Programme de colles
Semaine 10 du 1er/12 au 5/12/2025

Espaces vectoriels sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

- Structure d'espace vectoriel ($\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^I$ où I est un intervalle, $\mathbf{K}[X], \mathbf{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$)
- Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs
- Sous-espaces vectoriels
- Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$
- Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence)
- Famille libre finie. Famille liée finie
- Toute famille finie de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre
- Base finie d'un sous-espace vectoriel (sous réserve d'existence)
- Coordonnées d'un vecteur dans une base
- Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base
- Base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}_n[X]$
- De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base
- Toutes les bases de E ont le même cardinal
- Dimension d'un espace vectoriel E
- Dans un espace vectoriel de dimension n :
  - ∗ toute famille libre a au plus n éléments
  - ∗ toute famille libre ayant n élements est une base
  - ∗ toute famille génératrice a au moins n éléments
  - ∗ une famille génératrice ayant n éléments est une base
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :
  - ∗ F est de dimension finie
  - ∗ $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
  - ∗ $F = E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$
- Rang d'une famille finie de vecteurs

Séries de réels

- Définition, notation $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
- Convergence d'une série, somme d'une série convergente, notation $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
- Combinaison linéaire de séries convergentes.
- Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs.
- Théorème d'équivalence pour des séries à termes positifs.
- Convergence absolue : définition, elle entraîne la convergence.
- Convergence et somme des séries géométriques, et dérivées première et seconde :
$$\sum_{n \geqslant 0} q^n \qquad \sum_{n \geqslant 1} n q^{n-1} \qquad \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) q^{n-2}$$
  où la raison q est telle que $|q| < 1$.
- Convergence et somme de la série exponentielle ($x \in \mathbf{R}$) : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$
- Divergence de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

Questions de cours :

1. Définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E.
2. Définition d'une base et de la dimension d'un espace vectoriel.
3. Définition du rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel.
4. Définition d'une famille libre $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E.
5. Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.
6. Caractérisation à l'aide du rang d'une famille libre de p vecteurs de E de dimension n.
7. Caractérisation à l'aide du rang d'une famille génératrice de p vecteurs de E de dimension n.
8. Caractérisation à l'aide de son rang et de son cardinal d'une base de E de dimension n.
9. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n. On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Si u est un vecteur de E, quelle relation lie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$?
10. Définir : "la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge ", et définir alors la somme de cette série.
11. Que dire du comportement asymptotique de (u_n) lorsque $\sum u_n$ converge ?

    Que dire de $\sum u_n$ lorsque (u_n) ne converge pas vers 0 ?
12. Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs.
13. Théorème d'équivalence pour des séries à termes positifs.
14. Définition de la convergence absolue, critère de convergence et inégalité sur les sommes.
15. Définition et critère de convergence d'une série télescopique.
16. Définition et critère de convergence d'une série géométrique, et dérivées première et seconde.
17. Définition et critère de convergence d'une série exponentielle.
18. Nature des séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.