Programme de colles
Semaine 8 du 17/11 au 21/11/2025

Dynamiques de populations

- Exemples de modèles discrets, définis par des suites récurrentes.
  Utilisation de l'outil informatique.
  Le modèle de Malthus discret : $p_{n+1} = \alpha.p_n$
- Exemples de modèles continus, définis par une équation différentielle.
  Le modèle de Malthus continu : $p'(t) = \alpha.p(t)$
  Le modèle logistique continu : $p'(t) = \alpha.p(t).\left(1 - \dfrac{p(t)}{K}\right)$
  Le modèle de Gompertz : $p'(t) = \alpha.p(t).\ln\left(\dfrac{K}{p(t)}\right)$

Polynômes à coefficients réels ou complexes

- Monômes, degré, coefficients, polynômes à coefficients réels ou complexes
- Ensembles $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X]$, ainsi que $\mathbf{R}_n[X], \mathbf{C}_n[X]$ quand $n \in \mathbf{N}$
- Opérations sur les polynômes : somme, produit, composée
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes
- Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls
- Polynôme dérivé, degré du polynôme dérivé
- Racines d'un polynôme
- Un polynôme P est factorisable par $X - \alpha$ si, et seulement si, α est une racine de P
- Généralisation à plusieurs racines distinctes
- Ordre de multiplicité d'une racine
- Théorème de d'Alembert-Gauss :
  $\ast$ Tout polynôme à coefficients complexes de degré n peut s'écrire $P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$,
  où α_i sont les racines complexes de P, pas nécessairement distinctes, et λ son coefficient dominant.
  $\ast$ Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n+1$ racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul

Questions de cours :

1. si P et Q sont des polynômes non nuls, que dire de :
   $\deg(P+Q), \qquad \deg(P \times Q), \qquad \deg(P \circ Q)$?
2. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
3. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
4. Somme et produit des racines d'un trinôme.
5. Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est racine de $P \in \mathbf{R}[X]$, que dire de $\overline{\alpha}$?