Corrigé du DM n°3

Suite implicite

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = nx^3 + n^2 x - 2$.

1. (a) Théorème de la bijection

   Soit $n \geqslant 1$. f_n est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$.
   Ainsi, f_n est **continue** et **strictement croissante** sur **l'intervalle R**.
   Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})$.
   Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $f(\mathbf{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.
   Ainsi, pour tout réel α, l'équation $f_n(x) = \alpha$ possède une unique solution réelle.
   En particulier : $\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ possède une unique solution réelle } a_n.}$

   (b) Valeur de a_1

   $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$. On repère la solution évidente 1 et on sait que c'est la seule solution d'après la question précédente. $\boxed{a_1 = 1.}$

   (c) Encadrement de a_n

   Soit $n \geqslant 2$. Alors $f_n(0) = -2 < 0 < f_n(1) = n + n^2 - 2$.
   Puisque f_n est strictement croissante, on a : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 < a_n < 1.}$

2. (a) Approximation informatique

```
def suite(n) :
    def fn(x) :
        return n*x**3 + n**2*x - 2
    a, b = 0, 1
    while b-a > 10**(-6) :
        c = (a+b)/2
        if fn(a)*fn(c) < 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return a
```

   (b) Approximation de a_2

   `>>> suite(2)` renvoie : `0.4533967971801758` donc $\boxed{a_2 \approx 0,453\,397}$

3. (a) Monotonie de (a_n)

   Soit $n \geqslant 1$. Alors
   $$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 \\ &= na_n^3 + n^2 a_n - 2 + a_n^3 + (2n+1)a_n \\ &= f_n(a_n) + a_n^3 + (2n+1)a_n \qquad \text{mais } f_n(a_n) = 0 \\ &= a_n^3 + (2n+1)a_n > 0 \end{aligned}$$
   On a donc : $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$ et f_{n+1} est strictement croissante,
   donc $a_n > a_{n+1}$: $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$

   (b) Convergence de (a_n)

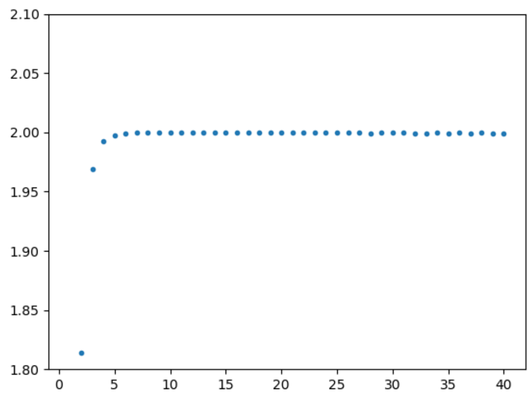
   On a vu que (a_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de limite monotone, (a_n) converge. Notons ℓ sa limite : $\ell \in [0, 1[$.
   Montrons par l'absurde que $\ell = 0$:
   Sinon $\ell > 0$. Donc $na_n^3 + n^2 a_n - 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \ell n^2$, ce qui diverge vers $+\infty$, alors que cette quantité est censée être nulle. C'est une contradiction. Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers } 0.}$

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = n^2 a_n$.

   (a) Représentation graphique de la suite (u_n)

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = range(1,41)                       # indices n de 1 à 40
Y = [n**2*suite(n) for n in X]        # liste d'ordonnées définie en compréhension
plt.plot(X,Y,'.')                     # '.' pour avoir des points non reliés
plt.ylim(1.8, 2.1)
plt.show()
```

   La compilation de ce script produit l'image ci-contre :



   (b) On peut conjecturer que (u_n) converge vers 2.

   (c) Équivalent de a_n

   On sait que : $\forall n \geqslant 1,\ na_n^3 + n^2 a_n = 2$ donc $na_n(a_n^2 + n) = 2$.

   Mais (a_n) tend vers 0 donc $a_n^2 + n \sim n$. Il vient donc : $n^2 a_n \sim 2$, soit : $\boxed{a_n \sim \dfrac{2}{n^2}.}$

   Remarque : ceci prouve la conjecture précédente car $u_n = n^2 a_n$ *donc* $u_n \sim 2$.

5. Étude de $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ avec $g(x) = \dfrac{2x^3+1}{3x^2+2}$.

   (a) g est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations. On a :

   $\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = \dfrac{6x^2(3x^2+2) - 6x(2x^3+1)}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{3x(2x^3+4x-2)}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{3x\, f_2(x)}{(3x^2+2)^2}$

   Sur $[a_2, 1]$, $\dfrac{3x}{(3x^2+2)^2} > 0$ donc $g'(x)$ a le signe de $f_2(x)$: $g'(x) \geqslant 0$.

   Conclusion : $\boxed{g \text{ est croissante sur } [a_2, 1].}$

   (b) ⋆ Signe de $g(x) - x$: $g(x) - x = \dfrac{2x^3+1}{3x^2+2} - x = \dfrac{-x^3 - 2x + 1}{3x^2+2} = -\dfrac{f_2(x)}{2(3x^2+2)}$

   donc $g(x) - x \leqslant 0$ sur $[a_2, 1]$ et ne s'annule qu'en a_2.

   ⋆ Intervalle stable par g et contenant x_0 : $g(a_2) = a_2$, $g(1) = \frac{3}{5} \leqslant 1$ et g croît sur $[a_2, 1]$ donc l'intervalle $I = [a_2, 1]$ est stable par g : $\forall x \in I,\ g(x) \in I$.

   ⋆ (x_n) est décroissante et à valeurs dans I : soit $n \in \mathbf{N}$ et $\mathcal{P}_n$: "$a_2 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant 1$".

   • Initialisation : $a_2 \leqslant x_1 \leqslant x_0 \leqslant 1$ car $x_0 = 1$ et $x_1 = g(x_0) \in I$. $\mathcal{P}_0$ vraie.

   • Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$: $a_2 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant 1$. On applique g, croissante sur I : $g(a_2) \leqslant g(x_{n+1}) \leqslant g(x_n) \leqslant g(1)$ donc $a_2 \leqslant x_{n+2} \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$: $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

   • D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   Ainsi, la suite (x_n) est décroissante, et minorée par a_2.

   ⋆ D'après le théorème de limite monotone, (x_n) converge vers $\lambda \in I$.

   ⋆ $\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$ donc par passage à la limite et par continuité de g : $\lambda = g(\lambda)$.

   D'après l'étude de $g(x) - x$, la seule possibilité est : $\lambda = a_2$.

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } a_2.}$