1. L'équation différentielle de (L) est linéaire homogène à coefficients constants. D'après le cours, avec la condition initiale $q(0)=N_0$, il y a une solution unique qui est $q : t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$.
2. Dans ce modèle, la quantité de traceur décroît strictement pour être entièrement éliminée en temps long.
3. Le ratio peut s'interpréter par construction comme la vitesse instantanée d'excrétion par unité de matière. Dans le modèle (L), il est supposé constant égal à λ.
4. **a)** Soit $n \geq 1$ et $t \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} N_k t_k = \sum_{k=1}^{n} (q(t_{k-1}) - q(t_k))\, t_k \quad \text{par définition de } N_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} q(t_{k-1}) t_k - \sum_{k=1}^{n} q(t_k) t_k \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} q(t_k) t_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} q(t_k) t_k \quad \text{par glissement d'indice} \\
&= \left(q(t_0) t_1 + \sum_{k=1}^{n-1} q(t_k) t_{k+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} q(t_k) t_k + q(t_n) t_n \right) \\
&= q(t_0) t_1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} q(t_k)(t_{k+1} - t_k) \right) - q(t_n) t_n \quad \text{en regroupant} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} q(t_k) h \right) - q(t) t \quad \text{car } t_1 = t_1 - t_0,\ t_n = t, \text{ et } (t_{k+1} - t_k) = h.
\end{aligned}$$

   b) On reconnaît une somme de Riemann dans le premier terme de l'égalité ci-dessus. Comme la fonction q est continue sur $[0,t]$, d'après le théorème de la moyenne, $\lim_{n\to+\infty} S_n(t)$ existe et vaut par somme de limites $\displaystyle\int_0^t q(s)\mathrm{d}s - tq(t) = S(t)$.

   c) Par primitivation à vue, puisque $\lambda \neq 0$, $S(t) = \dfrac{N_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) - tq(t)$. Comme $q(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, par division par $N_0 - q(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t})$, on a le résultat.

   d) Par croissances comparées en $+\infty$, $te^{-\lambda t} = o(1)$, puis par quotient et somme de limites, on obtient $\bar{T}_t = \dfrac{1}{\lambda} + o(1)$. On en conclut que $\bar{T}$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$, qui s'interprète donc comme le temps moyen de séjour d'une molécule dans le foie sur toute l'expérience.

5. **a)** En approximant $x'(t_k)$ par le taux d'accroissement $\dfrac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$ de la fonction x, la première équation de (S) conduit à considérer la relation $x_{k+1} - x_k = h(-2x_k + y_k)$. Même chose en considérant $y'(t)$ aux points t_k. On obtient bien finalement le système $(\star)$ en partant des conditions initiales $(x_0, y_0) = (x(0), y(0)) = (1, 0)$.

   b) Comme les listes L_x et L_y contiennent $n+1$ items, et qu'elles sont initialisées à des listes de longueur 1, il faudra effectuer n tours de boucle avec un `append` pour chaque liste. Noter ausis que pour éviter les mises à jour asynchrones des suites (x_k) et (y_k) qui sont entrelacées, on effectue une affectation à la volée.

```python
h = T/n
x0,y0= 1,0                          # d'après (S)

Lx,Ly=[x0],[y0]
x,y=Lx[-1],Ly[-1]

for k in range(n):                  # Lx,Ly ont n+1 items :
    x,y = x+h*(-2*x+y),y+h*(2*x-2*y)    # n tours de boucles requis
    Lx.append(x)
    Ly.append(y)
Lt = [k*h for k in range(n+1)]
```

c) Pour la B.S.P. sanguine, on observe une décroissance exponentielle dans une première phase, semblable à un modèle d'excrétion libre, puis une décroissance plus lente autour de la date $t = 1/2$, jusqu'à élimination totale du sang. Pour la B.S.P. hépatique, on voit une première phase d'augmentation, puis un pic de quantité autour de la date de changement de taux de décroissance pour la B.S.P. sanguine, et enfin une décroissance jusqu'à élimination. *À rapprocher des modèles de cinétique chimique vues en cours et en TP d'informatique !*

6. a) Si x vérifie (S), alors $x' = -2x + y$, donc x' est somme de deux fonctions dérivables par définition de solution. Ainsi x est deux fois dérivable. Comme la première équation de (S) est une égalité de fonctions, on a égalité des fonctions dérivées, et par linéarité de la dérivation : $x'' = -2x' + y'$. Il ne reste plus qu'à remplacer y' par son expression donnée par (S) pour obtenir (E).

b) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène. Elle se résout par la méthode de l'équation caractéristique, dont les racines sont $r_1 = -2 + \sqrt{2}$ et $r_1 = -2 - \sqrt{2}$. D'après le cours, la solution x est donc de la forme, pour deux réels A, B bien ajustés : $x : t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.

c) D'après (S), $x'(0) = -2x(0) + y(0) = -2$.

d) Ce qui précède donne avec la relation $x(0) = 1$, le système linéaire de deux équations en A et B suivant :

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ Ar_1 + Br_2 &= -2. \end{cases}$$

Avec les formules de Cramer par exemple, il vient : $A = B = \dfrac{1}{2}$. Finalement , pour $t \geq 0$: $x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}\right)$.

e) Soit $t \geq 0$. En dérivant x, on obtient : $x'(t) = (r_1/2)e^{r_1 t} + (r_2/2)e^{r_2 t}$. Comme d'après (S), $y(t) = x'(t) + 2x(t)$, on trouve $y(t) = \left(1 + \frac{r_1}{2}\right)e^{r_1 t} + \left(1 + \frac{r_2}{2}\right)e^{r_2 t} = \sqrt{2}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right)$ d'après les valeurs de r_1 et r_2.

7. a) Soit $t \geq 0$. On factorise par le terme le plus haut sur l'échelle de croissance en $+\infty$, puisque $\alpha_1 \neq 0$:
$c(t) = \alpha_1 e^{-r_1 t}\left(1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{(r_1 - r_2)t}\right)$. Comme $r_1 - r_2 < 0$, $c(t) = \alpha_1 e^{-r_1 t}(1 + o(1)) \quad t \to +\infty$: c'est la définition de $c(t) \underset{+\infty}{\sim} \alpha_1 e^{-r_1 t}$

b) On calcule $\ln c(t)$ pour t assez grand, en partant de la factorisation précédente et des propriétés du logarithme (notons qu'asymptotiquement, $c(t) > 0$ d'après l'équivalent calculé, donc $\ln c(t)$ est défini)

$$\ln(c(t)) = \ln \alpha_1 - r_1 t + \ln\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{(r_1 - r_2)t}\right).$$

D'ou par équivalent usuel, puisque $e^{(r_1-r_2)t} = o(1), t \to +\infty$: $\delta(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{(r_1-r_2)t}$. La différence est donc exponentiellement petite.

8. Les équations de (S) sont linéaires et homogènes, donc par principe de superposition, c_s et c_h satisfont les équations différentielles de (S).

9. a) Par définition, l'équation $(\mathrm{E_c})$ est : $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

b) Calculons puis développons Δ par identité remarquable :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\lambda_{21} + \lambda_{02} + \lambda_{12})^2 - 4\lambda_{02}\lambda_{21} \\
&= \underbrace{(\lambda_{21} + \lambda_{02})^2 - 4\lambda_{02}\lambda_{21}}_{\text{se factorise par identité remarquable}} + \lambda_{12}^2 + 2\lambda_{12}(\lambda_{21} + \lambda_{02}) \\
&= (\lambda_{21} - \lambda_{02})^2 + \lambda_{12}^2 + 2\lambda_{12}(\lambda_{02} + \lambda_{21}),
\end{aligned}$$

forme sous laquelle Δ est visiblement somme de termes positifs.

c) D'après ce qui précède, $\Delta \geq \lambda_{12}^2 > 0$, donc $(\mathrm{E_c})$ admet deux racines réelles distinctes u, v. Comme le produit des racines vaut $\beta > 0$, elles sont de même signe et non nulles. Comme la somme des racines vaut $-\alpha < 0$, les racines sont négatives. En appliquant le théorème de l'équation caractéristique, pour deux réels α_1, α_2 et en notant $-r_1 > -r_2$ $(r_i > 0)$, les deux racines distinctes strictement négatives de $(\mathrm{E_c})$, on a bien le résultat demandé.

10. a) Notons $\tau = \dfrac{1}{r_2 - r_1} > 0$. D'après **7b)**, $\ln(c_s(t)) - (\ln\alpha_1 - r_1 t) \underset{t\to+\infty}{\sim} Ke^{-t/\tau}$, pour une constante K non nulle. D'après les propriétés de décroissance rapide de la fonction exponentielle, au bout de quelques τ, l'erreur commise en remplaçant $\ln(c_s(t))$ par $\ln\alpha_1 - r_1 \ln t$ est négligeable, ce qui justifie l'affirmation des auteurs. Le graphique indique effectivement un changement de pente autour de $t = 20$mn (ce qui donne d'ailleurs un ordre de grandeur de τ). Les paramètres de la droite d'équation $y = \ln\alpha_1 - r_1 t$ (celle qui apparaît sur le graphique puisqu'on utilise des coordonnées logarithmiques) nous donnent des estimations de α_1 et r_1.

b) Comme $c_s(t) - \alpha_1 e^{-r_1 t} = \alpha_2 e^{-r_2 t}$, en traçant les points de coordonnées $(t, c_s(t) - \alpha_1 e^{-r_1 t})$ sur du papier semi-logarithmique, on obtient au bout de quelques $1/r_2$ des points approximativement alignés permettant d'estimer α_2 et r_2.

c) On a $c_s(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{x(0)}{V}$. D'où $V = \dfrac{x(0)}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

d) D'après (S), $c_s'(0) = -\lambda_{21} c_s(0) = -\lambda_{21}(\alpha_1 + \alpha_2)$. D'autre part, en dérivant l'expression de la solution c_s, $c_s'(0) = -\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2$. D'où $\lambda_{21}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$ et finalement : $\lambda_{21} = \dfrac{\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

e) D'après les relations coefficients-racines : $r_1 r_2 = \lambda_{02}\lambda_{21}$, on obtient $\lambda_{02} = \dfrac{r_1 r_2}{\lambda_{21}} = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{\dfrac{\alpha_1}{r_2} + \dfrac{\alpha_2}{r_1}}$.

Enfin, comme $r_1 + r_2 = \lambda_{21} + \lambda_{02} + \lambda_{12}$, on en tire $\lambda_{12} = r_1 + r_2 - (\lambda_{21} + \lambda_{02})$ (on obtient après des calculs une expression symétrique également : $\lambda_{12} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2(r_1 - r_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)}$).

11. a) Soit $i \in \{2 \dots n\}$. L'équation (E_i) : $y_i' + \lambda y_i = \lambda y_{i-1}$ est linéaire du premier ordre non homogène à coefficients constants. D'après le théorème de structure, $y_i = y_H + y_p$ où y_H est une solution de l'équation homogène associée, et y_p une solution particulière de (E_i). De même qu'en **partie 1**,

$y_H(t) = Ke^{-\lambda t}$, où $K \in \mathbf{R}$ est une variable libre. Ensuite, par variation de la constante, on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = K(t)e^{-\lambda t}$, où K est ici une fonction dérivable à déterminer.

Par calcul : $\forall t \geq 0 \quad y_i'(t) + \lambda y_i(t) = \left| \begin{array}{ll} \lambda y_{i-1}(t) & \text{car } y_i \text{ est solution} \\ K'(t)e^{-\lambda t} & \text{en dérivant l'expression } \textit{a priori} \text{ de } y_i \end{array} \right.$.

Ce qui donne que $K'(t) = \lambda y_{i-1}(t)e^{\lambda t}$. Ceci montre que K est une primitive de $t \mapsto \lambda y_{i-1}(t)e^{\lambda t}$. Prenons $K(t) = \lambda \int_0^t y_{i-1}(s)e^{\lambda s}\mathrm{d}s$. Revenant alors à y_p par multiplication de K par $e^{-\lambda t}$, on trouve : $y_p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t y_{i-1}(s)e^{\lambda s}\mathrm{d}s = \lambda \int_0^t y_{i-1}(s)e^{\lambda(s-t)}\mathrm{d}s$. Finalement on a

$$y_i(t) = \underbrace{Ke^{-\lambda t}}_{y_H(t)} + \underbrace{\int_0^t \lambda y_{i-1}(s)e^{\lambda(s-t)}\mathrm{d}s}_{y_p(t)}.$$

La condition initiale $y_i(0) = 0$ impose la valeur de solution de la variable libre K : $K = 0$. Finalement, on a bien $y_i = y_p$ comme demandé.

b) La formule donnant y_1 est clairement exacte pour $i = 1$ d'après les données, et sachant que $0! = 1 = \alpha^0$ pour tout réel α, cela initialise la récurrence. Ensuite, pour l'hérédité : si on suppose qu'à un rang $i \geq 1$, on a bien pour tout réel $t \geq 0$: $y_i(t) = \dfrac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda t}$, comme $y_{i+1}(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda y_i(s)e^{\lambda s}\mathrm{d}s$, en réinjectant l'expression de $y_i(s)$ et par linéarité de l'intégrale : $y_{i+1}(t) = e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda^i}{(i-1)!}\int_0^t s^{i-1}\mathrm{d}s \overset{\text{à vue}}{=} e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda^i}{(i-1)!} \times \dfrac{1}{i} = \dfrac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$. Par récurrence, on a bien le résultat.

c) Comme produit de termes positifs, $y_i(t) \geq 0$ pour tout réel $t \geq 0$.

d) D'après les croissances comparées en $+\infty$, $y_i(t) = o(1) \quad t \to +\infty$. Cela signifie en termes de modèle que chaque unité U_i finit par excréter toute la B.S.P. qui y transite au bout d'un temps suffisamment grand. On peut noter également que dans chaque compartiment, il y a un pic de concentration en B.S.P. causé par le facteur $\dfrac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}$ (mais cela demanderait une étude de la fonction y_i).

12. a) Soit $t \geq 0$, et $i \geq 1$. On a : $y_{i+1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} = \dfrac{\lambda t}{i} \times \dfrac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda t} = \dfrac{\lambda t}{i} \times y_i(t)$

b) On renvoie z sans le modifier si $i = 1$ car la variable z est initialisée à $y_1(t)$. Sinon, il faudra $i-1$ tours de boucle avec des produits successifs, ce qui donne :

```python
def y(i,t):
    z = np.exp(-lamda*t)
    if i==1:
        return z
    else:
        for k in range(1,i):
            z=z*(lamda*t)/k
    return z
```

13. a) On a $Q_n(0) = \sum_{i=1}^{n} y_i(0) = y_1(0) = 1$ d'après les conditions initiales. Par somme de limites, avec la question **11 d)**, la limite de Q_n en $+\infty$ existe et vaut 0. Cela signifie qu'au bout d'un temps assez long, on peut considérer que toute la B.S.P. est éliminée du foie.

b) Par linéralité de la dérivation, pour tout réel t : $Q_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i'(t)$. En utilisant (1) :

$Q_n'(t) = y_1'(t) + \sum_{i=2}^{n} \lambda(y_{i-1}(t) - y_i(t))$. Par telescopage, et parce que $y_1' = -\lambda y_1$, on obtient : $Q_n'(t) = -\lambda y_1(t) + (\lambda y_1(t) - \lambda y_n(t)) = -\lambda y_n(t)$.

c) Comme $Q_n(0) - Q_n(t) = -\int_0^t Q_n'(s)\mathrm{d}s$, on trouve que $1 - Q_n(t) = F_n(t)$.

d) La quantité de B.S.P. excrétée à la date t est $Q_n(0) - Q_n(t) = 1 - Q_n(t)$. C'est bien $F_n(t)$ d'après ce qui précède.

e) Le script calcule par la méthode des rectangles une valeur approchée de $\int_0^t \lambda y_n(s)\mathrm{d}s$. La fonction `mystere(n,t)` calcule donc une valeur approchée de $F_n(t)$.

14. a) La fonction Q_n est continue sur $\mathbf{R}_+$ comme somme de solutions d'équations différentielles. Elle est décroissante d'après **13 b)** et **11 c)**. Comme pour $n \geq 1$, $y_n(t)$ ne s'annule qu'en 0, on en déduit par **13 b)** que Q_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, qui est un intrevalle. On déduit du théorème de la bijection que Q_n est bijective de $I = \mathbf{R}_+$ sur $J = [0,1[$ (les bornes de J découlent du résultat de **13 a)**). Comme $1/2 \in J$, l'équation (E_n) a bien une unique solution t_n.

b) Par définition, t_1 est la solution de $y_1(t_1) = 1/2$, on trouve par résolution explicite que $t_1 = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

c) Comme l'équation (E_n) est équivalente à $Q_n(t) - 1/2 = 0$, et que la condition de sortie de boucle est $b - a \leq \varepsilon$ le script complété est le suivant :

```python
while bk-ak > eps:
    ck = (ak+bk)/2
    if (Q(n,ak)-0.5)*(Q(n,ck)-0.5)<0:
        ak=ck
    else:
        bk=ck
    return ck
```

15. a) Comme $Q_{n+1} = Q_n + y_{n+1}$, on trouve que $Q_{n+1}(t_n) = Q_n(t_n) + y_{n+1}(t_n)$. Or, $Q_n(t_n) = 1/2$, et y_{n+1} est une fonction positive. Tout cela donne $Q_{n+1}(t_n) - 1/2 \geq 0$.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, la bijection réciproque de Q_n est strictement décroissante d'après le théorème de la bijection. Ainsi : $t_n - Q_{n+1}^{-1}(1/2) \leq 0$, c'est-à-dire $t_n - t_{n+1} \leq 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

16. a) D'après le cours, toute fonction continue sur un segment est bornée. Comme $[0, T]$ est un segment, y_i est bien une fonction bornée.

b) Soit $n \geq 1$. Soit $t \in [0, T]$. Pour tout réel $s \in [0, t]$, on a : $\lambda y_n(s) e^{\lambda(s-t)} \leq M_n \times \lambda e^{\lambda(s-t)}$. Par croissance de l'intégrale, on a, puisque $t \geq 0$:

$$\forall t \geq 0 \quad \int_0^t \lambda y_n(s) e^{\lambda(s-t)}\mathrm{d}s \leq M_n \times \int_0^t \lambda e^{\lambda(s-t)}\mathrm{d}s.$$

Le membre de gauche de cette inégalité est $y_{n+1}(t)$, tandis que celui de droite s'intègre à vue en $M_n(1-e^{-\lambda t})$. Ce dernier terme se majore par $M_n\rho_T$ par croissance de $t\mapsto 1-e^{-\lambda t}$ sur $[0,T]$.

c) On a prouvé que $\forall t\in[0,T] \quad y_{n+1}(t)\leq M_n\rho_T$. Ainsi, $M_n\rho_T$ est un majorant de y_{n+1} sur $[0,T]$. Comme la borne supérieure est le plus petit majorant : $M_{n+1}\leq M_n\rho_T$. Effectuons la preuve par récurrence ensuite :

si on suppose qu'à un rang n donné, $M_n\leq \rho_T^{n-1}$, la relation $0\leq M_{n+1}\leq M_n\rho_T$ donne que $M_{n+1}\leq\rho_T^n$, ce qui établit l'hérédité. Comme $y_1(t)=e^{-\lambda t}\leq 1$, cela initialise la récurrence, et on a bien le résultat.

d) Soit $n\geq 1$ et $T>0$. Pour tout réel $t\in[0,T]$: $\lambda y_n(t)\leq\lambda M_n\leq\lambda\rho_T^{n-1}$ d'après **16. c)**. Par croissance de l'intégrale : $F_n(T)\leq\int_0^T\lambda\rho_T^{n-1}\mathrm{d}t=\lambda T\rho_T^{n-1}$. Comme $Q_n(T)=1-F_n(T)$, on a bien $Q_n(T)\geq 1-\lambda T\rho_T^{n-1}$.

e) À $T>0$ fixé, comme $0<\rho_T<1$, d'après les résultats de convergence des suites géométriques, ρ_T^{n-1} décroît vers 0. Il existe donc un entier p pour lequel $\lambda T\rho_T^{p-1}\leq 1/3$. Dans ce cas $Q_p(T)\geq 1-1/3>1/2$. Par stricte croissance de Q_p^{-1}, on a donc $t_p>T$.

f) La suite (t_n) est croissante. Elle n'admet pas de majorant d'après la question précédente. D'après le théorème de convergence monotone, elle tend vers $+\infty$.

17. Le temps de séjour moyen d'une molécule dans une unité est de $1/\lambda$. Son temps de séjour dans les n unités consécutives est donc de $\dfrac{n}{\lambda}$. On peut conjecturer que $t_n\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{n}{\lambda}$, ce qui semble compatible avec le graphique, sur lequel on voit que $t_n\simeq 2n=\dfrac{n}{\lambda}$.

18. Ce script détermine un segment $[a,b]$ sur lequel initialiser la dichotomie pour un calcul approché de t_n. Comme $t_n\to\infty$, on initialise $[a,b]$ au segment $[0,1]$, et si t_n ne s'y trouve pas, on remplace le segment $[a,b]$ en le segment $[b,b+2(b-a)]$: ce segment est de largeur deux fois plus grande que le précédent et la réunion de ces segments est un segment. On est certain que la boucle `while` s'interrompt et que le caclul de t_n aboutit.

Remarque. L'allure du graphique de F_n suggère que l'emploi de la méthode de Newton doit commencer par une estimation assez précise de t_n.