Devoir Maison n°4

Une suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit les polynômes $P_n \in \mathbf{R}[X]$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Déterminer P_2, P_3 et P_4.
2. Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes P_2, P_3 et P_4

Pour les deux questions suivantes, on pourra procéder par récurrence double.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ P_n$ est unitaire et $\deg(P_n) = n$.
4. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$.
5. Application : on souhaite factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme Q défini par : $Q = X^4 - 3\sqrt{5}X^3 + 12X^2 - 3\sqrt{5}X + 1$.
   Soit x une racine réelle de Q.
   (a) Montrer que $x \neq 0$ et que : $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\sqrt{5}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 12 = 0$.
   (b) On pose $t = x + \dfrac{1}{x}$.
   En déduire que : $P_2(t) - 3\sqrt{5}t + 12 = 0 \qquad (1)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation (1) d'inconnue t.
   (d) En déduire que Q possède quatre racines réelles $x_1, \cdots, x_4$ dont on précisera les valeurs.
   (e) Donner la forme factorisée de Q.
6. Traitement informatique
   On modélise en langage *Python* un polynôme par la liste de ses coefficients de degrés croissants. Ainsi, P_0 est modélisé par la liste $[2]$, et P_1 par la liste $[0, 1]$.
   Dans toutes les questions suivante, L, L_1, L_2 désignent des listes de flottants.
   (a) Écrire une fonction `mult_scalaire(L,a)` d'arguments L et un flottant a, et renvoyant la liste formée par tous les termes de la liste L multipliés par a.
   (b) Écrire une fonction `mult_X(L)` d'argument L, renvoyant la liste M obtenue à partir de L en insérant un 0 en première position.
   (c) Écrire une fonction `somme(L1,L2)` d'arguments L_1, L_2 renvoyant la liste formée par la somme des éléments de même indice des listes L_1, L_2.
   Si L_1 est plus longue que L_2, les éléments de L_1 d'indices supérieurs ou égaux à la longueur de L_2 seront incorporés sans modification et à la même place dans la liste renvoyée (et de même si L_2 est plus longue que L_1).
   (d) En déduire une fonction `P(n)` d'argument $n \in \mathbf{N}$, utilisant les trois fonctions précédentes et renvoyant la liste modélisant P_n.