# Devoir Maison n°5

**Sous-espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle**

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ indéfiniment dérivables.
On rappelle que le vecteur nul $0_E$ de $E$ est la fonction nulle définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène $(\mathcal{E}) : y^{(3)} - 3y' + 2y = 0_E$
et on note $S$ l'ensemble des fonctions de $E$ vérifiant $(\mathcal{E})$.

1. Montrer que $S$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

2. On pose $f_0 : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto e^{-2x} \end{cases}$. Montrer que $f_0 \in S$.

3. Soit $y_0 \in S$. On pose $z = \dfrac{y_0}{f_0}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbf{R},\ z(x) = y_0(x)e^{2x}$.

   a) Donner les expressions de $z', z''$ et $z^{(3)}$ en fonction de $y_0$ et de ses dérivées successives.
   b) En déduire que $z'$ est solution de l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{E}') : y'' - 6y' + 9y = 0_E$.

4. Soit $S'$ l'ensemble des fonctions de $E$ vérifiant $(\mathcal{E}')$.
   Expliquer, d'après le cours, pourquoi $S'$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
   En donner une famille génératrice $(g_1, g_2)$.

5. a) Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbf{R}$ de $g_1$ et de $g_2$.
   b) En déduire l'expression de $z$.
   c) Montrer que : $\exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbf{R}^3 \mid \forall x \in \mathbf{R},\ y_0(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^x + \nu x e^x$.

6. On pose $f_1 : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto e^{x} \end{cases}$ et $f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto xe^{x} \end{cases}$. On veut montrer que $(f_0, f_1, f_2)$ est une famille libre.

   Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que : $af_0 + bf_1 + cf_2 = 0_E$.

   a) *Première méthode* : en choisissant des valeurs particulières pour la variable $x$, montrer que :
   $$\begin{cases} a + b = 0 \\ \dfrac{a}{4} + 2b + 2\ln(2)c = 0 \\ 4a + \dfrac{b}{2} - \dfrac{c\ln(2)}{2} = 0 \end{cases}$$
   Résoudre ce système et conclure.

   b) *Deuxième méthode* : on pose $g = af_0 + bf_1 + cf_2$.

   ⋆ Étudier la limite en $+\infty$ de $\dfrac{g}{f_2}$. En déduire que $c = 0$.

   ⋆ Étudier la limite en $-\infty$ de $\dfrac{g}{f_0}$, et en déduire la valeur de $a$.

   ⋆ Conclure.

7. En déduire une base de $S$, et sa dimension.

8. Soit $y \in S$, et soit $T \in \mathbf{R}$. On pose $y_T : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto y(x - T) \end{cases}$.

   Montrer que $y_T \in S$ et exprimer les coordonnées de $y_T$ dans la base trouvée à la question **7)** en fonction des coordonnées de $y$ dans cette même base.