

**Exercice 1** . Résoudre sur  $\mathbf{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $3y' + 5y + 1 = 0$
2.  $u + \tau \frac{du}{dt} = E$  où  $\tau, E \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $u(0) = 0$ .

**Exercice 2** .

1. Soit l'équation différentielle suivante sur  $\mathbf{R}$  :  $(E) \quad y' + 2y = 2x^2 + 3$ .
  - a. Trouver une solution particulière de  $(E)$  sous forme d'un polynôme de degré 2.
  - b. Résoudre alors l'équation  $(E)$ .
2. Soit l'équation différentielle suivante sur  $\mathbf{R}$  :  $(E) \quad y' - y = 3e^t + 2$ .
  - a. Trouver une solution particulière de l'équation  $y' - y = 3e^t$  sous la forme  $ate^t$ .
  - b. En déduire une solution particulière de  $(E)$ .
  - c. Résoudre enfin l'équation  $(E)$ .

**Exercice 3** . Donner les solutions générales sur  $\mathbf{R}$  des équations différentielles suivantes, puis calculer la solution vérifiant les conditions initiales données :

1.  $y'' - 3y' + 2y = 0$ ,  $y'(0) = y(0) = 1$ .
2.  $y'' + 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
3.  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$ .

**Exercice 4** . Résoudre les équations différentielles :

1.  $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = E$ ,  $\omega, E \in \mathbf{R}_+^*$ ,
2.  $y'' - 3y' + 2y = x^3$  (on cherchera une solution polynomiale de degré 3).
3.  $y'' - 2y' + y = e^x + xe^{-x}$  (on cherchera à superposer des solutions en  $\lambda x^2 e^x$  et  $(ax + b)e^{-x}$ ).
4.  $y'' - y = e^{-x} \cos x$  (on cherchera une solution de la forme  $e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ ).

**Exercice 5** . Résoudre les équations différentielles suivantes sur les ensembles indiqués.

1.  $y' + xy = x$ , sur  $\mathbf{R}$ .
2.  $\frac{dC}{dt} + k_2 C = a_0 e^{-k_1 t}$ , sur  $\mathbf{R}$ .
3.  $y' - y \tan x = -\cos x$ , sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .
4.  $y' \cos x + y \sin x = x$ , sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

**Exercice 6** . Résoudre l'équation différentielle :  $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ , où  $y^{(4)}$  désigne la dérivée d'ordre 4 de  $y$ .

*Indication* : on pourra poser  $z = y'' - y$  et rechercher une équation différentielle vérifiée par  $z$ . Puis on superposera des solutions en  $\lambda x e^x$  et  $\lambda x e^{-x}$ .

**Exercice 7** . Déterminer les fonctions  $f$  dérivables telles que :  $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(-x)$ .

*Indication* : on pourra montrer que  $f$  est deux fois dérivable et chercher une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par  $f$ .

**Exercice 8** . Dans un élevage de poules “Isabrown”, on note  $P$  la masse d’une poule (en grammes) en fonction de temps  $t$  (en semaines). On suppose que c’est une fonction dérivable de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  et qu’elle vérifie l’équation différentielle (trouvée expérimentalement) :

$$(E) \quad P' = 0,25P - 0,000125P^2$$

1. Supposons qu’il existe une solution  $P$  définie sur un intervalle  $I$  non vide et sur lequel la fonction  $P$  ne s’annule pas. Pour tout  $t$  dans  $I$ , on pose alors  $y(t) = \frac{1}{P(t)}$ .

Écrire l’équation différentielle vérifiée par la fonction  $y$  et donner ses solutions.

2. En déduire les solutions  $P$  de l’équation (E).
3. On remarque qu’une poule de 4 semaines pèse 200 g. Quel sera son poids à 12 semaines ? Vers quelle valeur son poids tendra-t-il à se stabiliser ?

**Exercice 9** . Soit  $(E_1)$  l’équation différentielle :  $x^2y'' + xy' - y = 0$ ,  $x \in ]0, +\infty[$ .

1. Montrer que la fonction définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $y(x) = x$  est solution de  $(E_1)$  .
2. Soit  $y$  une solution de  $(E_1)$  et  $z$  la fonction définie par la relation  $y(x) = xz(x)$ . Trouver une équation différentielle du premier ordre, notée  $(E_2)$ , et vérifiée par  $z'$ .
3. Trouver les solutions de  $(E_2)$ , et en déduire celles de  $(E_1)$ .

**Exercice 10** . On considère l’équation différentielle :

$$(E) \quad x^2y'' + y = 0, \quad x \in ]0, +\infty[.$$

Soit  $y$  une solution de l’équation  $(E)$ . On effectue le changement de variables  $x = e^t$ , et on considère la fonction  $z$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $z(t) = y(e^t)$ .

1. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par  $z$ .
2. En déduire les solutions de l’équation  $(E)$ .