue le $n$-ième test dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse. Soit $X$ la VAR égale au nombre de tests effectués.

1. Déterminer la loi de $X$. Donner sans calculs son espérance et sa variance.
   (On pourra introduire les événements $D_i$ : "la $i$-ème pièce testée est défectueuse")
2. On suppose à présent que les tests sont effectués par un homme. S'il ne reste plus que deux pièces, celui-ci ne fait alors qu'un test supplémentaire.
   Soit $Y$ la VAR égale au nombre de tests effectués par l'homme.
   Comment les résultats précédents sont-ils modifiés ?

**Exercice 10** . Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O, par bonds successifs d'une ou deux unités vers la droite :

* au départ la puce est en O,
* si la puce est en $k$, à l'instant suivant elle sera en $k+1$ ou $k+2$ avec probabilité $1/2$,
* les sauts sont supposés indépendants.

1. On note $S_n$ la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués au cours des $n$ premiers sauts. Déterminer la loi de $S_n$, son espérance, sa variance.
2. On note $X_n$ la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après $n$ sauts.
   Déterminer la loi de $X_n$, son espérance, sa variance.

**Exercice 11** . Pour fabriquer des ampoules, une usine dispose de deux machines $A$ et $B$.
La machine $A$ réalise les $3/4$ de la production et la machine $B$ le reste. La probabilité qu'une ampoule fabriquée par la machine $A$ soit défectueuse est de $0,1$ alors qu'elle est de $0,2$ si elle est fabriquée par la machine $B$. Les défauts sont dus au hasard.

1. Chaque machine conditionne les ampoules qu'elle fabrique par boîtes de $n$ ($n \geqslant 2$). Toutes les boîtes sont ensuite entreposées ensemble. On prend au hasard une boîte. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses dans la boîte. Déterminer la loi de $X$ et préciser son espérance.
2. La boîte choisie ne contient pas d'ampoule défectueuse.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine $A$ ?
3. Dans cette question, les ampoules provenant des deux machines sont mélangées aléatoirement avant d'être conditionnées par boîtes de $n$. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses dans une boîte.
   Déterminer la loi de $Y$ et préciser son espérance. Conclure.

**Exercice 12** . Une feuille d'exercices contient $k$ erreurs typographiques.
Lors d'une relecture, une erreur a la probabilité $p = 0,75$ d'être détectée.

1. Calculer le nombre moyen d'erreurs détectées (on traduira au préalable le problème dans le vocabulaire des variables aléatoires).
2. Calculer ensuite cette espérance si le texte est soumis à 36 relectures indépendantes.

**Exercice 13** . Soit une urne contenant $n^2$ boules ($n \in \mathbf{N}^\star$) numérotées de 1 à $n^2$.
On appelle carré parfait un entier carré d'un nombre entier ($0, 1, 4, 9, \ldots$ sont des carrés parfaits).
On tire deux boules simultanément. On note $Z$ la VAR égale à la valeur absolue de la différence des deux numéros tirés.

1. Quelles sont les valeurs prises par $Z$ ?
2. Déterminer la loi de $Z$.
3. Quelle est la probabilité que $Z$ soit un carré parfait ?

**Exercice 14** . Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes la même loi, d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$. On note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(|S_n - m| > \varepsilon) = 0.$$

**Exercice 15** . Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On lance une pièce de monnaie $n$ fois de suite. Trouver une condition sur l'entier $n$ pour que le rapport du nombre de "face" obtenus sur le nombre de lancers soit strictement compris entre $0,4$ et $0,6$ avec une probabilité supérieure à $0,9$.